

# 基于贝叶斯推理的激光光斑漂移特性

朱东济<sup>1</sup>, 蔡红维<sup>1</sup>, 高 蓉<sup>2</sup>

<sup>1</sup>西昌卫星发射中心, 四川 西昌 615000;

<sup>2</sup>中航工业西安航空发动机(集团)有限公司, 陕西 西安 710021

**摘要** 针对激光光斑漂移受多种干扰因素影响, 测量准确性难以估计的问题, 提出了基于贝叶斯推理的光斑漂移特性分析方法。在对贝叶斯定理进行严格推导、激光基模光斑特性进行分析、测量噪声对理想光斑漂移影响分析的基础上, 构建了完善的基于贝叶斯推理的光斑漂移特性数学模型, 对相关参数进行了严格的推导。仿真结果和理论分析符合较好, 该方法可用于评估环境(热效应、环境振动和空气扰动)因素对激光漂移的影响程度。

**关键词** 激光光学; 贝叶斯定理; 光斑漂移; 基模; 正态分布

**中图分类号** TN241 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP54.041411

## Laser Spot Drift Characteristics Based on Bayesian Inference

Zhu Dongji<sup>1</sup>, Cai Hongwei<sup>1</sup>, Gao Rong<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Xichang Satellite Launch Centre, Xichang, Sichuan 615000, China;

<sup>2</sup>AVIC Xi'an Aero-Engine (Group) LTD, Xi'an, Shaanxi 710021, China

**Abstract** Aiming at the problems that the laser spot drift is affected by many kinds of interference factors, and the measurement accuracy is difficult to estimate, the method of spot drift characteristic analysis based on Bayesian inference is put forward. On the basis of strict Bayes theorem deduction, the analysis of laser fundamental mode characteristics and the influence of measurement noise on ideal spot drift, the thorough mathematical model of the spot drift characteristics based on Bayesian inference is constructed and the parameters are determined strictly. The simulation results and the theoretical analysis are in good agreement. The method can be used to evaluate the influence of the environment, such as thermal effect, environmental vibration and air disturbance, on the laser drift.

**Key words** laser optics; Bayes theorem; spot drift; fundamental mode; normal distribution

**OCIS codes** 140.0140; 010.1330; 010.7060

## 1 引言

当激光束在大气中传输时, 大尺度湍流涡旋会使其偏离原本的方向, 在远处接收平面上, 将会出现光斑随机抖动, 此现象称之为光束漂移<sup>[1-3]</sup>。光束漂移现象增加了实时捕捉激光信号的难度, 严重时会导致传输中断, 进而对激光测距、光学跟踪以及激光通信产生严重影响<sup>[4-7]</sup>。即使在近距离传输时, 由于激光器受其本身的热效应、环境振动和空气扰动<sup>[8]</sup>等因素的影响, 发射的激光束在传播过程中也会产生一定的漂移, 限制了激光器准直精度, 影响实际应用。

贝叶斯方法是一个充分发展的概率与统计理论, 通常用来对目标跟踪中的诸多问题进行建模和求解。它在统计与工程领域有着非常广泛的应用, 工程技术人员很久以来一直使用这一方法来解决各种不同的问题。

本文对贝叶斯方法进行了严格的推导, 结合激光光斑的模式分析, 讨论了该方法在激光光斑漂移过程中应用的可能与条件, 研究了光斑漂移的特点和规律, 从理论和实验层面系统地对光斑的漂移特性进行了系统分析和仿真实验, 得到了良好的预期效果。

**收稿日期:** 2016-09-12; **收到修改稿日期:** 2016-11-18

**作者简介:** 朱东济(1978—), 男, 硕士, 工程师, 主要从事光学系统方面的工作。E-mail: 11899944@qq.com

## 2 贝叶斯定理及应用分析

### 2.1 贝叶斯定理

贝叶斯定理是利用概率论中的条件概率一致地调和过去与当前信息的理论框架。对于两个相关事件  $x$  和  $y$ , 给定事件  $y$  的观测, 事件  $x$  的条件概率为

$$p(x | y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}. \quad (1)$$

(1)式由事件  $y$  的无条件概率  $p(y)$  归一化为事件  $x$  和  $y$  的联合概率  $p(x, y)$ 。(1)式使用两次, 贝叶斯定理可重写为

$$p(x | y) = \frac{p(y | x)p(x)}{p(y)}. \quad (2)$$

目标跟踪中的许多问题, 如目标个数及其状态, 均可由事件  $x$  建模, 而各种类型的传感器的输出, 如雷达回波或者红外图像可建模为事件  $y$ 。贝叶斯定理(2)式则可以用来获得条件概率  $p(x | y)$ , 作为目标跟踪问题的概率性的解。

### 2.2 贝叶斯定理应用分析

以  $x$  表示光斑漂移量,  $y$  表示与  $x$  相关的观测量, 即  $x$  为预测值,  $y$  为测量值。给定关于  $y$  的知识, 只需更新现有的关于  $x$  的知识。由于光斑漂移  $x$  是一个随机变量, 需用概率的方法处理不确定性问题, 因此以概率密度函数  $p(x)$  的形式表示关于  $x$  的知识。据前所述, 可以写出下式:  $p(x | y) \propto p(y | x)p(x)$ ,  $p(x | y)$  正比于  $p(y | x)$  和  $p(x)$  的乘积。

(2)式中  $p(x | y)$  表示给定  $y$  时  $x$  的条件分布。将  $x$  看作有一定取值范围的随机变量, 则对于固定的  $y$ , 通过  $p(y | x)$ ,  $p(x)$  被变换成  $p(x | y)$ 。一旦  $y$  已知,  $p(y)$  的影响可以忽略, 因为对于所有的  $x$  来说,  $p(y)$  取值均一样, 称为归一化常量或因子, 其作用是确保  $p(x | y)$  对  $x$  求和或积分的结果等于 1。正是这一理论上合理的对任意可能  $x$  的概率  $p(x)$  的变换, 使得可以用  $p(x | y)$  代替  $p(x)$  对  $x$  进行概率描述, 即用  $p(y | x)$  对原始的概率分布进行加权。这一看似简单的操作, 实际上是许多动力学过程中参数估计复杂算法的核心<sup>[9]</sup>。

## 3 光斑漂移的理论分析

考虑光斑在  $x$  方向上的漂移是单目标问题, 其漂移状态可由一维向量  $x$  描述, 当前时刻关于  $x$  的知识包含在如下概率密度函数之中:

$$p(x) = \frac{1}{\Sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\Sigma_0^2}\right], \quad (3)$$

即认为  $x$  在  $x_0$  附近, 估计误差的性质由  $\Sigma_0$  描述。激光波束传播方向横截面上, 漂移状态在没有激光本身热效应、环境震动和空气扰动等因素影响下, 在二维平面上各向同性, 且随着偏离中心的距离增大, 漂移的概率减小, 应服从正态分布(高斯分布)  $p(x) = N(x; x_0; \Sigma_0^2)$  这一普遍规律。  $\Sigma_0$  越大, 说明掌握的关于  $x$  的知识确定性越差。假设  $y$  为某传感器关于  $x$  的一个观测, 传感器观测通常带有噪声, 可将其描述为

$$y = x + w, p(w) = N(w; 0, \Sigma^2). \quad (4)$$

观测噪声  $w$  的统计模型为零均值方差为  $\Sigma^2$  的高斯分布<sup>[9]</sup>。由高斯分布的基本性质<sup>[10]</sup>, 可得似然函数  $L(x) = p(y | x)$  为

$$p(y | x) = \frac{1}{\Sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - x)^2}{2\Sigma^2}\right]. \quad (5)$$

依据贝叶斯定理, 很容易求得后验分布为

$$p(x | y) = N(x; \hat{x}, \hat{\Sigma}^2), \quad (6)$$

$$\hat{x} = \left(\frac{x_0}{\Sigma_0^2} + \frac{y}{\Sigma^2}\right) \left(\frac{1}{\Sigma_0^2} + \frac{1}{\Sigma^2}\right)^{-1}, \quad (7)$$

$$\hat{\Sigma}^2 = \left(\frac{1}{\Sigma_0^2} + \frac{1}{\Sigma^2}\right)^{-1}. \quad (8)$$

## 4 光斑漂移特性的贝叶斯推理分析

激光器光学谐振腔内电磁场可能存在的本征态称为激光的模式,不同的模对应于不同的场分布和共振频率。为保证良好的方向性、单色性和相干性优点,理想激光器的输出光束应只有一个模式,激光准直、激光加工、非线性光学研究、激光中远程测距等应用均需基横模激光束<sup>[11-12]</sup>。基模高斯模型是在亥姆霍兹方程的基础上,利用缓变近似得到的一个特解<sup>[11]</sup>,其高斯光束光强分布为

$$I = \frac{A}{\omega^2(z)} \times \exp\left[-\frac{2x^2}{\omega^2(z)}\right] \times \exp\left[-\frac{2y^2}{\omega^2(z)}\right]. \quad (9)$$

远场发散角  $\theta_0$  为

$$\theta_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2\omega(z)}{z} = 2 \frac{\lambda}{\pi\omega_0} = 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = 1.128 \sqrt{\frac{\lambda}{z_0}}, \quad (10)$$

式中  $\omega(z)$  为光斑半径、 $z_0$  为瑞利尺寸或共焦参数、 $\omega_0$  束腰半径、 $z$  为光束传播距离、 $\lambda$  为波长。

### 4.1 贝叶斯推理的漂移假设

由(9)式可以看出,漂移指的就是基模高斯光束在垂直传播方向上的光斑中心在截面  $x$ 、 $y$  方向上的偏离,在光束传播一段距离之后,光斑整体的抖动导致重心分布不在中心点上。(9)式表明,光强在二维平面上的分布服从高斯分布,在  $x$ 、 $y$  两个方向上可以分离、互相独立,说明在  $x$ 、 $y$  方向上的漂移特性是相同的。在理想情况下,光强的重心即是中心,但由于激光器本身的热效应、环境振动及大气湍流等因素影响,光强重心不在中心点上,而是在其周围随机分布,服从特定的概率分布。结合实际情况,根据(10)式可知,漂移的最大范围不应超过激光发散角限制的距离,即  $y \leq (\theta_0 z)/2$ 。

在实际问题中,正态分布(高斯分布)的形式是十分广泛的,许多分析方法与分析结果都是在正态分布的前提下建立与获得的<sup>[13]</sup>,光斑漂移的概率密度函数服从(3)式的正态分布,通常称为先验分布。用来观察测量的传感器噪声通常也服从正态分布,由(4)式确定。在作上述假设后,光斑漂移的似然函数和后验分布分别由(5)~(6)式确定。

### 4.2 参数的分析与确定

由(1)式可以看出, $x_0$  即为垂直激光传播方向上的截面内  $x$  方向上的光斑中心, $x$  为光斑漂移变量; $\Sigma_0$  为光斑漂移的均方根误差,只和传播的距离有关,随着传播距离的增大,漂移的不确定性变差,在激光传播方向上的某处位置确定之后, $\Sigma_0$  随之确定。 $y$  为光斑漂移的测量数据,每次的测量数据相互独立、互不影响。在一次的观察测量中,时间较短的情况下,可以认为大气均方根误差是恒定的,这样  $\Sigma$  也是确定的;激光器本身的参数是确定的,例如波长  $\lambda$ 、发散角  $\theta_0$  等,观察测量的位置  $z$  也是确定的。

### 4.3 测量噪声误差引起的估计误差变化

从图1可以看出,随着漂移测量误差的增大,后验分布的误差也在增大,表明测量的准确性在降低;在光斑漂移概率本身的不确定性增大的情况下,后验分布的误差也在增大,测量的准确性也在降低。图1表明,光斑漂移本身的分布函数(即不同的  $\Sigma_0$ )对测量的结果也能产生一定的影响,即在距激光器传输距离较近时,漂移由本身的热变形、环境振动引起,在传播较远距离后,主要受大尺度湍流涡旋的影响,但不影响整体

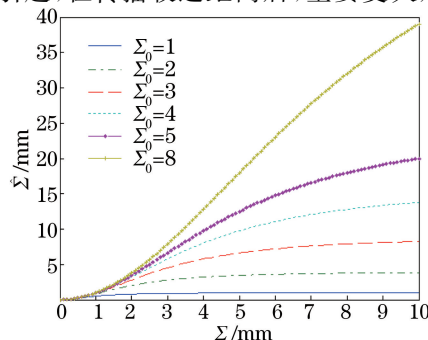


图1 漂移估计误差随噪声的变化曲线

Fig. 1 Variation curves of drift estimation error with noise

趋势。在确定的光束传播距离处测量漂移量时  $\Sigma_0$  不变化,即认为激光器本身的热效应、环境振动及大气湍流等因素在确定距离上影响是缓慢的。

#### 4.4 测量噪声误差引起的估计值变化

为方便问题的数学处理,可设定  $x_0=0, \Sigma_0=1$ ,即认为光斑漂移相对于中心点为 0,均方根误差为 1 的漂移,不影响结果的处理和分析。从图 2 上的每条曲线可以看出,随着噪声干扰的增大,光斑漂移的测量值迅速偏离预测估计值,表示光斑漂移的测量值与预期结果越来越不相符,应及时调整测量设备重新测量;从图 2 上的不同曲线可以看出,随着漂移测量值的增大,其本身也迅速偏离估计值,这时应降低测量次数、减少测量值的观测数据,避免影响结果处理的准确性。

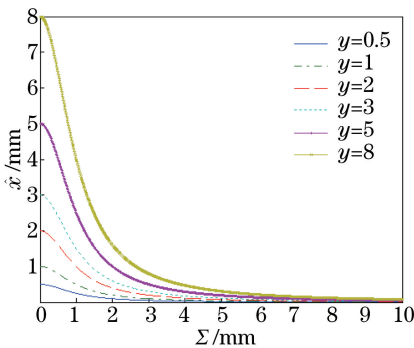


图 2 漂移估计值随噪声的变化曲线

Fig. 2 Change curves of drift estimation value with noise

#### 4.5 概率分布函数变化趋势分析

图 3 说明了不同光斑测量值所对应不同的似然函数,如何影响由先验分布产生后验分布的过程,参数设定见表 1,如图 3(a)中,  $y=0.5$  导致估计  $\hat{x}=0.4$ ,对应后验方差  $\hat{\Sigma}^2=0.2$ 。

随着  $y$  值不断变大,似然函数漂移到右边,后验分布也随之拖动。表 1 和图 3 表明,在相同噪声干扰测量的情况下,不同位置处的光斑漂移测量值偏移真实值的结果,光斑漂移测量值越大,后验分布与似然分布的间距越大,漂移向着实验不希望的方向发展,图 3 和图 2、图 1 从不同侧面反映了一致的结果。

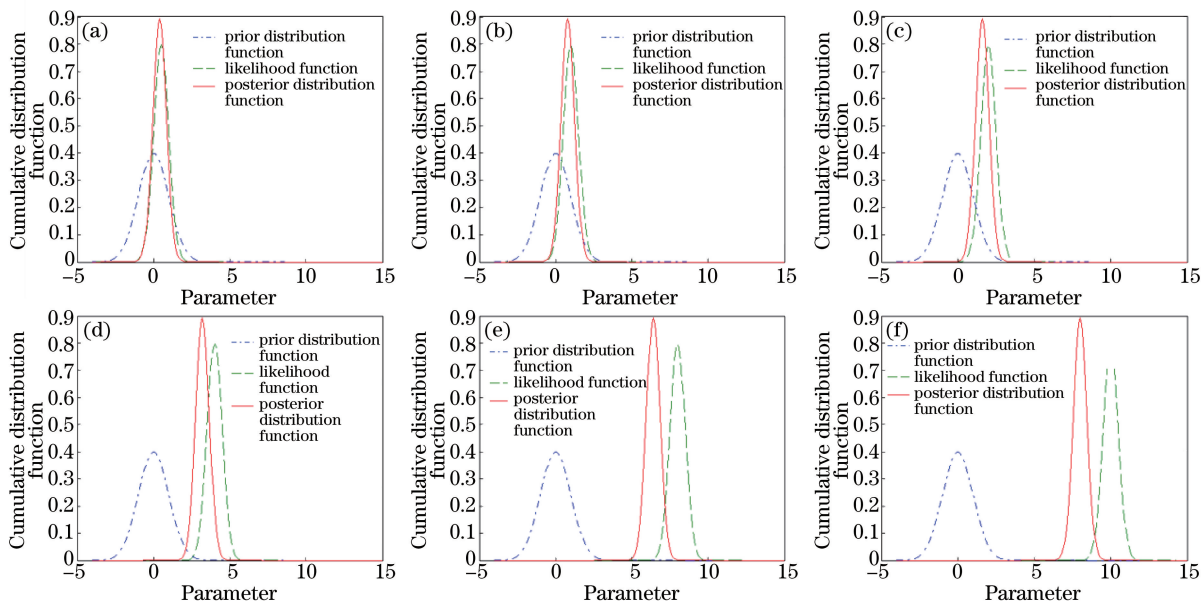


图 3 先验分布  $p(x)$ 、似然函数  $L(x)=p(y|x)$  及后验分布  $p(x|y)$ 。

(a)  $y=0.5$ ; (b)  $y=1$ ; (c)  $y=2$ ; (d)  $y=4$ ; (e)  $y=8$ ; (f)  $y=10$

Fig. 3 Prior distribution function  $p(x)$ , likelihood function  $L(x)=p(y|x)$  and posterior distribution function  $p(x|y)$ .

(a)  $y=0.5$ ; (b)  $y=1$ ; (c)  $y=2$ ; (d)  $y=4$ ; (e)  $y=8$ ; (f)  $y=10$

表1 不同观测值  $y$  对应  $x$  的估计和方差Table 1 Estimation and variance of different observed values  $y$  corresponding to  $x$ 

Estimate of different data	$y=0.5$	$y=1$	$y=2$	$y=4$	$y=8$	$y=10$
$\hat{x}$	0.4	0.8	1.6	3.2	6.4	8
$\hat{\Sigma}^2$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

## 5 结 论

本文推导了贝叶斯定理,分析了基模激光漂移的特点和规律;探讨了贝叶斯方法在激光漂移测量过程中的应用。利用该方法能够确定实验环境等因素(热效应、环境振动和空气扰动)对漂移量的影响程度,建立起实验、模型及理论之间的数学模型;利用漂移测量数据可对后续漂移量进行预测评估。仿真结果符合常理性分析结果,从而验证了该方法的正确性。该方法适用激光测距、激光通信相关领域,用于评估环境等(热效应、环境振动和空气扰动)因素对激光漂移的影响。

## 参 考 文 献

- [1] Andrews L C, Phillips R L. Laser beam propagation through random media[M]. Bellingham: SPIE Press, 2005: 201-205.
- [2] Yi Xiang. Research on irradiance scintillation and mitigation technology in atmospheric laser communication[D]. Xi'an: Xidian University, 2013.  
易 湘. 大气激光通信中光强闪烁及其抑制技术的研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2013.
- [3] Sandalidis H G. Performance of a laser earth-to-satellite link over turbulence and beam wander using irradiance distribution[J]. Appl Optics, 2011, 50(6): 956-961.
- [4] Wang Hongxing, Wu Xiaojun, Song Bo. Experimental study on beam wander of collimated beam in atmospheric turbulence under sea surface environment[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(11): 1101005.  
王红星, 吴晓军, 宋 博. 近海面大气湍流中准直光束漂移特征的实验研究[J]. 光学学报, 2015, 35(11): 1101005.
- [5] Dios F, Rubio J A, Rodríguez A, *et al.* Scintillation and beam-wander analysis in an optical ground station-satellite uplink[J]. Appl Optics, 2004, 43(19): 3866-3873.
- [6] Ma J, Jiang Y, Tan L, *et al.* Influence of beam wander on bit-error rate in a ground-to-satellite laser uplink communication system[J]. Opt Lett, 2008, 33(22): 2611-2613.
- [7] Han Liqiang, You Yahui. Performance of free space optical communication with combined effects from atmospheric turbulence and point errors[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(11): 1106005.  
韩立强, 游雅晖. 大气湍流及瞄准误差联合效应下自由空间光通信的性能[J]. 光学学报, 2014, 34(11): 1106005.
- [8] Wang Chunyang, Li Jinshi. Detection of laser spot drift[J]. Journal of Applied Optics, 2007, 28(2): 205-208.  
王春阳, 李金石. 激光光斑漂移的检测[J]. 应用光学, 2007, 28(2): 205-208.
- [9] Challa S, Morelande M R, Evans R J, *et al.* Fundamentals of object tracking[M]. Zhou G J, translate. Beijing: National Defence Industry Press, 2015: 6-8.  
卡 拉, 莫兰德, 缪斯可, 等. 目标跟踪基本原理[M]. 周共健, 译. 北京: 国防工业出版社, 2015: 6-8.
- [10] Hogg R V, Craig A T. Introduction to mathematical statistics[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1970.
- [11] 吕百达. 激光光学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 99-101.
- [12] 周炳琨, 高以智, 陈倜嵘, 等. 激光原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007: 26.
- [13] 丁振良. 误差理论与数据处理[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2015: 27-28.