

# 平顶正弦相位板星冕仪

童谢刚, 曹清, 滕达, 王凯

上海大学理学院物理系, 上海 200444

**摘要** 理论上提出了平顶正弦相位板星冕仪, 该星冕仪可作为正弦相位板星冕仪和六平台相位板星冕仪的推广形式。平顶正弦相位板具有角向的双周期结构, 每个周期中都包含两个平顶的半正弦区域和一个平坦区域。解析地推导了该相位板的宽带工作条件。在这个宽带工作条件的一端, 这个相位板可以退化为正弦相位板; 在另一端, 这个相位板可以退化为六平台相位板。数值计算结果表明, 平顶正弦相位板星冕仪与这两种特例情况一样, 具有良好的消色差能力。

**关键词** 成像系统; 星冕仪; 傅里叶光学; 相位板

中图分类号 O438.2 文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP54.051102

## Flat-Top Sinusoidal Phase Mask Coronagraph

Tong Xiegang, Cao Qing, Teng Da, Wang Kai

Department of Physics, College of Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China

**Abstract** A flat-top sinusoidal phase mask coronagraph is theoretically studied, it is the generalized form of the sinusoidal phase mask coronagraph and the six-level phase mask coronagraph. This kind of phase mask is a double-periodic phase mask with both the flat-top sinusoidal and the constant parts in the azimuthal phase in each period. The wideband working condition for this kind of phase mask is analytically presented. On one end, the wideband working condition reduces to that of a sinusoidal phase mask. And on the other end, it reduces to that of a six-level phase mask. Just like its two special examples, the numerical calculation shows the flat-top sinusoidal phase mask coronagraph generally has the advantage of achromatism.

**Key words** imaging systems; coronagraph; Fourier optics; phase mask

**OCIS codes** 110.2970; 110.6770; 070.6110; 120.5060

## 1 引言

近年来, 人类对外太空的探索不断加深, 其中探索系外类地行星并研究其上是否有系外生命是一个重要方向。对系外行星的探测可分为直接探测法和间接探测法。间接探测法是传统的探测方法, 常见的有: 凌日法、重力微透镜法、径向速度法等。这些探测方法往往只能通过探测其他物理量来间接探测某一些行星, 获得该行星某一方面的信息, 有很大的局限性。与这些间接探测方法相比, 直接成像法作为一种直接的探测方法往往能获得更多的行星信息。星冕仪就是这种用于直接探测的光学仪器, 它能对系外行星进行直接成像, 并进行时域傅里叶变换和频谱分析, 进而获得行星大小、质量、密度、周期等信息。性能优越的星冕仪能极大地扩展系外行星的直接成像范围, 并获得更为直观的观测数据。在以往的研究中, 研究人员提出了多种结构的星冕仪, 并利用地基和天基望远镜所携带的星冕仪装置得到了一些系外行星的图像<sup>[1-3]</sup>。

根据不同的结构和原理, 星冕仪可以分为不同的类型: 基于正入射光在入瞳处分离后干涉相消的干涉型星冕仪<sup>[4-6]</sup>, 如偏振干涉型星冕仪, 干涉型星冕仪具有较好的消光效果, 但结构较为复杂, 会引入较多的噪声,

收稿日期: 2016-12-30; 收到修改稿日期: 2017-02-01

作者简介: 童谢刚(1991—), 男, 硕士研究生, 主要从事光学成像方面的研究。E-mail: tongxiegang@foxmail.com

导师简介: 曹清(1967—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事表面等离子激元、光学成像及太赫兹波导方面的研究。

E-mail: qcqao@shu.edu.cn

同时该类型星冕仪对行星光强影响较大;基于孔径切趾或孔径相位切趾的切趾型星冕仪<sup>[7-9]</sup>,如相位诱导的振幅切趾型星冕仪,切趾型星冕仪可以获得高对比度的行星成像图,但其内工作角较大,很难对距离恒星较近的行星成像;基于李奥原理在焦平面处相位调制或振幅调制的改进型李奥星冕仪等<sup>[10-12]</sup>,如涡旋板星冕仪,相位调制型星冕仪具有内工作角小、消色差能力强、透射系数高等优点,是目前研究的一大热点。

由于宽带星冕仪具有能探测到更多行星信息和所需成像时间更短的特点,人们提出了很多方法来提高星冕仪的宽带工作能力<sup>[13-15]</sup>。在这些方法中,基于李奥原理的改进型相位板星冕仪是一个很好的选择。但其中一些方法如环形槽相位板星冕仪对加工精度要求非常高,级串式结构的相位板星冕仪结构复杂容易引入噪声等缺点,探测效果不是很理想。在最近的几年里,正弦相位板星冕仪(SPM)<sup>[16]</sup>和六平台相位板星冕仪(SLPM)<sup>[17]</sup>相继被提出,两者都有很好的宽带工作性能。但SLPM对加工精度要求较高<sup>[18]</sup>并且存在相位跃变区域,其中相位板跃变区域附近对行星探测的影响非常大;SPM的内工作角不是足够理想,基于此提出这两种星冕仪的推广形式——平顶正弦相位板星冕仪(FSPM)。FSPM不存在相位跃变区域,且有较SPM更好的内工作角。此外,与其他类型的星冕仪相比,该型星冕仪具有加工制造简单,由误差引入的噪声少等优点。

## 2 平顶正弦相位板星冕仪

星冕仪的结构如图1所示,由三个具有相同焦距 $f$ 的透镜( $L_1, L_2, L_3$ )、入瞳处的孔径光阑(AS)、焦平面处的相位板、直径稍小于孔径光阑的李奥光阑(LS)以及探测器组成。假设在入瞳、焦平面以及李奥光阑前的光复振幅分布为 $U(x, y)$ 、 $U(x', y')$ 和 $U(x'', y'')$ 。沿光轴入射的恒星光表示为 $U(x, y) = A_0$ ( $A_0$ 为常数)。根据文献<sup>[16]</sup>和<sup>[17]</sup>,可以得到在焦平面和李奥光阑前的复振幅分布为

$$U(x', y') = A_1 t(\theta) \exp(ikr'^2/2f) \frac{J_1(ar')}{ar'} \quad (1)$$

$$U(x'', y'') = A_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n C_n H_n \left\{ \frac{J_1(ar')}{ar'} \right\} \exp(in\varphi) \quad (2)$$

式中 $A_1 = 2\pi A_0 R_{AS}^2 / (i\lambda_0 f)$ ,  $R_{AS}$ 是孔径光阑的半径, $\lambda_0$ 是工作带宽的中心波长, $f$ 是透镜的焦距, $t(\theta)$ 是相位板的透射系数, $\theta$ 是焦平面上的角坐标, $k = 2\pi/\lambda_0$ ,  $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ ,  $a = kR_{AS}/f$ ,  $J_1(ar')$ 是一阶贝塞尔函数, $A_2 = -2\pi A_0 R_{AS}^2 / (\lambda_0 f)^2$ ,  $H_n \{J_1(ar')/ar'\}$ 是 $n$ 阶汉克尔函数,缩写为 $H_n \{\dots\}$ ,  $\varphi$ 是李奥光阑上的角坐标。 $C_n$ 是系数,孔径光阑函数和 $C_n$ 的表达式为<sup>[16-17]</sup>

$$\text{circ}(r/R_{AS}) = \begin{cases} 1, & r \leq R_{AS} \\ 0, & r > R_{AS} \end{cases} \quad (3)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t(\theta) \exp(-in\theta) d\theta \quad (4)$$

同时 $C_n$ 满足条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = 1$ 。要想在李奥光阑范围内对恒星光进行消光,需要使 $U(x'', y'')$ 在这个范围内的值为零。由汉克尔函数 $H_n \{\dots\}$ 的性质可知,当 $n$ 为非零偶数时, $H_n \{\dots\}$ 的值为0,但当 $n$ 为零和奇数时, $H_n \{\dots\}$ 还有非零值。因此需要找到一个透射系数 $t(\theta)$ ,来使 $C_0$ 和 $C_{2q+1}$ 的值在中心波长 $\lambda_0$ 处为0。由(4)式可知,如果透射系数 $t(\theta)$ 是个双周期函数,那么 $C_{2q+1}$ 的值为零。 $C_0(\lambda)$ 可以用泰勒级数展开为<sup>[15,16]</sup>

$$C_0(\lambda) = C_0(\lambda_0) + \left. \frac{\partial C_0(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 C_0(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^2 + \dots \quad (5)$$

由于高阶项对 $C_0(\lambda)$ 的的影响已经很小,所以为了满足条件 $C_0(\lambda) \approx 0$ ,一般只考虑泰勒级数的前两项<sup>[16-17]</sup>:

$$\begin{cases} C_0(\lambda_0) = 0 \\ \left. \frac{\partial C_0(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

透射系数 $t(\theta, \lambda)$ 可以表示为 $t(\theta, \lambda) = \exp[i(\lambda_0/\lambda)G(\theta)]$ ,其中 $G(\theta)$ 是相位板角向的双周期函数。这

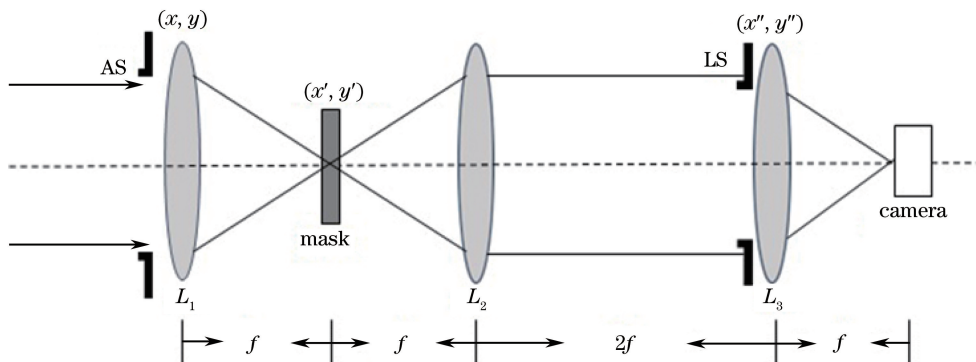


图 1 星冕仪的结构

Fig. 1 Structure of the coronagraph system

里定义平顶正弦相位板  $G(\theta)$  的一般形式为

$$G(\theta) = \begin{cases} h \sin \frac{\pi}{2l} \theta, & 0 \leq \theta < l \\ h, & l \leq \theta < B - l \\ h \sin \frac{\pi}{2l} (\theta + 2l - B), & B - l \leq \theta < B + l \\ -h, & B + l \leq \theta < 2B - l \\ h \sin \frac{\pi}{2l} (\theta + 4l - 2B), & 2B - l \leq \theta < 2B \\ 0, & 2B \leq \theta < \pi \\ h \sin \frac{\pi}{2l} (\theta + 4l - \pi), & \pi \leq \theta < \pi + l \\ h, & \pi + l \leq \theta < \pi + B - l \\ h \sin \frac{\pi}{2l} (\theta + 6l - \pi - B), & \pi + B - l \leq \theta < \pi + B + l \\ -h, & \pi + B + l \leq \theta < \pi + 2B - l \\ h \sin \frac{\pi}{2l} (\theta + 8l - \pi - 2B), & \pi + 2B - l \leq \theta < \pi + 2B \\ 0, & \pi + 2B \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (7)$$

图 2 是 FSPM 的相位分布图,该相位板由正弦区域和平坦区域所组成,颜色由蓝色变化为红色表示相位板的厚度不断增加。 $h$  表示相位板的相位起伏高度, $l$  表示相位板正弦区域大小, $B-2l$  表示平顶区域宽度, $\pi-2B$  表示相位为零的平坦区域的大小。从图 2(b)中可以看出,在  $0 < \theta < 2\pi$  范围内函数  $G(\theta)$  是一个双周期函数,这种相位板具有角向的双周期结构,每个周期中都包含两个平顶的半正弦区域和一个平坦区域。

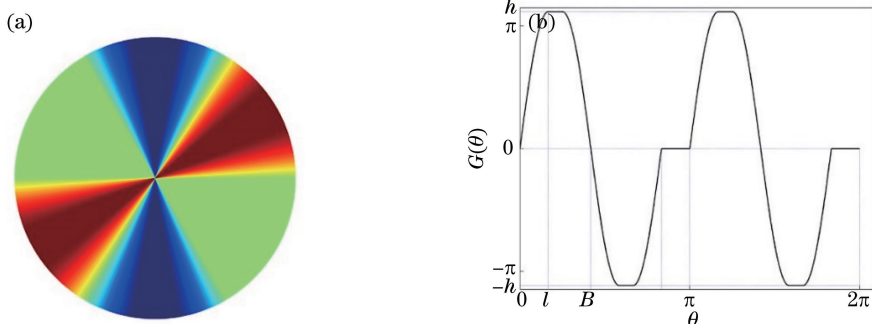


图 2 (a) FSPM 的表面结构图;(b)中心波长为  $\lambda_0$  时的相位角向分布

Fig. 2 (a) Surface profile of the FSPM; (b) distribution of phase angle when central wavelength is  $\lambda_0$

实验中可以利用晶体的双折射效应等方法获得符合要求的相位板<sup>[19-20]</sup>。为了使该相位板的结构满足(6)式,需要找到符合条件的 $l$ 、 $B$ 和 $h$ 的值。把(4)式和(7)式代入到(6)式中,即可获得 $l$ 、 $B$ 和 $h$ 的关系式为

$$\begin{cases} l = -\frac{\pi}{4} \times \frac{\sin h}{\sin h \times [J_0(h) - 1] + J_1(h) \times (1 - \cos h)} \\ B = -\frac{\pi}{2} \times \frac{\sin h - J_1(h)}{\sin h \times [J_0(h) - 1] + J_1(h) \times (1 - \cos h)} \end{cases} \quad (8)$$

为了确保在图2(b)中的任意周期都包含两个平顶的半正弦区和一个宽的平坦区, $l$ 、 $B$ 和 $h$ 还需要满足条件: $l \geq 0$ ,  $2l \leq B \leq \pi/2$ 和 $h > 0$ 。将(8)式代入上述条件,得到 $h$ 的有效取值范围为: $\pi \leq h \leq 3.8317$ 。对于 $h$ 取值范围的两端,可以把这个相位板分别退化为 $l=0$ ,  $h=\pi$ 时的SLPM和 $B=2l=1.1198$ ,  $h=3.8317$ 时的SPM。因此就可以把FSPM看成是SLPM和SPM的推广形式。

### 3 分析与讨论

为了分析FSPM的性能,选取了4个特殊的 $B$ 值( $\pi/4$ ,  $7\pi/24$ ,  $\pi/3$ 和1.1198),通过(8)式得到与 $B$ 值相对应的4个 $h$ 值( $\pi$ , 3.3040, 3.5627和3.8317)。利用傅里叶变换的方法计算在李奥光阑前中心波长为 $\lambda_0$ 的入射光的强度分布。归一化的光强分布如图3所示,用颜色来表示恒星光的光强,中心圆孔的半径为1。这4个图分别对应恒星光经不同 $B$ 值的FSPM调制后在李奥光阑前的光强分布:图3(a)代表 $B=\pi/4$ 时的光强分布;图3(b)代表 $B=7\pi/24$ 时的光强分布;图3(c)表示 $B=\pi/3$ 时的光强分布;图3(d)表示 $B=1.1198$ 时的光强分布。图3(a)也是SLPM的光强分布图,图3(d)也是SPM的光强分布图。由于李奥光阑的直径通常都小于孔径光阑,所以绝大部分恒星光都将被李奥光阑所阻挡而不能进入后面的探测器。

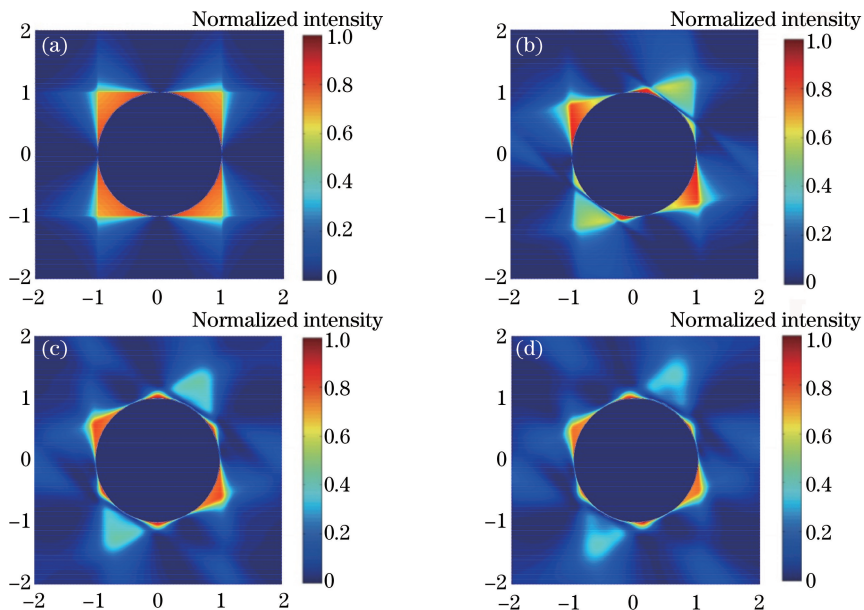


图3 恒星光经不同FSPM调整后在李奥光阑前的归一化光强分布。

(a)  $B=\pi/4$ 时的FSPM; (b)  $B=7\pi/24$ 时的FSPM; (c)  $B=\pi/3$ 时的FSPM; (d)  $B=1.1198$ 时的FSPM

Fig. 3 Normalized intensity distribution at the LS plane after being modulated by different FSPM.

(a) FSPM with  $B=\pi/4$ ; (b) FSPM with  $B=7\pi/24$ ; (c) FSPM with  $B=\pi/3$ ; (d) FSPM with  $B=1.1198$

消色差能力是描述星冕仪性能的一个重要参数,它表示的是星冕仪宽带工作的能力。这个性能可以用关于波长的表达式 $|C_0(\lambda)|^2$ 来表示。从(4)、(6)、(7)式可以推导出FSPM的 $|C_0(\lambda)|^2$ 表达式为

$$|C_0(\lambda)|_{\text{FSPM}}^2 = \left[ \frac{4l}{\pi} J_0\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} h\right) + \frac{2B - 4l}{\pi} \cos\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} h\right) + \frac{\pi - 2B}{\pi} \right]^2 \quad (9)$$

当 $B=1.1198$ ,  $h=3.8317$ 时,FSPM的 $|C_0(\lambda)|^2$ 表达式可以退化为SPM的 $|C_0(\lambda)|^2$ 表达式为

$$|C_0(\lambda)|_{\text{SPM}}^2 = \left[ \frac{4l}{\pi} J_0\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} h\right) + \frac{\pi - 2B}{\pi} \right]^2. \quad (10)$$

当  $B = \pi/4, h = \pi$  时, FSPM 的  $|C_0(\lambda)|^2$  表达式可以退化为 SLPM 的  $|C_0(\lambda)|^2$  表达式为

$$|C_0(\lambda)|_{\text{SLPM}}^2 = \left[ \cos^2\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda}\pi\right) \right]^2. \quad (11)$$

图 4 表示的是不同相位板的  $|C_0(\lambda)|^2$  值关于波长  $\lambda$  的曲线。这里选取的中心波长为 550 nm。图 4 中的插图是 FSPM 的  $|C_0(\lambda)|^2$  在 490~510 nm 的放大图。从图 4 中可以看出, 在中心波长处星冕仪的消光能力最强。由内插图可知, 在同一波长下 FSPM 的  $|C_0(\lambda)|^2$  值介于 SPM 和 SLPM 的值之间。当工作波长在 490~620 nm 时, FSPM 对恒星光的消光能力能达到  $10^{-3}$ , 而达到同等强度的消光效果, 四分板相位星冕仪(FQPM)的工作波长范围是 539~561 nm。所以 FSPM 比 FQPM 拥有更优秀的消色差性能, 更宽的工作带宽。由于  $|C_0(\lambda)|^2$  的值是关于  $\lambda_0/\lambda$  的函数, 所以当 FSPM 的中心波长更长时, 其消色差能力将更好。

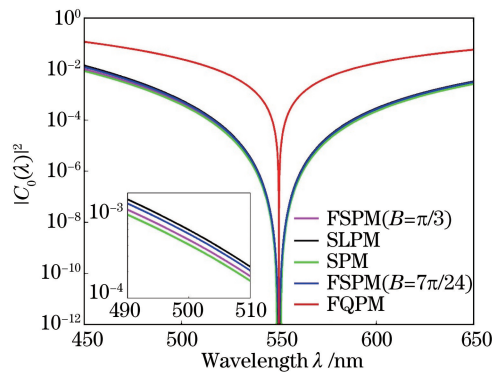


图 4 中心波长为 550 nm 时, 不同相位板的  $|C_0(\lambda)|^2$  值的对比图

Fig. 4 Comparison of the value  $|C_0(\lambda)|^2$  of the different phase masks with center wavelength of 550 nm

## 4 结 论

提出了一种新型的消色差星冕仪——平顶正弦相位板星冕仪, 该星冕仪为正弦相位板星冕仪和六平台相位板星冕仪的推广形式。平顶正弦相位板是双周期结构且相位分布满足宽带工作条件。通过理论分析和数值模拟, 得到了 FSPM 的消色差解析表达式, 并发现它具有很好的消色差能力。这个特性使它只用一块相位板就具有宽带工作能力。该研究工作对理解宽带相位板星冕仪有重要的理论意义。这种新型相位板也将对系外行星的探测有所帮助。

## 参 考 文 献

- [1] Serabyn E, Mawet D, Burruss R. An image of an exoplanet separated by two diffraction beamwidths from a star[J]. Nature, 2010, 464(7291): 1018-1020.
- [2] Rajan A, Barman T, Soummer R, *et al.* Characterizing the atmospheres of the HR8799 planets with HST/WFC3[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2015, 809(2): L33.
- [3] Jenkins C. Optical vortex coronagraphs on ground-based telescopes[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2008, 384(2): 515-524.
- [4] Baudoz P, Rabbia Y. Achromatic interfero coronagraphy-I. Theoretical capabilities for ground-based observations[J]. Astronomy and Astrophysics Supplement, 1999, 141(2): 319-329.
- [5] Baba N, Murakami N, Ishigaki T, *et al.* Polarization interferometric stellar coronagraph[J]. Optics Letters, 2002, 27(16): 1373-1375.
- [6] Carlotti A, Ricort G, Aime C. Phase mask coronagraphy using a Mach-Zehnder interferometer[J]. Astronomy & Astrophysics, 2009, 504(2): 663-671.
- [7] Guyon O. Phase-induced amplitude apodization of telescope pupils for extrasolar terrestrial planet imaging[J].



- Astronomy & Astrophysics, 2003, 404(1): 379-387.
- [8] N'diaye M, Dohlen K, Cuevas S, *et al.* Improved achromatization of phase mask coronagraphs using colored apodization[J]. Astronomy & Astrophysics, 2011, 538(1): 852-861.
- [9] Carlotti A. Apodized phase mask coronagraphs for arbitrary apertures[J]. Astronomy & Astrophysics, 2013, 551(2): 95-104.
- [10] Foo G, Palacios D M, Swartzlander G A. Optical vortex coronagraph[J]. Optics Letters, 2005, 30(30): 3308-3310.
- [11] Murakami N, Nishikawa J, Yokochi K, *et al.* Achromatic eight-octant phase-mask coronagraph using photonic crystal [J]. The Astrophysical Journal, 2010, 714(1): 772.
- [12] Rouan D, Riaud P, Boccaletti A, *et al.* The four-quadrant phase-mask coronagraph. I. Principle[J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 2000, 112(777): 1479-1486.
- [13] Mawet D, Riaud P, Absil O, *et al.* Annular groove phase mask coronagraph[J]. The Astrophysical Journal, 2005, 633(2): 1191.
- [14] Cao Z, Cao Q, Ge Y, *et al.* Trapezoidal phase mask coronagraph[J]. Chin Opt Lett, 2015, 13(3): 031101.
- [15] Galicher R, Baudoz P, Baudrand J. Multi-stage four-quadrant phase mask: achromatic coronagraph for space-based and ground-based telescopes[J]. Astronomy & Astrophysics, 2011, 530(1): 393-396.
- [16] Ma O, Cao Q, Hou F. Wide-band coronagraph with sinusoidal phase in the angular direction [J]. Optics Express, 2012, 20(10): 10933-10943.
- [17] Hou F, Cao Q, Zhu M, *et al.* Wide-band six-region phase mask coronagraph[J]. Optics Express, 2014, 22(2): 1884-1895.
- [18] Hu Rongfei, Cao Qing, Ge Yajun, *et al.* Error analysis of the wide-band six-level phase mask stellar coronagraph[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53(7): 071102.  
胡荣飞, 曹清, 葛亚骏, 等. 宽带六平台相位板星冕仪的误差分析 [J]. 激光与光电子学进展, 2016, 53(7): 071102.
- [19] Shi Jianzhen, Xu Shuwu, Ji Xianming, *et al.* Generation of the tunable rectangular hollow beams by using wave plates [J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(9): 0926001.  
施建珍, 徐淑武, 纪宪明, 等. 用波晶片产生可调矩形空心光束 [J]. 光学学报, 2015, 35(9): 0926001.
- [20] Chen Guojun, Zhou Qiaoqiao, Ji Xianming, *et al.* Study on high numerical-aperture-focused characteristics of vector beam produced by phase plate[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(12): 1226001.  
陈国钧, 周巧巧, 纪宪明, 等.  $\pi$  相位板产生矢量光束的高数值孔径聚焦特性研究 [J]. 光学学报, 2014, 34(12): 1226001.