

# 基于 Plateau-Rayleigh 不稳定性探讨水柱与激光光环的依赖关系

宫 啸<sup>1</sup>, 朱亚彬<sup>1</sup>, 谢佳宇<sup>1</sup>, 马 重<sup>2</sup>, 彭继迎<sup>1</sup>

<sup>1</sup>北京交通大学理学院, 北京 100044;

<sup>2</sup>北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044

**摘要** 在低流速条件下,当自由下落的水流落在刚性平面上时,如果水柱与平面的接触点被激光照亮,可以观察到若干环绕在水柱上的光环。实验证明,接触点附近的稳定波纹结构是形成水柱光环的必要条件。根据伯努利方程和由 Plateau-Rayleigh 不稳定性理论得到的扰动波传播的色散关系,建立波纹稳定方程,进而通过实验探究环绕水柱的光环的性质。理论和实验结果表明,光环的疏密、亮度和数量与水柱的下落高度和初始流速、刚性平面种类以及俯视角度的直接关系。光环随着水柱的下落高度和初始流速的增大而变得密集。激光在刚性平面损失的能量越少,则光环越亮。存在一个观察光环的合适俯视角度的区间,俯视角度的越大,观察到的光环越多,因此观察光环时要尽量俯视。

**关键词** 几何光学; 水柱光环; Plateau-Rayleigh 不稳定性; 波纹稳定方程

**中图分类号** O435 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP54.030801

## Relationship Between Water Jet and Laser Ring Based on Plateau-Rayleigh Instability

Gong Xiao<sup>1</sup>, Zhu Yabin<sup>1</sup>, Xie Jiayu<sup>1</sup>, Ma Zhong<sup>2</sup>, Peng Jiying<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

<sup>2</sup> School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China

**Abstract** When a water jet freely falls onto a rigid plane with a low flow rate, light rings around the water jet can be observed if the point that the water jet contacts with the plane is illuminated by a laser beam. It is proved experimentally that stable ripple structures surrounding the contact point are essential to form the light rings of water jet. The equation of corrugated stability can be established based on the Bernoulli's equation and the dispersion relationship of disturbance wave propagation derived by the Plateau-Rayleigh instability theory, and then experiments are designed to investigate the properties of the light rings of water jet. The theoretical and experimental results show that the spacing, brightness and quantity of the light rings are straightly related to the falling height and the initial flow velocity of the water jet, the variety of the rigid plane and the depression angle. The spacing between the light rings becomes smaller with the increasing falling height and initial flow velocity of the water jet. The less the energy loss of laser in a rigid plane is, the brighter the light rings are. There is a proper depression angle range to observe the light rings. It is concluded that the bigger the depression angle is, the more the observed light rings are. Consequently it is better to overlook the light rings for a satisfied observation effect.

**Key words** geometric optics; light rings of water jet; Plateau-Rayleigh instability; corrugated stability equation

**OCIS codes** 080.1510; 140.3560; 140.7300

**收稿日期:** 2016-10-03; **收到修改稿日期:** 2016-11-10

**基金项目:** 国家自然科学基金(61377029)

**作者简介:** 宫 啸(1996—),男,本科生,主要从事光纤通信和光学器件方面的研究。E-mail: 14275005@bjtu.edu.cn

**导师简介:** 朱亚彬(1971—),女,博士,副教授,硕士生导师,主要从事光电功能薄膜材料制备和物性方面的研究。

E-mail: ybzhu@bjtu.edu.cn(通信联系人)

## 1 引言

Plateau-Rayleigh 不稳定性(通常称为 Rayleigh 不稳定性)用来研究自由下落的连续液体流形成液滴的机理,是流体力学中的经典问题<sup>[1-4]</sup>。该理论于 1879 年由 Lord Rayleigh 提出<sup>[1]</sup>,1997 年德国 Eggers<sup>[4]</sup>报道了自由表面流体的破碎和非线性动力学的研究进展。随着微纳米加工技术和非线性科学的发展,液体与激光的相互作用受到重视<sup>[5-7]</sup>,Plateau-Rayleigh 不稳定性在微流控制液体、光纤微颗粒制造、材料合成等领域均有重要应用<sup>[8-10]</sup>。2008 年,梁忠诚等<sup>[6]</sup>报道了微流控光学及其应用进展,系统介绍了微流控自适应光学、微流控光学检测及激光等光学集成器件的研究成果。2009 年,Dendukuri 等<sup>[8]</sup>报道了用微流体组装聚合物微颗粒。2012 年,Kaufman 等<sup>[10]</sup>报道了利用光纤内液体的 Plateau-Rayleigh 不稳定性制备直径为  $20\sim 2\times 10^6$  nm 不同结构的微球。作为研究热点,2016 年国际青年物理学家竞赛(IYPT)中也有关于 Plateau-Rayleigh 不稳定性的题目,题目不仅要求研究自由下落的液体柱形成的波纹,而且要求研究接触面被激光照亮后环绕液柱的光环及整个系统相关参量的影响。

在研究光环性质与系统参量的依赖关系时发现,文献中关于水波纹的理论将韦伯数视为无穷大,这与实际情况偏差很大。因此,本文在建立水波纹稳定方程时进行了韦伯数的修正,并讨论了文献中没有考虑的液体与固体接触点上方水波纹的附加压强项,使理论模型更接近实际情况,从而可以更好地解释光环成因及其变化规律。

## 2 实验

实验装置如图 1 所示,用高度可调的支架固定水管,将功率可调潜水泵放置在水槽中抽水,形成水循环系统。采用玻璃管作为出水口,避免出水口的不规整对水柱形态造成影响。在水柱旁放置一竖直标尺以测量稳定波纹结构的波长。激光照在水柱与刚性平面的接触点,采用微距相机模拟人眼拍照,用 Matlab R2016a 进行图像处理,分析光环的亮度。刚性平面采用钢板时现象最明显。另外,分别用毛玻璃板、茶色玻璃板、黑色玻璃板和无色玻璃板作为刚性平面,研究光环亮度的变化情况。

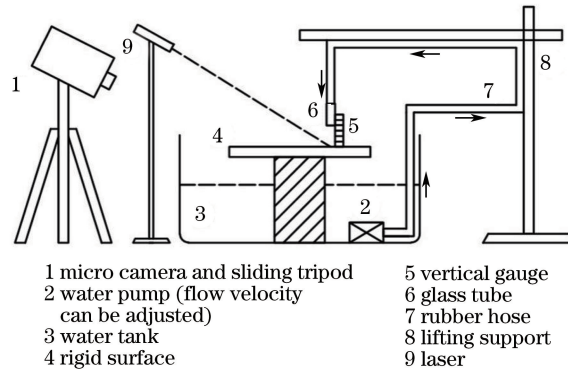


图 1 实验装置示意图

Fig. 1 Sketch of experiment setup

用刚性平面截住一低流速自由下落的细水柱,在下落高度为几厘米的区间内可以观察到水柱与刚性平面接触点上方存在若干稳定的波纹结构,类似驻波<sup>[11-14]</sup>。水柱与刚性平面接触的瞬間,流速迅速减小,表面积迅速增大,但液体表面张力的作用倾向于减小液体表面积,重力与表面张力的平衡作用能够形成向上传播的扰动波,如图 2 所示。

当一束激光照在接触点上时,人眼俯视水柱可以观察到若干环绕在水柱表面的光环[图 3(a)];逐渐增大水柱流速至波纹结构消失,则光环也消失[图 3(b)]。由此判断这种稳定的波纹结构是形成光环的必要条件。

## 3 理论

### 3.1 建立水波纹稳定方程

对于一稳定下落的水柱,运用伯努利方程和附加压强的拉普拉斯公式可以得到水柱任意一点的流速方程为<sup>[15]</sup>

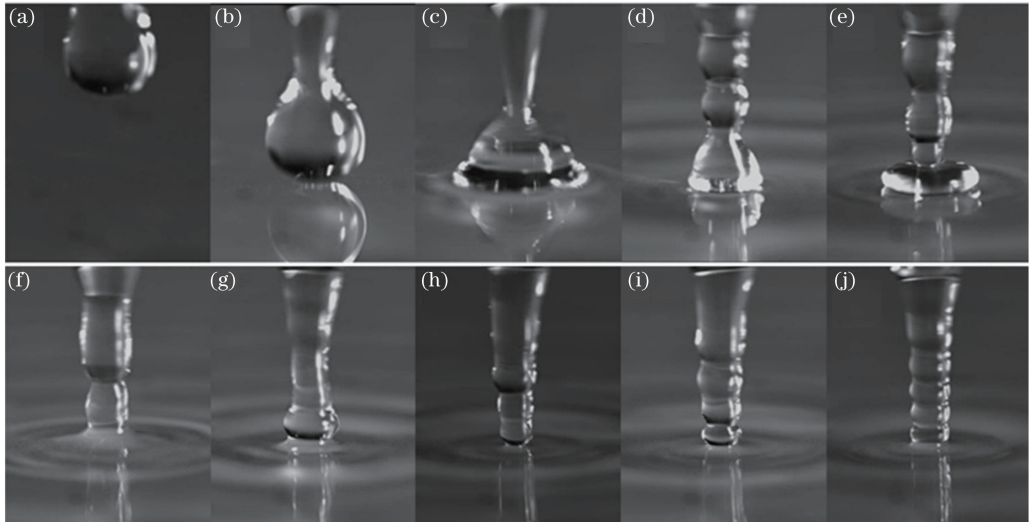


图2 高速摄像机拍摄的稳定波纹结构的形成过程

Fig. 2 Forming process of stable ripple structures recorded by a high-speed camera

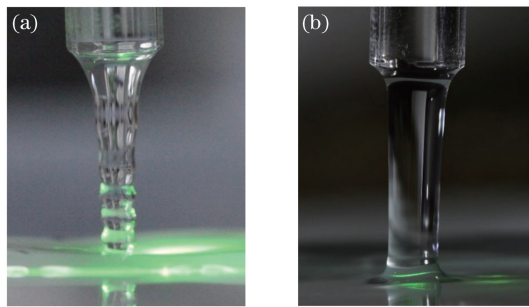


图3 (a)有波纹结构时存在光环;(b)无波纹结构时光环消失

Fig. 3 (a) Light rings exist when ripple structures exist; (b) light rings disappear when ripple structures disappear

$$\frac{U(z)}{U_0} = \left[ 1 + \frac{2}{Fr} \frac{z}{a} + \frac{2}{We} \left( 1 - \frac{a}{r} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

式中  $U(z)$  为下落高度为  $z$  时水柱的流速,  $U_0$  为初始流速,  $a$  为出水口半径,  $r$  为水柱与液面接触前的半径, 弗劳德数  $Fr$  和韦伯数  $We$  均为无量纲数,  $Fr = U_0^2/ga$ ,  $We = \rho U_0^2 a / \sigma$ , 其中  $\rho$  为水的密度,  $\sigma$  为表面张力系数,  $g$  为重力加速度。

根据流量相等

$$Q = 2\pi \int_0^r U(z) r(z) dr = \pi a^2 U_0 = \pi r^2 U(z), \quad (2)$$

可得水柱半径  $r$  与接触点距出水口高度  $h$  之间的关系为

$$\frac{r}{a} = \left[ \frac{U_0}{U(h)} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ 1 + \frac{2}{Fr} \frac{h}{a} + \frac{2}{We} \left( 1 - \frac{a}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{4}}. \quad (3)$$

根据 Plateau-Rayleigh 不稳定性, 将扰动波线性化得到扰动波传播的色散关系为<sup>[14-16]</sup>

$$\omega^2 = \frac{\sigma k^2}{\rho a} \frac{J_1(kr)}{J_0(kr)} \left( kr - \frac{1}{kr} \right), \quad (4)$$

式中  $\omega$  为扰动波圆频率,  $k$  为波数,  $J_1$  为 1 阶贝塞尔函数,  $J_0$  为 0 阶贝塞尔函数。向上传播的波速表达式为

$$V^2 = \frac{\sigma}{\rho a} \frac{J_1(kr)}{J_0(kr)} \left( kr - \frac{1}{kr} \right). \quad (5)$$

在实验室坐标系下, 若水流下落速度与扰动波向上传播波速相等, 则会出现稳定的波纹结构<sup>[13]</sup>, 将(4)、(5)式联立, 则有波纹稳定方程

$$U_0^2 + 2gh + \frac{2\sigma}{\rho a} \left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{\sigma}{\rho a} \frac{J_1(kr)}{J_0(kr)} \left(kr - \frac{1}{kr}\right), \quad (6)$$

式中

$$\frac{r}{a} = \left[1 + \frac{2gh}{U_0^2} + \frac{2\sigma}{\rho a U_0^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)\right]^{-\frac{1}{4}}. \quad (7)$$

### 3.2 光环成因分析

照到接触点后的激光在水柱中经平面反射后,大部分仍为平行光,则在光离开水柱的波纹界面上遵循折射定律

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (8)$$

式中  $n_1$  和  $n_2$  分别为水和空气的折射率,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为入射角和折射角。水的折射率约为 1.33, 空气的折射率为 1, 折射角大于入射角。当入射角大于  $48.7^\circ$  时, 发生全反射, 理论上无折射光。水柱内部从接触点向上反射的光, 再入射到波纹凹处下部时, 入射角变小, 光折射出去, 形成光环; 若再入射到波纹凸起下部时, 则入射角增大, 发生全反射。人眼若俯视水柱, 则会看到波纹凹处的下部被照亮, 如图 4、5 所示。

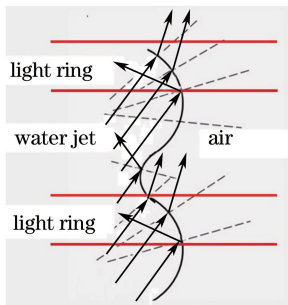


图 4 光环形成时光路截面示意图

Fig. 4 Sectional schematic of light path when light rings are forming



图 5 波纹结构处光环放大图

Fig. 5 Enlarged view of light rings in ripple structures

实际上, 接触点反射不是纯镜面反射, 实验中获取最清晰的光环现象是用钢板作为刚性平面, 因其底部大部分为漫反射光, 光环更加完整。二者的 COMSOL Multiphysics 5.1 模拟效果分别如图 6、7 所示, 可以明显看出, 接触点部分漫反射情况下光环更完整。

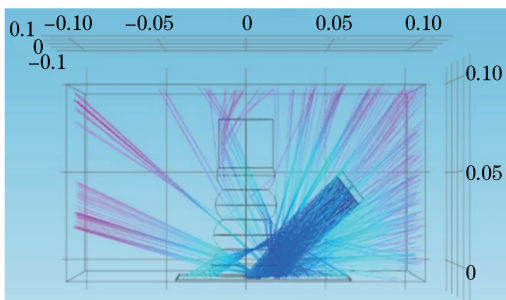


图 6 接触点纯镜面反射时的光环模拟图

Fig. 6 Simulation picture of light rings when pure specular reflection occurs at contact point

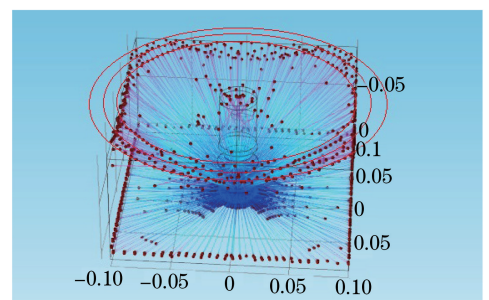


图 7 接触点部分漫反射时的光环模拟图

Fig. 7 Simulation picture of light rings when diffuse reflection occurs at contact point

## 4 讨 论

系统参量主要有接触点距出水口高度、水柱的初始流速、刚性平面种类和俯视观察的角度。光环的性质主要有疏密、亮度和个数。光环疏密由波纹波数  $k$  表征, 若波纹过密或过疏, 超出人眼分辨能力, 则光环也将消失。

通过控制变量法研究上述参量对光环性质的影响, 且实验统一在暗室环境下进行, 避免杂光对实验结果



造成影响。在求解波纹稳定方程数值解时,采用牛顿迭代法求近似解,并舍去不合理的解。

#### 4.1 系统参量对光环疏密的影响

保持其他参量不变,在初始条件为出水口流速  $U_0 = 0.054 \text{ m/s}$ 、出水口半径  $a = 2.70 \text{ mm}$  时,稳定波纹平均波数  $k$  的实验值与理论值随下落高度  $h$  的变化如图 8 所示,可以看到,光环随着下落高度的增大而变得密集,波数理论值比实际值大,存在误差,但二者趋势相符。

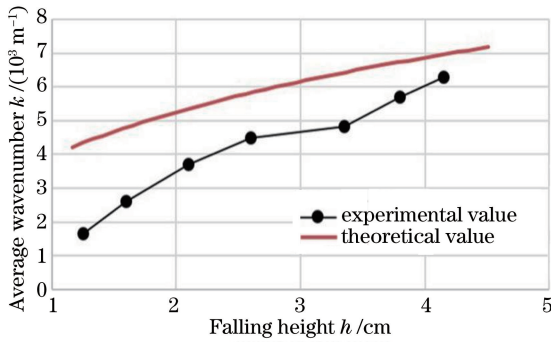


图 8 平均波数  $k$  与下落高度  $h$  的关系

Fig. 8 Relationship between average wavenumber  $k$  and falling height  $h$

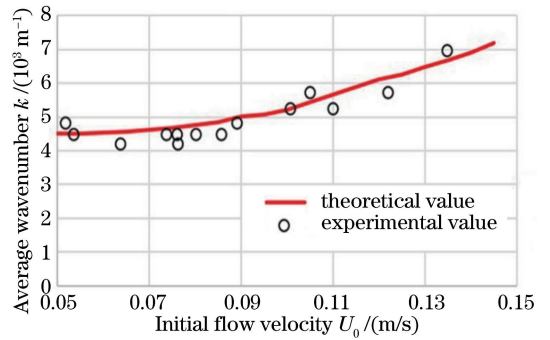


图 9 平均波数  $k$  与初始流速  $U_0$  的关系

Fig. 9 Relationship between average wavenumber  $k$  and initial flow velocity  $U_0$

初始条件为下落高度  $h = 0.0286 \text{ m}$ 、出水口半径  $a = 2.70 \text{ mm}$  时,控制变量法得到稳定波纹平均波数  $k$  的实验值与理论参考值随初始流速  $U_0$  的变化如图 9 所示,可以看到光环随着初始流速  $U_0$  的增大而变得密集。其中,理论值参考了文献[14]中的数据。

#### 4.2 系统参量对光环亮度的影响

实验保持初始条件为绿激光入射,下落高度  $h = 0.0286 \text{ m}$ ,出水口半径  $a = 2.70 \text{ mm}$ ,出水口流速  $U_0 = 0.076 \text{ m/s}$ ,俯拍角度为  $55^\circ$ ,改变若干种刚性平面,拍摄图像。图像经 Matlab 处理,根据得到的峰宽和连续性定性分析光环亮度,如图 10、11 所示,从光环亮度表(表 1)可知,刚性平面会影响光环的亮度,平面损失或折射的能量越少,则光环越亮,因此钢板作为刚性平面时光环最亮。

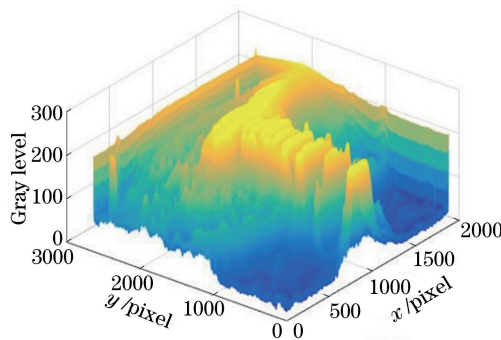


图 10 光环的三维灰度图

Fig. 10 Three-dimensional gray-scale graph of light rings

表 1 不同刚性平面的光环亮度表

Table 1 Light ring brightness for different types of rigid plane

Rigid plane type	Steel plate	Ground glass	Tawny glass	Black glass	Colorless glass
Light ring brightness	Brightest	Brighter	Bright	Dim	Dimmer

#### 4.3 系统参量对光环个数的影响

从模拟效果图(图 7、8)可以看出,人眼迎着折射光线最密集的方向俯视光环时,观察到的光环最多。实验中也发现,若过度平视光环,则人眼无法看到光环。保持初始条件为下落高度  $h = 0.0286 \text{ m}$ ,出水口半径  $a = 2.70 \text{ mm}$ ,出水口流速  $U_0 = 0.076 \text{ m/s}$ ,平面为毛玻璃板,改变微距相机的俯拍角度,可以得到如表 2 所示的实验结果,俯拍角度越小,观察到的光环越少,所以要尽量俯视观察光环。

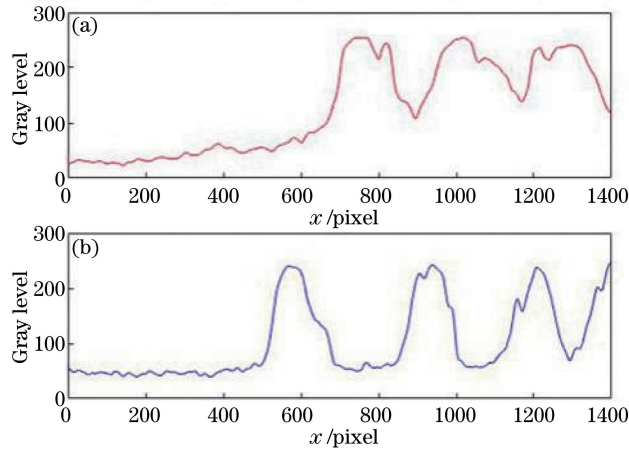


图 11 (a)毛玻璃和(b)无色玻璃的光环截面灰度图

Fig. 11 Sectional gray-scale graphs of light rings when surface is (a) ground glass or (a) colorless glass

表 2 俯拍角度的光环数量

Table 2 Quantity of light rings with different depression angles

Depression angle / (°)	0	25	40	52	70	80
Quantity of light rings	0	2	4	6	9	9

由以上分析得到,出水口高度  $h$  和初始流速  $U_0$  影响光环疏密程度,光环随着下落高度的增大变得密集。刚性平面种类影响光环亮度,光在接触点被平面折射、吸收的能量越少,反射上去的能量越多,看到的光环越亮。从 COMSOL 的模拟效果图和实验结果图中均可以发现,光环的个数决定于俯视角,存在最佳的人眼观测角度区间,俯视角越大,观察到的光环越多。

#### 4.4 误差

在研究光环疏密时实验数据与理论数据存在数值差异,分析其中原因如下。

当稳定水波纹存在时,仅底部波纹波长近似相等,上部波长却增大。理论上应只以接触点的波纹波长做趋势分析,但实际上,并不是所有的波纹凹处下部都存在光环。光向上传播时,能量损失非常快,光环也只集中在底部,所以这种近似是合理的,如图 12 所示。由图 12 可以看出,尽管箭头处水波长变大,光环却无法形成。

尽管在巩欣亚等<sup>[13]</sup>的研究基础上做了修正(考虑韦伯数),但在分析水柱流速方程时,为简化计算,代入无水波纹时接触点上方水柱附加压强项,即理论计算项  $P_h \approx P_0 + \sigma/r$ 。实际上,在稳定水波纹存在时,同样可以运用伯努利方程求解流速方程,但需要将附加压强项做进一步修正,即实际修正项  $P_h = P_0 + \sigma/r + \sigma/r_0$ 。接触点上方波纹放大图如图 13 所示。

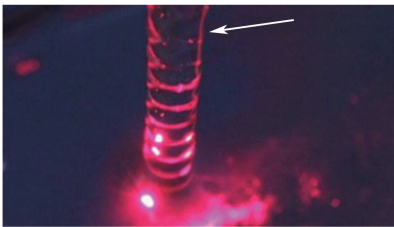


图 12 误差分析图

Fig. 12 Error analysis picture

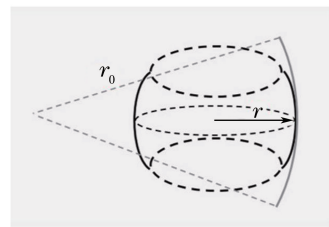


图 13 接触点上方波纹放大图

Fig. 13 Enlarged picture of ripple above contact point

## 5 结论

光环形成的必要条件是水柱表面存在稳定波纹结构。激光照到水柱与刚性平面的接触点后,经过平面后向上反射。在波纹凸起处的上部,光折射到空气中,而在波纹凸起处的下部,入射角较大,光发生全反射。通过 COMSOL Multiphysics 5.1 模拟刚性平面反射对光环的影响,并通过实验验证了模型分析的可靠性。

不考虑水的黏性情况下,通过对水波纹稳定方程的建立求解及相关实验研究,得到了系统相关参量对光

环性质的影响:光环随着水柱下落高度和初始流速的增大而变得密集;刚性平面会影响光环的亮度,即平面损失或折射的能量越少,光环越亮;存在一个观察光环的合适俯视图,俯视图角度越大,观察到的光环越多,观察光环时要尽量俯视。该研究基于 Plateau-Rayleigh 不稳定性探讨水柱与激光光环的依赖关系,属于流体力学光学的交叉研究,所得结论可用于微流控制液体和光纤微颗粒制造过程中的精密测量和实时监控。

### 参 考 文 献

- [1] Rayleigh L. On the instability of jets[J]. Proc London Math Soc, 1879, s1-10(1): 4-13.
- [2] Rayleigh L. On the stability, or instability, of certain fluid motions[J]. Proc London Math Soc, 1879, s1-11(1): 57-72.
- [3] Leib S J, Goldstein M E. The generation of capillary instabilities on a liquid jet[J]. J Fluid Mech, 1986, 168: 479-500.
- [4] Eggers J. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flow[J]. Rev Mod Phys, 1997, 69(3): 865-929.
- [5] Yang Liu, Chen Yanping, Xu Jianqiu, *et al.* Laser-induced breakdown spectroscopy for analysis of liquids[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2014, 51(10): 100001.  
杨 柳, 陈燕萍, 徐剑秋, 等. 激光诱导击穿光谱在液体样品分析中的应用[J]. 激光与光电子学进展, 2014, 51(10): 100001.
- [6] Liang Zhongcheng, Zhao Rui. Optofluidics and its potential applications[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2008, 45(6): 16-23.  
梁忠诚, 赵 瑞. 微流控光学及其应用[J]. 激光与光电子学进展, 2008, 45(6): 16-23.
- [7] Hu Yingru, Lü Cen, Song Chen. Liquid droplets analysis technology[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2008, 45(1): 73-77.  
扈映茹, 吕 岑, 宋 晨. 液滴分析技术[J]. 激光与光电子学进展, 2008, 45(1): 73-77.
- [8] Dendukuri D, Doyle P S. The synthesis and assembly of polymeric microparticles using microfluidics[J]. Adv Mater, 2009, 21(41): 4071-4086.
- [9] Shabahang S, Kaufman J J, Deng D S, *et al.* Observation of Plateau-Rayleigh capillary instability in multi-material optical fibers[J]. Appl Phys Lett, 2011, 99(16): 161909.
- [10] Kaufman J J, Tao G M, Shabahang S, *et al.* Structured spheres generated by an in-fibre fluid instability[J]. Nature, 2012, 487: 463-467.
- [11] Rayleigh L. The form of standing waves on the surface of a running stream[J]. Proc Lond Math Soc, 1883, s1-15(1): 69-78.
- [12] Wada Y. On the steady surface ripples of a cylindrical flow[J]. J Phys Soc Jpn, 1950, 5: 259-262.
- [13] Gong Xinya, Zhang Yu, Zhang Yongzhan, *et al.* Capillary waves on vertical jets impinging upon different types of liquid surfaces[J]. Research and Exploration in Laboratory, 2015, 34(2): 29-33.  
巩欣亚, 张 煜, 张永战, 等. 竖直液柱与水平液面作用激起毛细波探究[J]. 实验室研究与探索, 2015, 34(2): 29-33.
- [14] Awati K M, Howes T. Stationary waves on cylindrical fluid jets[J]. Am J Phys, 1996, 64(6): 808-811.
- [15] Hancock M J, Bush J W M. Fluid pipes[J]. J Fluid Mech, 2002, 466: 285-304.
- [16] Watson E J. The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane[J]. J Fluid Mech, 1964, 20(3): 481-499.