

# 倍频过程中复合涡旋拓扑荷数的倍频效应

赵媛丽, 李方舒, 邱晓东, 张武虹, 炉庆洪, 陈理想

厦门大学物理科学与技术学院, 福建 厦门 361005

**摘要** 利用非线性频率转换过程获得高阶涡旋光场的方法得到了研究人员的广泛关注, 目前关于该领域的研究大都集中在拉盖尔-高斯光束方面, 而针对复合涡旋的非线性频率转换过程的研究不多。从理论方面分析了复合涡旋的倍频过程, 得出了其倍频光场的涡旋分布, 证明了复合涡旋倍频过程中拓扑荷数守恒。在实验方面, 基于非线性光学晶体磷酸钛氧钾, 验证了拉盖尔-高斯涡旋光倍频过程中的拓扑荷数守恒。基于马赫-曾德尔干涉仪产生复合涡旋光, 并研究了其倍频过程。实验结果表明, 复合涡旋光在倍频过程中的拓扑荷数仍然守恒。

**关键词** 非线性光学; 倍频; 守恒; 复合涡旋; 拓扑荷数

**中图分类号** O437.1 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP54.051901

## Frequency Doubling Effect of Topological Charge of Composite Vortex in Frequency Doubling Process

Zhao Yuanli, Li Fangshu, Qiu Xiaodong, Zhang Wuhong, Lu Qinghong, Chen Lixiang

College of Physical Science and Technology, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China

**Abstract** Higher-order vortex light field generated through the process of nonlinear frequency conversion gets the researcher's attention, but the most researches on this field concentrate on Laguerre-Gaussian beams rather than the nonlinear frequency conversion process of composite vortex. The process of frequency doubling of composite vortex is analyzed theoretically, and the vortex distribution of frequency doubling light field is obtained. Via theoretically studying, the topological charge conservation in the frequency doubling process of composite vortex is demonstrated. The topological charge conservation of Laguerre-Gaussian vortex light in the frequency doubling process based on nonlinear potassium titanyl phosphate optical crystal is experimentally demonstrated. Furthermore, composite vortex light is generated based on Mach-Zehnder interferometer, and its frequency doubling process is studied. Experimental results confirm the topological charge conservation in the frequency doubling process of composite vortex light.

**Key words** nonlinear optics; frequency doubling; conservation; composite vortex; topological charge

**OCIS codes** 190.2620; 190.4223; 270.3515; 270.3300

## 1 引言

1974年, Nye等<sup>[1]</sup>将相位位错引入波理论中, 使得光学涡旋逐渐得到研究工作者的重视和广泛研究。相位位错是一种特殊的相位结构, 它具有相位不确定性及振幅为0等性质, 是相位奇点产生的重要条件。相位奇点是光波普遍存在的特征, 满足二维或三维空间波函数的解, 在光波研究中具有重要的作用<sup>[2]</sup>。相位奇点的应用主要体现在光波的传递中, 具有相位奇点的光波在传播过程中会围绕光轴旋转而产生螺旋波, 这种现象与流体涡旋类似, 故将其称为光学涡旋<sup>[3]</sup>。光学涡旋与平面波的一个最大区别在于: 前者含有 $\exp(i\ell\varphi)$

**收稿日期:** 2016-12-20; **收到修改稿日期:** 2017-01-20

**基金项目:** 国家自然科学基金(11474238, 91636109)、教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-13-0495)、福建省杰出青年基金(2015J06002)、厦门大学校长基金(20720160040)

**作者简介:** 赵媛丽(1990—), 女, 硕士研究生, 主要从事非线性光学方面的研究。E-mail: ylzhaoxmu@163.com

**导师简介:** 陈理想(1981—), 男, 博士, 教授, 主要从事光场调控与量子信息方面的研究。

E-mail: chenlx@xmu.edu.cn(通信联系人)

的相位因子,其中 $\varphi$ 为方位角, $l$ 为拓扑荷数。1992年,Allen等<sup>[4]</sup>证实了相位因子与角动量的关联,即相位因子为 $\exp(il\varphi)$ 的光束携带 $lh$ ( $h$ 为普朗克常量)的轨道角动量。拉盖尔-高斯光束(LG)因具有螺旋形结构而成为典型的携带轨道角动量的光<sup>[4-5]</sup>。近年来,光学涡旋的独特性质受到了科研人员的青睐,被广泛应用于光学成像<sup>[6]</sup>、微粒操控<sup>[7-8]</sup>、量子通信<sup>[9-10]</sup>等领域。目前主要利用空间光调制器<sup>[11-12]</sup>、螺旋相位片<sup>[13]</sup>、计算全息法<sup>[14]</sup>、干涉法<sup>[15-16]</sup>、非线性光学过程<sup>[17]</sup>等来产生光学涡旋。

光学涡旋的研究与非线性光学过程紧密关联,特别是在通过倍频、和频来获得高阶涡旋光场方面有着重要的应用<sup>[17-23]</sup>。近年来,研究人员从理论和实验上广泛研究了涡旋光场的非线性频率转换过程。1996年,Dholakia等<sup>[17]</sup>验证了双折射相位匹配条件下倍频过程中的轨道角动量守恒。2013年,Shao等<sup>[18]</sup>从理论上研究了LG光束在准相位匹配晶体中的频率转换过程,证实了该过程中的轨道角动量守恒。同年,Li等<sup>[19]</sup>在实验中对全息光栅进行二维计算,使光束同时加载了2个不同拓扑荷数的涡旋,并且在实验上验证了两束非共线涡旋光在倍频过程中的轨道角动量守恒,即 $l_{2\omega} = l'_\omega + l''_\omega$ (其中 $l_{2\omega}$ 为倍频光的轨道角动量, $l'_\omega$ 和 $l''_\omega$ 为两路基频光的轨道角动量)。2014年,Zhou等<sup>[20]</sup>通过实验研究了准相位匹配条件下LG光束的倍频过程,得到了 $l = 100h$ 的高阶轨道角动量光束,通过探测轨道角动量为 $\pm l$ 的LG光束的叠加态来确定倍频光的轨道角动量。随后,为了提高轨道角动量光束倍频的效率,又采用了外腔增强的方法<sup>[21]</sup>。目前该领域的工作主要集中在LG光束方面,而针对复合涡旋的非线性频率转换过程的研究不多。复合涡旋作为LG光束的线性叠加态,其结构的特殊性使其在原子囚禁过程中可以更加精确地进行微调控和局部调控<sup>[24]</sup>。

本课题组采用马赫-曾德尔(MZ)干涉仪,将携带不同拓扑荷数的2路LG光束进行干涉叠加,以获得复合涡旋光。基于磷酸钛氧钾(KTP)晶体,研究了其倍频过程。在实现红外光倍频的同时,涡旋光束的拓扑荷数也得到了加倍,最终得到的实验结果与理论预测结果一致。

## 2 理 论

LG光束是典型的涡旋光束,可用 $LG'_p$ 表示,其中参数 $l$ 和 $p$ 分别为角向量量子数(也称拓扑荷数)和径向量子数。在柱坐标系 $(r, \phi)$ 下,当径向量子数 $p=0$ 时,LG光束束腰(即 $z=0$ , $z$ 为光传播方向)处的光场分布可表示为<sup>[4]</sup>

$$u_0^l(r, \phi) = \left( \frac{2}{\pi |l|!} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{r\sqrt{2}}{\omega_0} \right)^{|l|} \exp(-r^2/\omega_0^2) \exp(-il\phi), \quad (1)$$

式中 $r$ 为 $z=0$ 处与束腰的距离, $\phi$ 为方位角, $\omega_0$ 为束腰半径。

复合涡旋是指携带不同拓扑荷数的LG光束的相干叠加态。利用MZ干涉仪可获得复合涡旋光,实验装置示意图如图1所示。基模高斯光通过分束镜后分为两束光,两束光经螺旋相位片(VPP)后,分别携带上不同的拓扑荷数 $l_A$ 和 $l_B$ ,干涉叠加后产生了复合涡旋,记作 $|l_A\rangle + |l_B\rangle \exp(i\delta)$ ,其振幅可表示为

$$u(r, \phi, 0) = A_0 u_0^{l_A} + A_0 u_0^{l_B} \exp(i\delta), \quad (2)$$

式中 $A_0$ 为线性叠加系数, $\delta$ 为两束光之间的相位差, $u_0$ 为光场振幅。为了讨论方便,假定 $|l_A| < |l_B|$ 。将(1)式代入(2)式可得

$$u(r, \phi, 0) = Mr^{|l_A|} \exp(-il_A\phi) Q(r, \phi), \quad (3)$$

$$M = \frac{A_0 \exp(-r^2/\omega_0^2)}{\omega_0} \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \right)^{|l_A|} \left( \frac{2}{\pi |l_A|!} \right)^{1/2},$$

$$Q(r, \phi) = 1 + \left( \frac{|l_A|!}{|l_B|!} \right)^{1/2} \left( \frac{r\sqrt{2}}{\omega_0} \right)^{|l_B| - |l_A|} \exp\{-i[(l_B - l_A)\phi - \delta]\}.$$

(3)式中相位差 $\delta$ 的变化只会引起干涉叠加图样的旋转(即涡旋位置的变动),并不会改变涡旋的拓扑荷数<sup>[24-25]</sup>。在涡旋位置处,光场的分布满足<sup>[26]</sup>

$$\text{Re}[u(r, \phi, 0)] = \text{Im}[u(r, \phi, 0)] = 0, \quad (4)$$

式中Re和Im分别表示光场的实部和虚部。根据(3)、(4)式可得涡旋的位置为

$$\begin{cases} r=0 \\ r = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \left( \frac{|l_B|!}{|l_A|!} \right)^{\frac{1}{2(|l_B|-|l_A|)}} , \phi = \frac{k\pi + \delta}{|l_B - l_A|} , k = 1, \dots, 2|l_B - l_A| - 1 \end{cases} \quad (5)$$

由(5)式可以看出,复合涡旋光的涡旋由两部分组成。一部分为光场中心(即  $r=0$  处)拓扑荷数为  $l_A$  的涡旋;另一部分为偏离轴向位置的离轴涡旋,其拓扑荷数为  $\sigma$  ( $\sigma = l_B/|l_B|$ )<sup>[24]</sup>,在偏离轴向位置有  $|l_B - l_A|$  个离轴涡旋呈对称分布。

将复合涡旋光  $u(r, \phi, 0)$  作为基频光,当复合涡旋光通过非线性晶体倍频后,产生的光场在小信号近似条件下可以表示为

$$\psi(r, \phi, 0) \propto u(r, \phi, 0)u(r, \phi, 0). \quad (6)$$

将(3)式代入(6)式后可得

$$\psi(r, \phi, 0) \propto M^2 r^{2|l_A|} \exp(-i2l_A\phi) Q^2(r, \phi). \quad (7)$$

依据涡旋位置条件,可得倍频后光场的涡旋分布为

$$\begin{cases} r=0 \\ r = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \left( \frac{|l_B|!}{|l_A|!} \right)^{\frac{1}{2(|l_B|-|l_A|)}} , \phi = \frac{k\pi + \delta}{|l_B - l_A|} , k = 1, \dots, 2|l_B - l_A| - 1 \end{cases} \quad (8)$$

对比(5)、(8)式可得,倍频后的涡旋光场的涡旋位置与基频光的涡旋位置完全相同。不同之处在于:在  $r=0$  处,由  $r^{2|l_A|} \exp(-i2l_A\phi)$  可知,倍频光中心涡旋的拓扑荷数为  $2l_A$ ;在离轴位置处,呈对称分布的  $|l_B - l_A|$  个离轴涡旋的拓扑荷数为  $2\sigma$ 。因此,通过倍频过程可以实现涡旋拓扑荷数的倍增,即在倍频过程中拓扑荷数守恒。

### 3 实验与分析

复合涡旋光倍频的实验装置示意图如图 1 所示。波长为 1064 nm 的激光经透镜 1 的扩束和准直后,输入含有螺旋相位片(VPP)的 MZ 干涉仪中以产生复合涡旋光,再将复合涡旋光作为基频光入射到 KTP 晶体中进行倍频。其中 1064 nm 激光是连续光,功率为 1 W;透镜 1 的焦距  $f_1$  为 300 mm;透镜 2 的焦距  $f_2$  为 500 mm;KTP 晶体的尺寸为 2 mm×2 mm×5 mm;滤光片对 532 nm 激光的透过率大于 85%,对 1064 nm 激光的透过率小于 1%,用于滤除残余的基频光。透镜 3 的焦距  $f_3$  为 150 mm,将其置于光路中以构成  $2f$  ( $f$  为焦距)系统,将 CCD 置于焦平面上,用于记录倍频光的强度信息。

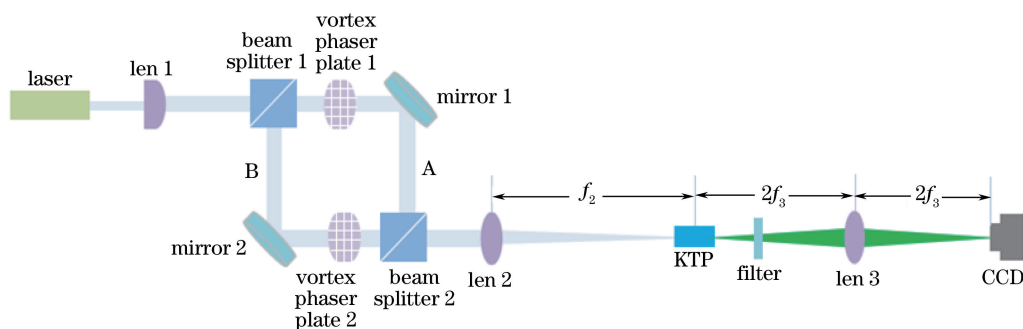


图 1 复合涡旋光倍频的实验装置示意图

Fig. 1 Schematic of experimental setup for composite vortex doubling frequency

#### 3.1 LG 光束的倍频

为了研究 LG 光束的倍频过程,将图 1 所示的实验装置图中的 A 路光阻挡,仅让 B 路光通过。倍频后通过柱透镜模式转换器将倍频光  $LG_p^l$  转化为厄密-高斯模式  $HG_{nm}$ ,并由 CCD 探测。 $HG_{nm}$  模式是由  $n+1$  个纵向波瓣和  $m+1$  个横向波瓣组成的二维晶格,其与  $LG_p^l$  模式指数之间的关系满足  $l=n-m$  和  $p=\min(m, n)$ <sup>[27-28]</sup>。基于此关系,通过观察 CCD 探测到的光场的波瓣数目即可推断出  $LG_p^l$  模式的拓扑荷数  $l$  和径向量子数  $p$ 。倍频光及通过模式转换器后对应的 HG 模式的强度图如图 2 所示。图 2(a)、(c)分别为携带拓扑

荷数为 1 和 2 的涡旋光经倍频过程后得到的倍频光强度图;图 2(b)、(d)分别为携带拓扑荷数为 1 和 2 的涡旋光通过柱透镜模式转换器后所对应的 HG 模式强度图。由图 2(b)可见,HG 式模是由 3 个纵向波瓣和 1 个横向波瓣组成的二维晶格,可知对应模式为  $HG_{20}$ , 因此倍频涡旋光模式为  $LG_0^2$ ,其拓扑荷数为 2,是基频光拓扑荷数的 2 倍。图 2(d)所示的光场由 5 个纵向波瓣和 1 个横向波瓣组成,可知其对应的模式为  $HG_{40}$ ,故其对应的倍频光涡旋拓扑荷数为 4。由此可见,涡旋光场在倍频过程中实现了涡旋光拓扑荷数的加倍,即拓扑荷数守恒。

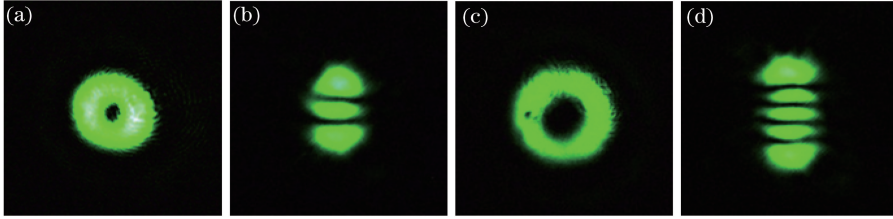


图 2 (a)拓扑荷数为 1 时的倍频光强度;(b)拓扑荷数为 1 时对应的 HG 模式强度;(c)拓扑荷数为 2 时的倍频光强度;  
(d)拓扑荷数为 2 时对应的 HG 模式强度

Fig. 2 (a) Intensity of frequency doubling light when topological charge is 1; (b) HG mode intensity when topological charge is 1;  
(c) intensity of frequency doubling light when topological charge is 2; (d) HG mode intensity when topological charge is 2

### 3.2 复合涡旋光的倍频

为了研究复合涡旋光的倍频过程,通过图 1 所示的 MZ 干涉仪,产生两束携带不同拓扑荷数的涡旋光的干涉叠加,即复合涡旋光。倍频光强度图和相位图的理论模拟、实验所得倍频光强度图及倍频光经柱透镜模式转换器后所得的 HG 模式强度图如图 3 所示。图 3(a)、(e)分别为理论模拟得出的复合涡旋光  $|l_A = 0\rangle + |l_B = 1\rangle \exp(i\delta)$  和  $|l_A = 0\rangle + |l_B = 2\rangle \exp(i\delta)$  的倍频光强度图,图 3(b)、(f)为 CCD 探测到的复合涡旋光  $|l_A = 0\rangle + |l_B = 1\rangle \exp(i\delta)$  和  $|l_A = 0\rangle + |l_B = 2\rangle \exp(i\delta)$  的倍频光强度图。通过对比可以看出,理论模拟和实验结果基本相符。从图 3(b)中可以看出,倍频光中心光场没有涡旋,即中心拓扑荷数为 0;在偏离轴向位置左侧有一个离轴涡旋,对应图 3(b)中的中空部分。从图 3(f)中可以看出,倍频光中心为亮斑,两个中空部分上下对称分布,说明倍频光光场中心的拓扑荷数为 0,外围部分有 2 个离轴涡旋呈对称分布。图 3(c)、(g)为理论模拟得出的复合涡旋光  $|l_A = 0\rangle + |l_B = 1\rangle \exp(i\delta)$  和  $|l_A = 0\rangle + |l_B = 2\rangle \exp(i\delta)$  的相位图。为了验证倍频光场涡旋的拓扑荷数,将倍频光[图 3(b)、(f)]通过模式转换器,所得复合涡旋光  $|l_A = 0\rangle + |l_B = 1\rangle \exp(i\delta)$  和  $|l_A = 0\rangle + |l_B = 2\rangle \exp(i\delta)$  的 HG 模式强度图分别如图 3(d)、(h)所示。可以看出,

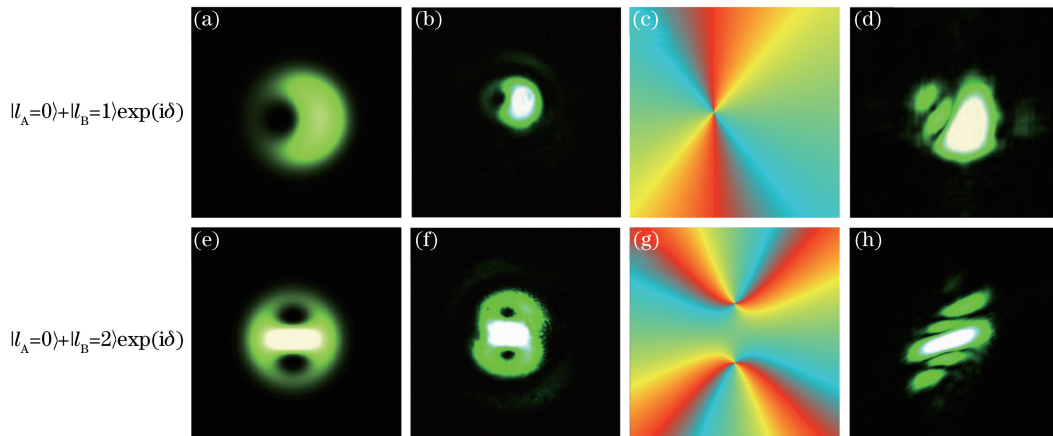


图 3 (a)(e)理论模拟得到的倍频光强度图;(b)(f)实验得到的倍频光强度图;  
(c)(g)理论模拟得到的倍频光相位图;(d)(h)图 3(b)和图 3(f)对应的 HG 模式强度图

Fig. 3 (a)(e) Simulation results of frequency doubling light intensity; (b)(f) experimental results of frequency doubling light intensity; (c)(g) simulation results of frequency doubling light phase;  
(d)(h) intensity of HG modes corresponding to Fig. 3(b) and Fig. 3(f)

图 3(d) 由 2 个小波瓣和 1 个大波瓣组成, 这是由于图 3(b) 左侧涡旋经模式转换器后变为 3 个波瓣, 而右侧拓扑荷数为 0 的部分经模式转换器后仍为 1 个波瓣, 但是在转换过程中左侧的 1 个小波瓣与右侧的波瓣部分重叠在一起, 使得重叠部分强度增强, 因此在图 3(d) 中只能观察到 3 个波瓣。由 LG 模式和 HG 模式指数的转换关系<sup>[28]</sup>可知, 图 3(b) 左侧涡旋的拓扑荷数为 2。这一实验结果与理论模拟的相位图[图 3(c)]完全吻合。同理, 从图 3(h) 中可以看出, 除中心波瓣外, 上下侧各有 2 个小波瓣; 图 3(f) 中心拓扑荷数为 0 的部分经模式转换器后仍为 1 个波瓣, 而上下两侧的涡旋经转换后各变为 3 个小波瓣, 但是由于上面和下面的另一个小波瓣与中心波瓣部分重叠, 使得图 3(h) 的中心强度增强, 因而图中只能观察到 5 个波瓣。由模式转换关系可知, 上下两侧的涡旋拓扑荷数都为 2。另外, 倍频光强度分布图的外围部分能看到微弱的光环, 与理论模拟结果有所差别, 这是由光路中光阑的边缘衍射产生的杂散光造成的, 这些微弱的光环对涡旋拓扑荷数的判断没有影响。

在上述两种情况下, A 路光的拓扑荷数都为 0, 即 A 路光为基模高斯光束。为了研究更一般的情况, 通过 VPP 使 A 路光加载拓扑荷数为 -1 的涡旋, 即复合涡旋光为  $|l_A = -1\rangle + |l_B = 2\rangle \exp(i\delta)$ , 实验所得的倍频光强度图和理论模拟所得的倍频光相位图如图 4(a)、(b) 所示。从图 4(a) 中可以看出, 倍频光中心是空洞的, 即此处为涡旋位置, 拓扑荷数为 -2, 并且在外围部分有 3 个拓扑荷数为 2 的涡旋呈对称分布。由于倍频过程中的转化效率低, 所得到的倍频光强度很弱, 倍频光经模式转换器转换后的 HG 模式强度图相比图 3(d)、(h) 比较杂乱, 有待进一步研究。

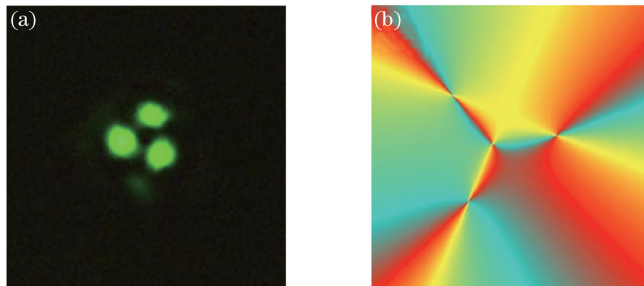


图 4 (a) 实验所得的倍频光强度图; (b) 理论模拟得到的倍频光相位图

Fig. 4 (a) Experimental result of frequency doubling light intensity; (b) simulation result of frequency doubling light phase

由上述分析可知, 复合涡旋光场在倍频过程中实现了拓扑荷数的倍增, 即拓扑荷数守恒。从实验结果可以看出, 产生的倍频光仍为复合涡旋光(纯轨道角动量态的相干叠加态), 这与通常的纯轨道角动量态的和频或倍频所获得的结果有所不同<sup>[19]</sup>, 产生这种现象的原因主要是由于复合涡旋光  $|l_A\rangle + |l_B\rangle$  的倍频过程包括  $l_A$  与  $l_A$  的相互作用、 $l_A$  与  $l_B$  的相互作用以及  $l_B$  与  $l_B$  的相互作用。此外, 实验中采用螺旋相位板加载涡旋, 因此能加载涡旋的拓扑荷数有限。为了使实验结果更加具有说服力, 可以通过空间光调制器加载不同拓扑荷数的涡旋, 从而获得更多丰富的图样<sup>[28]</sup>。

## 4 结 论

基于 KTP 晶体研究了涡旋光场的倍频过程。从理论上分析了复合涡旋光场的倍频过程, 得出了其倍频光场的涡旋分布, 证明了复合涡旋光场在倍频过程中满足拓扑荷数守恒。将 LG 模式的倍频光通过柱透镜模式转换器转换为 HG 模式, 利用这两种模式之间的指数关系测量了倍频光场的拓扑荷数, 验证了 LG 光束在倍频过程中拓扑荷数的倍增过程, 即拓扑荷数守恒。研究了复合涡旋光的倍频过程, 其中复合涡旋光由 2 束携带不同拓扑荷数的 LG 光束通过 MZ 干涉仪的干涉叠加获得, 实验证实了复合涡旋光倍频过程中拓扑荷数的守恒, 并且倍频光除中心涡旋外, 在偏离轴向位置还有  $|l_B - l_A|$  个涡旋, 与基频光相比, 涡旋的位置不变, 所得实验结果与理论模拟结果较为吻合。该研究为获得可见光波段的高阶复合涡旋提供了一种手段, 在原子囚禁方面具有潜在应用, 同时也为红外涡旋光场结构的探测提供了一种方法。

## 参 考 文 献

[1] Nye J F, Berry M V. Dislocations in wave trains[C]. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical,

- Physical and Engineering Sciences, 1974, 336: 165-190.
- [2] Basistiy I V, Soskin M S, Vasnetsov M V. Optical wavefront dislocations and their properties[J]. Optics Communications, 1995, 119(5-6): 604-612.
- [3] Couillet P, Gil L, Rocca F. Optical vortices[J]. Optics Communications, 1989, 73(5): 403-408.
- [4] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, *et al.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. Physical Review A, 1992, 45(11): 8185-8189.
- [5] Padgett M, Courtial J, Allen L. Light's orbital angular momentum[J]. Physics Today, 2004, 57(5): 35-40.
- [6] Bernet S, Jesacher A, Furhapter S, *et al.* Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy [J]. Optics Express, 2006, 14(9): 3792-3805.
- [7] Padgett M, Bowman R. Tweezers with a twist[J]. Nature Photonics, 2011, 5(6): 343-348.
- [8] Luo Wei, Cheng Shubo, Yuan Zhanzhong, *et al.* Power-exponent-phase vortices for manipulating particles[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(11): 1109001.  
罗 伟, 程书博, 袁战忠, 等. 幂指数相位涡旋光束用于微粒操控[J]. 光学学报, 2014, 34(11): 1109001.
- [9] Ding Dongsheng, Zhou Zhiyuan, Shi Baosen. A quantum memory for high-dimensional states[J]. Chinese Journal of Quantum Electronics, 2014, 31(4): 442-448.  
丁冬生, 周志远, 史保森. 高维量子态存储[J]. 量子电子学报, 2014, 31(4): 442-448.
- [10] Guo Jianjun, Guo Banghong, Cheng Guangming, *et al.* Research progress on photon orbital angular momentum in quantum communication applications[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(8): 080003.  
郭建军, 郭邦红, 程广明, 等. 光子轨道角动量在量子通信中应用的研究进展[J]. 激光与光电子学进展, 2012, 49(8): 080003.
- [11] Dai Maochun, Fan Daihe, Wang Yao, *et al.* Generation of high quality helical beams based on spatial light modulator [J]. Chinese J Lasers, 2016, 43(9): 0905004.  
戴茂春, 樊代和, 王 尧, 等. 基于空间光调制器的高质量螺旋光束制备[J]. 中国激光, 2016, 43(9): 0905004.
- [12] Wang Zheng, Xin Jingtao, Wu Zhiqiang. Accurate measurement of photon orbital angular momentum carried by helical beams through spatial light modulator[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2015, 52(8): 080902.  
王 铮, 辛璟焘, 邬志强. 利用空间光调制器实现螺旋光束轨道角动量的精确测量[J]. 激光与光电子学进展, 2015, 52(8): 080902.
- [13] Beijersbergen M W, Coerwinkel R P C, Kristensen M, *et al.* Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate[J]. Optics Communications, 1994, 112(5-6): 321-327.
- [14] Bazhenov V Y, Soskin M S, Vasnetsov M V. Screw dislocations in light wavefronts[J]. Journal of Modern Optics, 1992, 39(5): 985-990.
- [15] Ke Xizheng, Xu Junyu. Interference and detection of vortex beams with orbital angular momentum[J]. Chinese J Lasers, 2016, 43(9): 0905003.  
柯熙政, 胥俊宇. 涡旋光束轨道角动量干涉及检测的研究[J]. 中国激光, 2016, 43(9): 0905003.
- [16] Chen Ziyang, Zhang Guowen, Rao Lianzhou, *et al.* Determining the orbital angular momentum of vortex beam by Young's double-slit interference experiment[J]. Chinese J Lasers, 2008, 35(7): 1063-1067.  
陈子阳, 张国文, 饶连周, 等. 杨氏双缝干涉实验测量涡旋光束的轨道角动量[J]. 中国激光, 2008, 35(7): 1063-1067.
- [17] Dholakia K, Simpson N B, Padgett M J, *et al.* Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light [J]. Physical Review A, 1996, 54(5): R3742- R3745.
- [18] Shao G, Wu Z, Chen J, *et al.* Nonlinear frequency conversion of fields with orbital angular momentum using quasi-phase-matching[J]. Physical Review A, 2013, 88(6): 063827.
- [19] Li S M, Kong L J, Ren Z C, *et al.* Managing orbital angular momentum in second-harmonic generation[J]. Physical Review A, 2013, 88(3): 035801.
- [20] Zhou Z Y, Ding D S, Jiang Y K, *et al.* Orbital angular momentum light frequency conversion and interference with quasi-phase matching crystals[J]. Optics Express, 2014, 22(17): 20298-20310.
- [21] Zhou Z Y, Li Y, Ding D S, *et al.* Highly efficient second harmonic generation of a light carrying orbital angular momentum in an external cavity[J]. Optics Express, 2014, 22(19): 23673-23678.

- [22] Courtial J, Dholakia K, Allen L, *et al.* Second-harmonic generation and the conservation of orbital angular momentum with high-order Laguerre-Gaussian modes[J]. *Physical Review A*, 1997, 56(5): 4193-4196.
- [23] Li Y, Zhou Z Y, Ding D S, *et al.* Sum frequency generation with two orbital angular momentum carrying laser beams [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2015, 32(3): 407-411.
- [24] Galvez E J, Smiley N, Fernandes N. Composite optical vortices formed by collinear Laguerre-Gauss beams[C]. SPIE, 2006, 6131: 613105.
- [25] Ando T, Matsumoto N, Ohtake Y, *et al.* Structure of optical singularities in coaxial superpositions of Laguerre-Gaussian modes[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, 27(12): 2602-2612.
- [26] Indebetouw G. Optical vortices and their propagation[J]. *Journal of Modern Optics*, 1993, 40(1): 73-87.
- [27] Beijersbergen M W, Allen L, Van der Veen H, *et al.* Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum[J]. *Optics Communications*, 1993, 96(1-3): 123-132.
- [28] Zhou J, Zhang W, Chen L. Experimental detection of high-order or fractional orbital angular momentum of light based on a robust mode converter[J]. *Applied Physics Letters*, 2016, 108(11): 111108.