

# 存在相位缺陷的二维量子行走性质

张融<sup>1</sup>, 张马龙<sup>1</sup>, 薛鹏<sup>2</sup>

<sup>1</sup>南京邮电大学光电工程学院, 江苏 南京 210046;

<sup>2</sup>东南大学物理系, 江苏 南京 211189

**摘要** 研究了存在相位缺陷的二维量子行走的性质。研究表明, 二维量子行走的性质取决于具体的硬币操作、硬币初始态以及不同类型的相位缺陷。由于标准量子行走的对称性被破坏, 因此可观察到局域性。利用局域性对初态的依赖, 可以实现对量子行走粒子的过滤和囚禁。

**关键词** 量子光学; 量子行走; 相位缺陷; 局域性; 纠缠态

**中图分类号** O413 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP54.022701

## Property of Two-Dimensional Quantum Walks with Phase Disorder

Zhang Rong<sup>1</sup>, Zhang Malong<sup>1</sup>, Xue Peng<sup>2</sup>

<sup>1</sup> School of Optoelectronic Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications,  
Nanjing, Jiangsu 210046, China;

<sup>2</sup> Department of Physics, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 211189, China

**Abstract** The property of two-dimensional quantum walks (QWs) with phase disorder is investigated and the research results indicate that this property depends on coin operations, coin initial state, and different types of phase disorder. Because of the symmetry-breaking of standard QWs, the localization effect can be observed. With the usage of initial-state-dependence of localization, the filter and trap of particles with QWs can be realized.

**Key words** quantum optics; quantum walks; phase disorder; localization; entanglement state

**OCIS codes** 270.0270; 030.1670

## 1 引言

量子行走(QWs)是经典随机行走在量子世界的对应<sup>[1-2]</sup>。由于量子态的相干叠加性, 量子行走的性质与经典随机行走的有很大不同。量子行走可用于开发新的效率更高的量子算法<sup>[3-6]</sup>。利用量子行走模型可以研究复杂现象, 比如光合作用过程中的能量传输<sup>[7]</sup>、安德森局域性<sup>[8-9]</sup>和拓扑相位<sup>[10-11]</sup>等, 还可以实现量子计算<sup>[12-14]</sup>和量子态的完美传输<sup>[15]</sup>。量子行走的性质引起了学者们的关注, 已广泛应用于核磁共振系统、离子阱系统、囚禁中性原子系统、光学系统等<sup>[16-20]</sup>多个物理系统中。在具体实验过程中, 不可避免地会出现消相干现象, 消相干导致量子行走逐渐转变为经典随机行走<sup>[17-19]</sup>。通过选择合适的缺陷和量子硬币初态, 可以观察到一维量子行走中的局域现象<sup>[20-24]</sup>和准周期现象<sup>[25-27]</sup>。关于二维(2D)以及高维量子行走的性质及其应用的研究也取得了很多成果<sup>[28-31]</sup>。

本文讨论了随着位置变化的相位缺陷、硬币操作以及硬币初始状态对二维量子行走性质的影响, 重点讨论了模型中出现局域量子现象的条件。由于二维量子行走的希尔伯特空间维度相比一维量子行走的有很大扩展, 因此无法给出解析形式的分析。本文通过数值求解给出了二维量子行走的性质。存在相位缺陷的二维量子行走是研究量子混沌和量子信息传输的有效工具, 其局域性可用于过滤和囚禁粒子等<sup>[32-35]</sup>。

收稿日期: 2016-07-26; 收到修改稿日期: 2016-09-30

基金项目: 国家自然科学基金(11547031)、南京邮电大学国自基金孵化项目(NY215085)

作者简介: 张融(1979—), 女, 博士, 副教授, 主要从事量子信息方面的研究。E-mail: zhangr@njupt.edu.cn

## 2 存在相位缺陷的二维量子行走的性质

本文讨论的二维量子行走包含一个行走者和两个硬币,行走者的空间是二维正方网格,其沿  $x$  方向和  $y$  方向的运动分别被硬币 1 和硬币 2 控制。整个系统的希尔伯特空间表示为  $H_{wx} \otimes H_{wy} \otimes H_{c_1c_2}$ ,其中  $H_{c_1c_2}$  是硬币 1,2 的希尔伯特空间, $H_{wx}, H_{wy}$  是行走者的位置空间。硬币的基矢是  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 。行走者沿  $x$  方向的位置基矢是  $\{|x\rangle, x \in Z\}$ ,沿  $y$  方向的位置基矢是  $\{|y\rangle, y \in Z\}$ 。标准二维量子行走的一步演化算符是

$$U = S(I_x \otimes I_y \otimes C_{12}), \quad (1)$$

式中  $C_{12}$  是作用在两个硬币上的么正操作,可以选择分立的硬币操作  $C_{12} = C_1 \otimes C_2$  ( $C_1, C_2$  分别是作用在两个硬币上的么正操作),也可以选择联合操作  $C_{12} \neq C_1 \otimes C_2$ ;  $I$  是作用在行走者上的单位操作;  $S = \sum_{x,y,c_1,c_2} |x + (-1)^{c_1}\rangle\langle x| \otimes |y + (-1)^{c_2}\rangle\langle y| \otimes |c_1\rangle\langle c_1| \otimes |c_2\rangle\langle c_2|$  是条件位移算符,且  $c_1, c_2 = 0, 1$ 。当  $c_1(c_2) = 0$  时,行走者沿  $x(y)$  轴正方向走一步;当  $c_1(c_2) = 1$  时,沿  $x(y)$  轴负方向走一步。若系统初始状态是  $|\psi(0)\rangle$ ,经过  $t$  步演化后,系统的末态是  $|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(0)\rangle$ 。通过对整个系统的末态求部分迹  $\rho_w = \sum_{\psi_{c_1c_2}} \langle \psi_{c_1c_2} | \psi(t)\rangle \langle \psi(t) | \psi_{c_1c_2}\rangle$ ,可以得到此时行走者的状态  $\rho_w^{[36]}$ ,即  $t$  步演化后,通过行走者在不同位置处的概率分布  $P(x, y)$ 、位置方差  $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$  以及行走者回到原点的概率  $P(0, 0)$  可以描述二维量子行走的性质。

### 2.1 分立硬币操作的二维量子行走的局域性

首先讨论分立量子硬币操作以及不同类型的相位缺陷对二维量子行走性质的影响。考虑在行走者二维空间的  $x$  轴和  $y$  轴上添加相位缺陷的情形,一步演化算符表示为  $U_\phi = S_\phi(I_x \otimes I_y \otimes C_1 \otimes C_2)$ ,这种情况下的条件位移算符为

$$S_\phi = \sum_{x,y,c_1,c_2} \exp[i\phi(\delta_{x,0} + \delta_{y,0})] |x + (-1)^{c_1}\rangle\langle x| \otimes |y + (-1)^{c_2}\rangle\langle y| \otimes |c_1\rangle\langle c_1| \otimes |c_2\rangle\langle c_2|, \quad (2)$$

式中  $\phi(\delta_{x,0} + \delta_{y,0})$  是在  $x=0$  和  $y=0$  处添加的相位。

假设两个硬币初始处于可分态  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)_1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)_2$ ,不失一般性地认为行走者初始时刻处于原点,那么整个系统的初始状态表示为  $|\psi(0)\rangle_- = \frac{1}{2} |0\rangle_x |0\rangle_y (|0\rangle - i|1\rangle)_1 (|0\rangle - i|1\rangle)_2$ 。经过  $t$  步演化后,系统的末态是  $|\psi(t)\rangle = U_\phi^t |\psi(0)\rangle_-$ 。

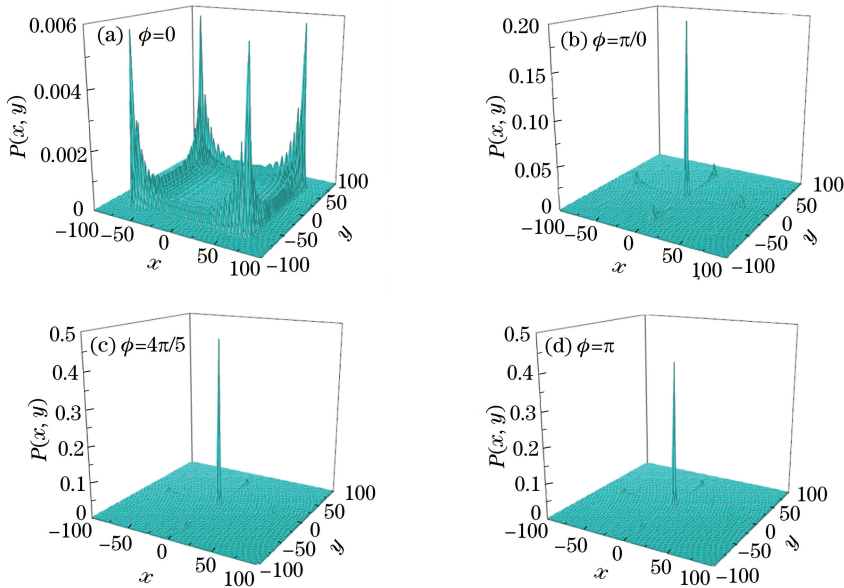
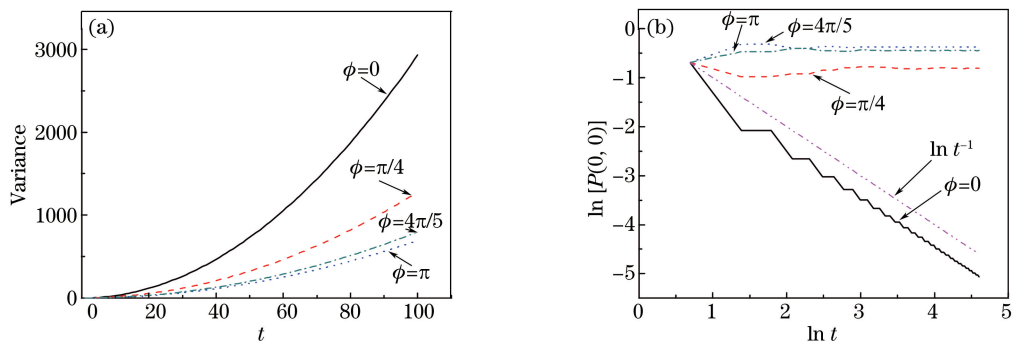
$t=100$  时,行走者的概率分布如图 1 所示。数值计算结果表明,对于标准二维量子行走,  $\phi=0$  (即没有添加相位缺陷),如图 1(a) 所示,行走者的概率分布关于  $x$  轴和  $y$  轴对称,回到原点的概率为 0,标准量子行走沿  $x$  轴和  $y$  轴扩散。

图 1(b)~(d) 分别为  $\phi = \pi/4, 4\pi/5, \pi$  时行走者的概率分布。如果在每个轴上添加相位缺陷  $\phi \in [\pi/4, \pi]$ ,由于相干性的变化,行走者被局域在原点附近,远离原点的概率为 0,即二维量子行走会出现局域性。从图 1 可以看出,当硬币初始态是可分态时,相位缺陷使行走者原本的扩散行为变为局域性,局域性的显著性与加在  $x$  轴和  $y$  轴上相位缺陷的大小有关。

整个系统初始态为  $|\psi(0)\rangle_-$  时,二维量子行走的位置方差  $\sigma^2$  随步数  $t$  和相位  $\phi$  的变化如图 2(a) 所示。由图可知,随步数的增加,相位缺陷的行走方差的增大小于标准行走的方差的增大,相位缺陷对二维量子行走的扩散起抑制作用。

回到原点的概率  $P(0, 0)$  的对数随  $\ln t$  的变化如图 2(b) 所示。回到原点的概率  $P(0, 0)$  也能很好地展示局域性。因为奇数步回到原点的概率一定是 0,所以图 2(b) 中展示的步数都是偶数步。标准量子行走的  $P(0, 0)$  用黑色实线表示,其随步数的衰减比  $t^{-1}$  的快,标准量子行走是扩散的。对于相同的步数,  $P(0, 0)$  随相位  $\phi$  的增加而增大,  $\phi = \pi/4, 4\pi/5, \pi$  时其衰减比  $t^{-1}$  的慢,  $\phi = 4\pi/5$  时局域性尤其明显。

下面探讨硬币初态是纠缠态  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$  的情形,此时整个系统的初始状态

图1 初始态为 $|\psi(0)\rangle_{-}$ 时二维量子行走分布Fig. 1 Distribution of 2D QWs with initial state of  $|\psi(0)\rangle_{-}$ 图2 (a)不同相位缺陷 $\phi$ 下,硬币初始态为 $|\psi(0)\rangle_{-}$ 时二维量子行走的位置方差随步数 $t$ 的变化;  
(b)  $P(0,0)$ 随 $t$ 变化(自然对数坐标)Fig. 2 (a) Variation of position variance of 2D QWs with initial state of  $|\psi(0)\rangle_{-}$  with step  $t$  under different phase disorders  $\phi$ ; (b) variation of  $P(0,0)$  with  $t$  (natural logarithm coordinate)

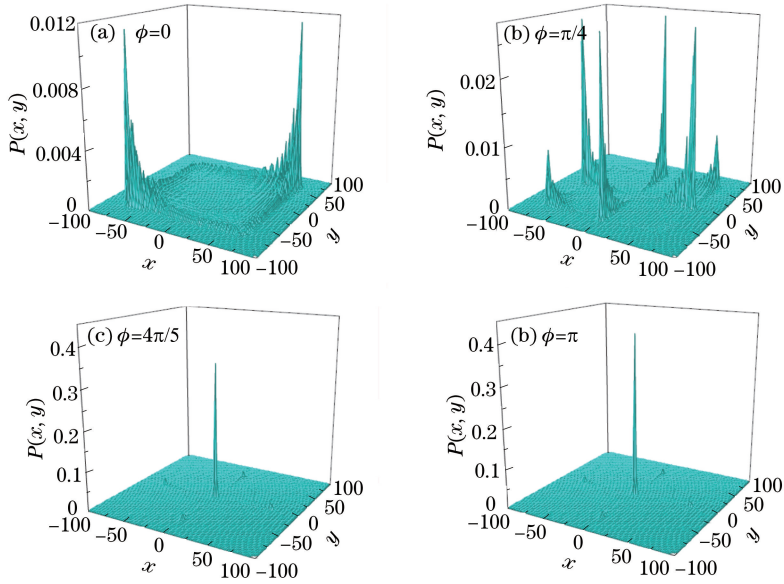
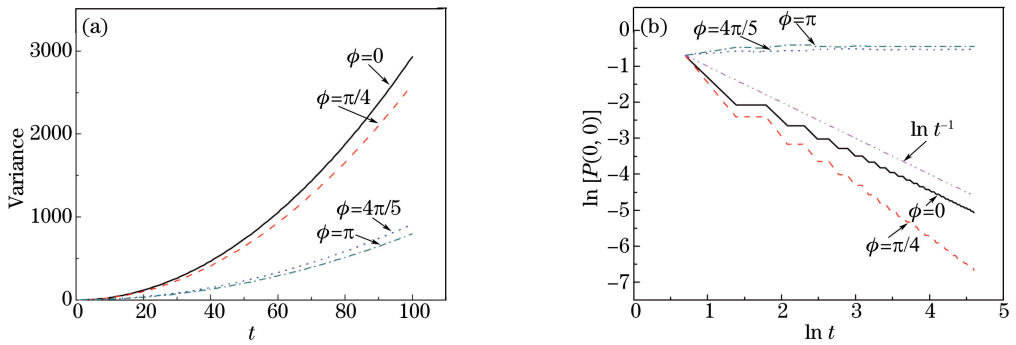
$|\psi(0)\rangle_e = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_x |0\rangle_y (|01\rangle - |10\rangle)_{12}$ 。初始态为 $|\psi(0)\rangle_e$ 的二维量子行走位置分布如图3所示。图3(a)

为不加相位缺陷的量子行走,不同于初始态 $|\psi(0)\rangle_{-}$ 的情形,分布关于 $x$ 轴和 $y$ 轴不是对称的。当在 $x$ 轴和 $y$ 轴上添加相位缺陷并选择合适的相位 $\phi$ 大小,可以观察到明显的局域性,如图3(c)、(d)所示。

初始态为 $|\psi(0)\rangle_e$ 的二维量子行走的位置方差随演化步数的变化如图4(a)所示。与硬币初始态是可分态不同,初始态是纠缠态时,存在 $\phi = \pi/4$ 相位缺陷的二维量子行走位置方差与标准量子行走的位置方差相差不大,当相位 $\phi$ 增大到 $4\pi/5$ 、 $\pi$ 时,方差明显比标准量子行走小。因此,当选择硬币初始态是纠缠态时,相位缺陷增大到 $4\pi/5$ 、 $\pi$ 对行走者的扩散速度有很大的抑制。

图4(b)是 $\ln[P(0,0)]$ 随 $\ln t$ 的变化图。当 $\phi = \pi/4$ 时,初始态是纠缠态 $|\psi(0)\rangle_e$ 的二维量子行走是扩散的,而相位缺陷增大到 $4\pi/5$ 、 $\pi$ 时,量子行走是局域的。

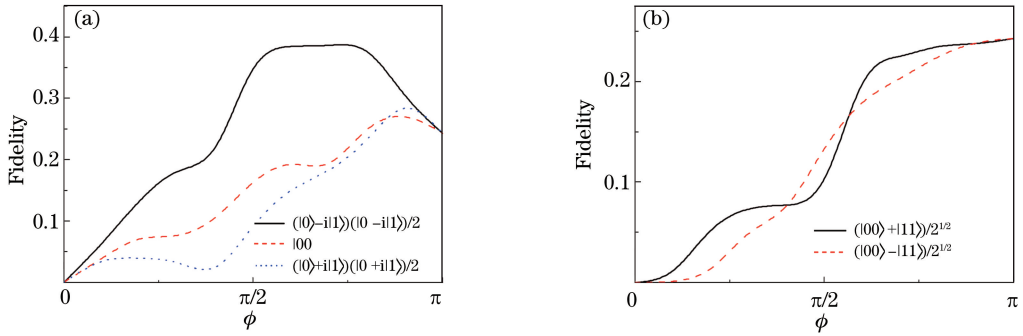
对于不同的硬币初始状态,当在 $x$ 轴和 $y$ 轴加合适的相位缺陷时,在二维量子行走中可以观察到局域性。接下来对局域性给出解释。首先计算存在缺陷的二维量子行走演化算符 $U_\phi$ 的本征态及其本征态分布,由于二维行走空间维度很大,只能给出数值解。数值计算结果表明,其中一些本征态的分布表现出局域性,称这些本征态为局域本征态,记为 $\psi_L$ 。如果系统初始状态中有局域本征态的成分,即系统初始态与局域

图 3 系统初始态为  $|\psi(0)\rangle_e$  时二维量子行走的分布情况Fig. 3 Distribution of 2D QWs with initial state of  $|\psi(0)\rangle_e$ 图 4 (a)不同相位缺陷  $\phi$  下,硬币初始态为  $|\psi(0)\rangle_e$  时二维量子行走的位置方差随步数  $t$  的变化;(b)  $P(0,0)$  随  $t$  变化(对数坐标)Fig. 4 (a) Variation of position variance of 2D QWs with initial state of  $|\psi(0)\rangle_e$  with step  $t$  under different phase disorders  $\phi$ ; (b) variation of  $P(0,0)$  with  $t$  (natural logarithm coordinate)

本征态的保真度  $F = \langle \psi(0) | \psi_L \rangle$  大于 0。因为  $U_\phi |\psi_L\rangle = c |\psi_L\rangle$  ( $c$  是常数), 经过若干步演化后, 整个系统以一定的概率处于局域本征态, 此时量子行走表现为局域性, 并且保真度的数值越大, 处于局域本征态的概率就越大, 局域性就越明显。

计算了整个系统的初始状态和局域本征态之间的保真度, 不同初始状态的保真度随着加在  $x$  轴和  $y$  轴上的相位缺陷  $\phi$  的变化曲线如图 5 所示。计算结果表明保真度与相位缺陷的大小以及硬币初始状态有关。当初始状态是可分态  $|\psi(0)\rangle_e$  时, 由图 5(a) 中的实黑线可以看出, 保真度大于 0 的相位缺陷  $\phi \in [\pi/4, \pi]$ , 因此相位缺陷在这一范围内时可以观察到图 1(b)、(c) 所示的局域性。当初始状态是纠缠态  $|\psi(0)\rangle_e$  时, 保真度大于 0 的范围是  $\phi \in [\pi/2, \pi]$ , 如图 5(b) 中黑色实线所示, 因此在这一范围内能观察到图 3(c)、(d) 所示的局域性。

由图 5 的数值计算结果可以看出, 对于初态  $|00\rangle_{12}$ , 保真度大于 0 的相位范围是  $\phi \in [\pi/2, \pi]$ , 如图 5(a) 中红色虚线所示。而初态是  $\frac{1}{2}(|0\rangle + i|1\rangle)_1 (|0\rangle + i|1\rangle)_2$  时, 保真度大于 0 的范围是  $\phi \in [2\pi/3, \pi]$ , 如图 5(a) 中蓝色点线所示。初态是纠缠态  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)_{12}$  时, 保真度大于 0 的范围是  $\phi \in [\pi/4, \pi]$ 。因

图5 保真度随相位缺陷  $\phi$  的变化。(a)可分态;(b)纠缠态Fig. 5 Variation of fidelity with phase disorder  $\phi$ . (a) Separable states; (b) entangled states

此当硬币初始态是  $|00\rangle_{12}$ 、 $\frac{1}{2}(|0\rangle - i|1\rangle)_1 (|0\rangle - i|1\rangle)_2$  等可分态,或者初始态是 Bell 纠缠态时,通过在  $x$  轴和  $y$  轴上添加合适大小的相位缺陷,都能观察到局域性。

下面具体讨论另一种不同种类的相位缺陷对二维量子行走性质的影响。添加在行走者上的随位置变化的相位缺陷为  $\phi(x) = 2\pi \frac{q}{p}x$ ,  $\phi(y) = 2\pi \frac{q}{p}y$ ,  $\frac{q}{p}$  是互质的整数,为方便讨论设  $q=1$ 。添加这种相位缺陷的条件平移算符为

$$\begin{cases} S_x^{c\phi(x)} = \sum_x \exp[i\phi(x)] |x + (-1)^{c_1}\rangle \langle x| \\ S_y^{c\phi(y)} = \sum_y \exp[i\phi(y)] |y + (-1)^{c_2}\rangle \langle y| \end{cases} \quad (3)$$

因为  $\frac{q}{p}$  和  $\frac{p-q}{p}$  对二维量子行走的影响是一样的,加上实验上的消相干,局域性在  $p$  取较大数值时很难观察到,所以在进行数值分析时选取较小的  $p$ ,通常取  $0 \leq \frac{q}{p} \leq 1/2$ 。量子行走性质与  $p$  取值的奇偶性有关,这里重点讨论  $p=3$  和  $p=4$  的情形。两个分立的硬币操作选取更一般的形式

$$C_1 = C_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & \sqrt{1-d} \\ \sqrt{1-d} & -\sqrt{d} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

式中参数  $d \in (0, 1)$ ,当  $d=1/2$  时硬币操作是哈德玛操作。

初始时刻硬币处于可分态,行走者在原点处,整个系统的状态是  $|\psi(0)\rangle_+ = \frac{1}{2} |0\rangle_x |0\rangle_y (|0\rangle + i|1\rangle)_{c_1} (|0\rangle + i|1\rangle)_{c_2}$ ,经过  $t$  步演化后,整个系统的状态是  $|\psi(t)\rangle = U_{\phi(x,y)} |\psi(0)\rangle_+$ ,其中演化算符  $U_{\phi(x,y)} = \left( \sum_{c_1, c_2} S_x^{c\phi(x)} \otimes S_y^{c\phi(y)} \right) \cdot (I_x \otimes I_y \otimes C_1 \otimes C_2)$ 。

数值计算表明,在添加这种类型相位缺陷的二维量子行走中,行走者每经过  $t=T$  步演化后,会以概率为 1 或者接近 1 的概率回到原点,将行走者再次回到原点所需的演化步数定义为准周期  $T$ 。经过第一个周期的演化,行走者回到原点的概率接近 1,表现为与演化步数有关的准周期的局域性。经过若干个周期  $mT (m \in \mathbb{N})$  的演化,行走者回到原点的概率随着  $m$  的增大而降低。周期  $T$  取决于  $p$ ,当  $p$  取奇数、比如  $p=3$  时,准周期  $T=2p=6$ ;当  $p$  取偶数、比如时  $p=4$ ,准周期  $T=p=4$ 。

选择硬币操作参数  $d=0.1$ ,相位缺陷参数  $p=3$ ,分别计算二维量子行走在不同步数演化后的位置分布情况。图 6(a)是  $t=5 (t \neq mT)$  步演化后的概率分布,4 个位置  $(\pm 1, \pm 1)$  上的概率  $P(\pm 1, \pm 1)=0.25$ ,其他位置的概率都为 0。经过  $t (t \neq mT)$  步演化,其分布与图 6(a)相似。图 6(b)是经过  $t=6$  步演化后的概率分布,行走者在原点的概率近似为 1,在其他位置出现的概率都为 0。因此经过一个周期的演化,行走者回到原点,可观察到局域性。如果  $p$  取偶数,如  $p=4$ ,经过  $t \neq mT$  和  $t=mT$  步演化的概率分布分别如图 6(c)、(d) 所示。 $t \neq mT$  时,行走者出现在  $(\pm 1, \pm 1)$  4 个位置处的概率为  $P(\pm 1, \pm 1)=0.23$ ,在位置  $(\pm 1, \pm 3)$ 、

( $\pm 3, \pm 1$ )处的概率是 0.02,其余位置出现的概率均为 0。行走者经过  $t=8=2T$  步演化后,出现在原点的概率  $P(0,0)=0.88$ ,其余非零位置的概率  $P(\pm 1, \pm 1)=0.03$ 。由于相干相消,行走者经过若干个周期的演化后几乎被囚禁在原点处。随着演化步数的增加,行走者周期性的局域性仍然可以观察到,只是回到原点的概率随着周期  $mT$  的增大而减小。

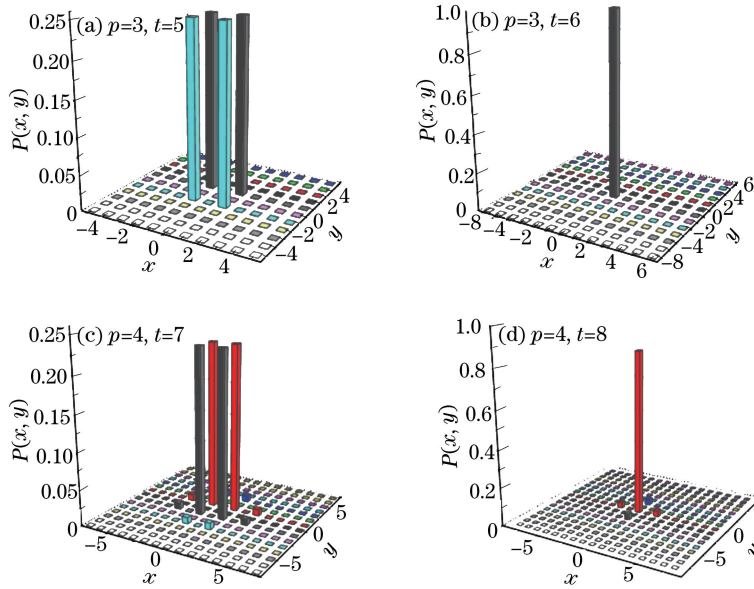


图 6 添加相位缺陷  $\phi(x)$ 、 $\phi(y)$  的二维量子行走的概率分布。(a)  $d=0.1, q=1, p=3, t=5$ ;

(b)  $d=0.1, q=1, p=3, t=6$ ; (c)  $d=0.1, q=1, p=4, t=7$ ; (d)  $d=0.1, q=1, p=4, t=8$

Fig. 6 Probability distribution of 2D QWs with phase disorders  $\phi(x)$  and  $\phi(y)$ . (a)  $d=0.1, q=1, p=3, t=5$ ;

(b)  $d=0.1, q=1, p=3, t=6$ ; (c)  $d=0.1, q=1, p=4, t=7$ ; (d)  $d=0.1, q=1, p=4, t=8$

位置方差随硬币操作系数  $d$  以及演化步数的变化如图 7、8 所示,位置方差在每个周期内作快速的二级振荡。图 7(a)是  $p=3$  时位置方差随硬币操作参数  $d$  以及演化步数的变化。如图 7(b)所示,当参数选择  $d=0.1, p=3$  时,在第一个演化周期内,5 步演化后的方差  $\sigma^2(5)$  是 1.0168,而 6 步演化后的方差  $\sigma^2(6)$  降低为 0.0202。这体现了随演化步数变化的局域性。图 8(a)描述的是  $p=4$  时,位置方差随硬币操作参数  $d$  以及演化步数的变化。当选择  $d=0.1, p=4$  时,第二个演化周期内,  $\sigma^2(7)=1.3169$ ,而  $\sigma^2(8)=0.3511$ ,方差有了显著下降,如图 8(b)所示。位置方差的整体趋势是随演化步数的增大而增大,并且  $p=4$  的包络线增大的速度比  $p=3$  的快。在较少的演化步数内,位置方差随着演化步数振荡;随着演化步数增大,位置方差呈现扩散。位置方差还与硬币操作有关,随着  $d$  的增大,位置方差整体增大趋势更大。

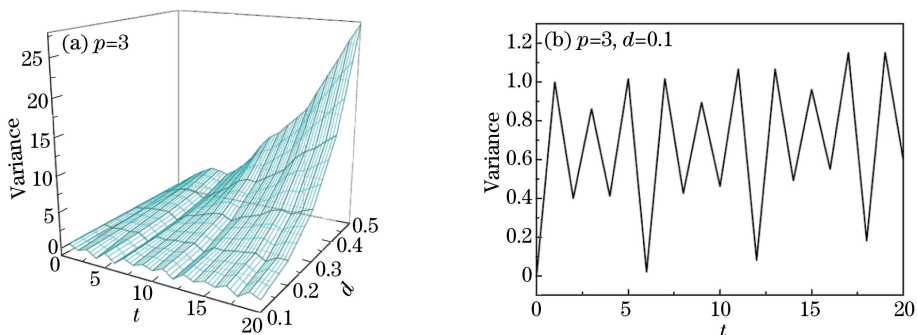


图 7  $p=3$  时,添加相位缺陷  $\phi(x)$ 、 $\phi(y)$  的二维量子行走的位置方差。

(a) 位置方差随硬币操作系数  $d$  和演化步数的变化; (b)  $d=0.1$  时,位置方差随步数的变化

Fig. 7 Position variance of 2D QWs with phase disorders  $\phi(x)$  and  $\phi(y)$  when  $p=3$ . (a) Variation of position variance with coin operation parameter  $d$  and evolution step; (b) variation of position variance with step when  $d=0.1$

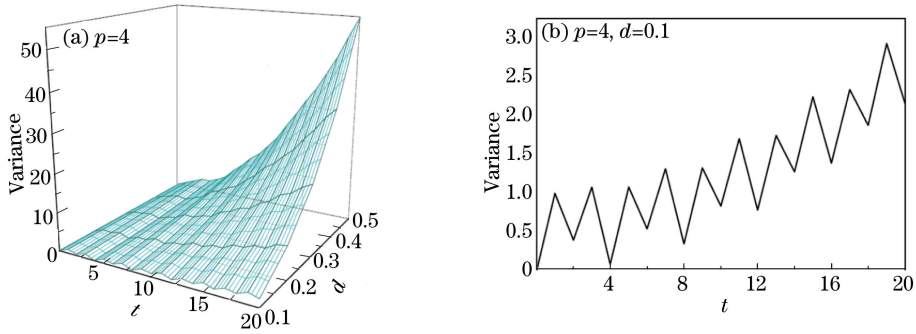


图 8  $p=4$  时, 添加相位缺陷  $\phi(x)$ 、 $\phi(y)$  的二维量子行走的位置方差。

(a) 位置方差随硬币操作系数  $d$  和演化步数的变化; (b)  $d=0.1$  时位置方差随演化步数的变化

Fig. 8 Position variance of 2D QWs with phase disorders  $\phi(x)$  and  $\phi(y)$  when  $p=4$ . (a) Variation of position variance with coin operation parameter  $d$  and evolution step; (b) variation of position variance with step when  $d=0.1$

行走者回到原点的概率  $P(0,0)$  随着步数作准周期的振荡, 如图 9 所示。  $P(0,0)$  与硬币操作有关, 对于相同的步数,  $P(0,0)$  随着步数的减少而减少。  $p=4$  时  $P(0,0)$  衰减速度比  $p=3$  时快。 在一个周期内, 步数  $t=mT$  时,  $P(0,0)$  取值最大, 这表示行走者经过每一个周期的演化, 都会以较大的概率回到原点。 通过  $P(0,0)$  同样可以看出, 添加随位置变化的相位缺陷的二维量子行走表现出准周期的局域性。

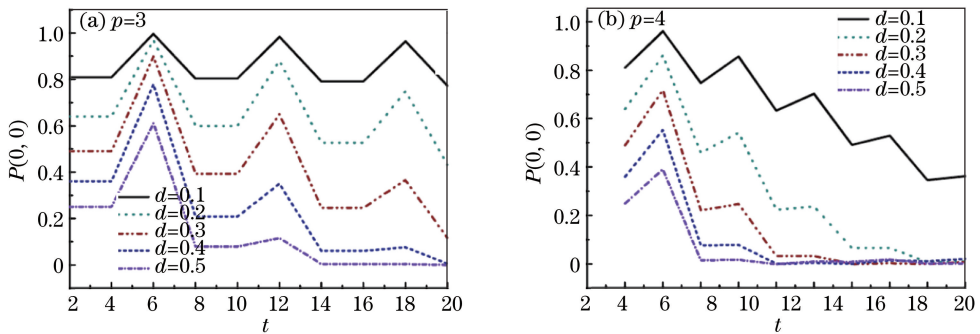


图 9 添加相位缺陷  $\phi(x)$ 、 $\phi(y)$  的二维量子行走的概率  $P(0,0)$ 。(a)  $p=3$ ; (b)  $p=4$

Fig. 9 Probability  $P(0,0)$  of 2D QWs with phase disorders  $\phi(x)$  and  $\phi(y)$ . (a)  $p=3$ ; (b)  $p=4$

## 2.2 联合硬币操作的二维量子行走中的局域性

接下来讨论硬币联合操作的二维量子行走的性质, 分别考虑两种不同的联合操作。 第一种是 Grover 操作, Grover 硬币操作定义为

$$\mathbf{C}_{12}^G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

另一种联合操作是离散傅里叶(DFT)硬币操作, 其数学表达式为

$$\mathbf{C}_{12}^D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}. \quad (6)$$

通过数值计算  $P(x,y)$ 、 $P(0,0)$  来描述联合硬币操作下的二维量子行走的性质。

图 10 是 Grover 硬币操作下的二维量子行走概率分布  $P(x,y)$ 。 即使在没有相位缺陷的情况下, 硬币处于可分态, 整个系统的初始状态是  $|\psi(0)\rangle_-$ , 经过一定步数的演化, 行走者以较高的概率  $P(0,0)=0.33$  被局域在原点处, 如图 10(a) 所示。 如果硬币初始状态是纠缠态, 整个系统是  $|\psi(0)\rangle_+$ , 行走者局域在原点的概率是  $P(0,0)=0.26$ , 如图 10(c) 所示。 当在  $x$  轴和  $y$  轴上添加相位缺陷  $\phi=\pi$ 、选择初态  $|\psi(0)\rangle_-$  和  $|\psi(0)\rangle_+$ 。

时,也能观察到局域性,如图 10 (b)、(d) 所示,对于初态  $|\psi(0)\rangle_-$ ,行走者局域在 0 点处的概率  $P(0,0)=0.077$ ,而对于  $|\psi(0)\rangle_+$ ,  $P(0,0)=0.06$ 。对不同的初态  $|\psi(0)\rangle_-$  和  $|\psi(0)\rangle_+$ ,不加相位缺陷回到原点处的概率  $P(0,0)$  大于加相位缺陷的  $P(0,0)$ 。

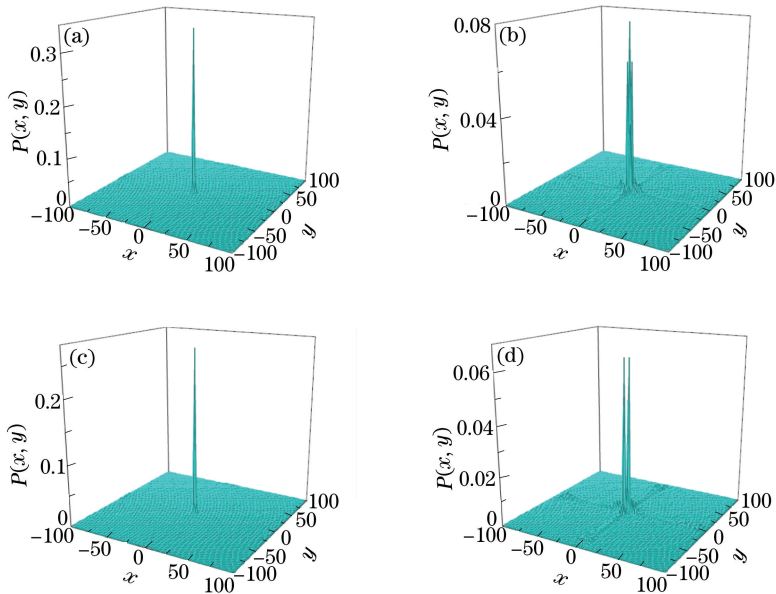


图 10 Grover 硬币操作下的二维量子行走的概率分布。(a)  $\phi=0$ , 初态  $|\psi(0)\rangle_-$ ; (b)  $\phi=\pi$ , 初态  $|\psi(0)\rangle_-$ ; (c)  $\phi=0$ , 初态  $|\psi(0)\rangle_+$ ; (d)  $\phi=\pi$ , 初态  $|\psi(0)\rangle_+$ 。

Fig. 10 Probability distribution of 2D QWs with Grover coin flipping. (a) Initial state  $|\psi(0)\rangle_-$ ,  $\phi=0$ ; (b) initial state  $|\psi(0)\rangle_-$ ,  $\phi=\pi$ ; (c) initial state  $|\psi(0)\rangle_+$ ,  $\phi=0$ ; (d) initial state  $|\psi(0)\rangle_+$ ,  $\phi=\pi$

Grover 硬币操作下的二维量子行走的回到原点的概率  $P(0,0)$  随着演化步数  $t$  的变化如图 11 所示。不加相位的  $P(0,0)$  如图 11 中黑色实线所示,随着演化步数的增大其最终趋于非零常数,因此,对于 Grover 硬币操作下的二维量子行走,无论初始态选择可分态还是纠缠态,不添加相位时都表现出局域性。如果在两个轴上添加相位  $\phi=\pi$ ,  $P(0,0)$  随着演化步数的变化发生振荡,最终趋于非零的常数,如图 11 中的虚线所示,因此这种情形下选择不同的初态,行走仍然表现出局域性。

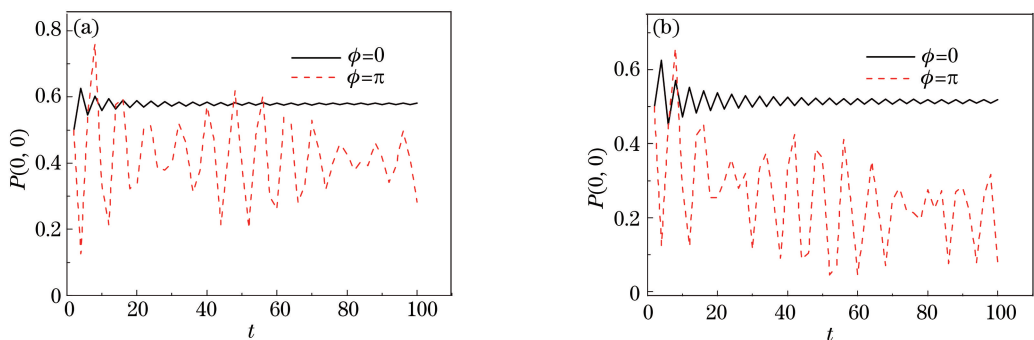


图 11 初态是 (a)  $|\psi(0)\rangle_-$  和 (b)  $|\psi(0)\rangle_+$  时, Grover 硬币操作下的二维量子行走中的概率  $P(0,0)$

Fig. 11 Probability  $P(0,0)$  of 2D QWs with Grover coin flipping for initial states of (a)  $|\psi(0)\rangle_-$  and (b)  $|\psi(0)\rangle_+$ .

Grover 硬币操作下的二维量子行走在没有相位缺陷和有相位缺陷两种情况下都表现出局域性,通过分析系统初始状态与量子行走演化算符局域本征态的重叠来对局域性进行解释。首先分析 Grover 硬币操作下的二维量子行走的本征态的性质。计算结果显示,无论是否存在相位缺陷,都存在局域本征态。系统初始状态  $|\psi(0)\rangle_-$  和不存在相位缺陷的局域本征态之间的保真度  $F=0.3106$ ,而  $|\psi(0)\rangle_-$  和存在相位缺陷的局域本征态之间的保真度  $F=0.2109$ ,因此,当不存在相位缺陷时, Grover 硬币操作下的二维量子行走的局域性更加明显。类似地,  $|\psi(0)\rangle_+$  和不存在相位缺陷的局域本征态之间的保真度  $F=0.2517$ ,而  $|\psi(0)\rangle_+$  和存在



相位缺陷的局域本征态之间的保真度  $F = 0.2018$ 。对于初始态是纠缠态的情形,不存在相位缺陷时局域性更加明显。通过比较发现,Grover 硬币操作下的二维量子行走不存在相位缺陷时局域性更加明显;对于不同的初态,硬币处于可分态时的局域性更加明显。

接下来讨论另一种联合操作——DFT 硬币操作下的二维量子行走的性质。DFT 硬币操作的二维量子行走的概率分布如图 12 所示。未添加相位时,初态  $|\psi(0)\rangle_-$  和  $|\psi(0)\rangle_e$  的概率分布分别如图 12(a)、(c) 所示,很明显,行走者出现的远离原点的概率不为 0,因此不存在局域性。在  $x$  轴和  $y$  轴上同时添加相位缺陷  $\phi = \pi/4$ ,行走者以较低的概率局域在原点处。初态选择  $|\psi(0)\rangle_-$ ,行走者在原点的概率  $P(0,0) = 0.09$ ,如图 12(b) 所示;如果初态是  $|\psi(0)\rangle_e$ ,则  $P(0,0) = 0.16$ ,如图 12(d) 所示。

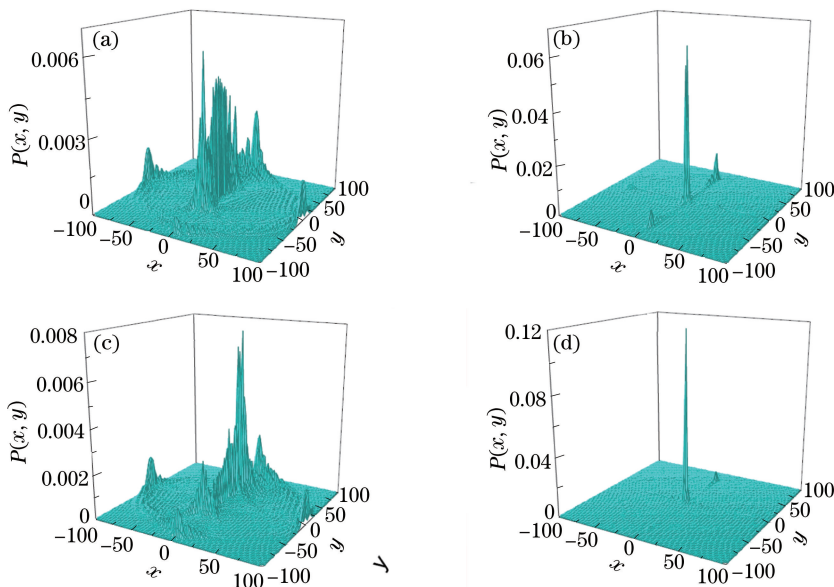


图 12 DFT 硬币操作下的二维量子行走的概率分布图。(a)  $\phi = 0$ , 初态  $|\psi(0)\rangle_-$ ; (b)  $\phi = \pi/4$ , 初态  $|\psi(0)\rangle_-$ ; (c)  $\phi = 0$ , 初态  $|\psi(0)\rangle_e$ ; (d)  $\phi = \pi/4$ , 初态  $|\psi(0)\rangle_e$ 。

Fig. 12 Probability distribution of 2D QWs with DFT coin flipping. (a) Initial state  $|\psi(0)\rangle_-$ ,  $\phi = 0$ ; (b) initial state  $|\psi(0)\rangle_-$ ,  $\phi = \pi/4$ ; (c) initial state  $|\psi(0)\rangle_e$ ,  $\phi = 0$ ; (d) initial state  $|\psi(0)\rangle_e$ ,  $\phi = \pi/4$

图 13 是 DFT 硬币操作下的二维量子行走的  $P(0,0)$  随着演化步数的变化图。未添加相位时,硬币初始态无论是可分态还是纠缠态,  $P(0,0)$  随着步数的增大而增大,最终趋于 0,因此这种情况下的行走是扩散的。在两个轴上添加相位缺陷  $\phi = \pi/4$  时,随着演化步数的增加,不论初态是可分态还是纠缠态,  $P(0,0)$  趋于一个非零的常数,添加相位缺陷的 DFT 二维量子行走表现出局域性。

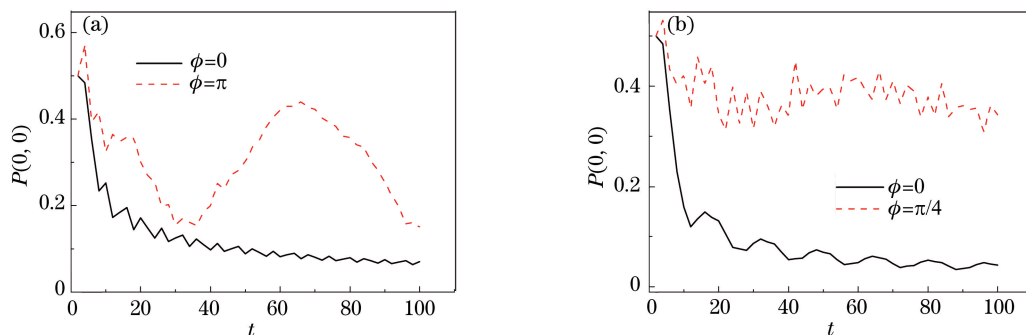


图 13 初态是(a)  $|\psi(0)\rangle_-$  和  $|\psi(0)\rangle_e$  时,DFT 硬币操作下的二维量子行走中的概率  $P(0,0)$

Fig. 13 Probability  $P(0,0)$  of 2D QWs with DFT coin flipping for initial states of (a)  $|\psi(0)\rangle_-$  and (b)  $|\psi(0)\rangle_e$ .

计算了 DFT 二维量子行走演化算符的本征态分布。数值计算结果表明,无论是否添加相位缺陷,都存在局域本征态。初态  $|\psi(0)\rangle_-$  和未添加相位缺陷的演化算符的局域本征态之间的保真度  $F = 0.012$ ,而添加

相位缺陷  $\phi = \pi/4$  时,  $F = 0.1965$ 。对  $|\psi(0)\rangle_x$ , 未添加相位缺陷时  $F = 0.012$ , 而添加相位缺陷  $\phi = \pi/4$  时,  $F = 0.1987$ 。因此, 添加相位缺陷  $\phi = \pi/4$  的 DFT 二维量子行走表现出局域性, 而未添加相位缺陷则无法观察到局域性。

讨论了不同的初态对存在相位缺陷的 Grover 二维量子行走性质的影响。当硬币初态是可分态  $|00\rangle_{12}$  时, 其概率分布与初态  $\frac{1}{2}(|0\rangle - i|1\rangle)_1(|0\rangle - i|1\rangle)_2$  和  $\frac{1}{2}(|0\rangle + i|1\rangle)_1(|0\rangle + i|1\rangle)_2$  下的概率分布类似, 能观察到局域现象。如果初态是纠缠态,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)_{12}$  的分布和  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)_{12}$  的分布类似, 能观察到局域性。 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)_{12}$  的分布和  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{12}$  的分布类似。

研究了不同的初态对存在相位缺陷的 DFT 二维量子行走性质的影响。当硬币初态是可分态  $|00\rangle_{12}$  时, 可以观察到局域性, 局域在坐标原点的概率  $P(0,0) = 0.019$ 。初态  $\frac{1}{2}(|0\rangle - i|1\rangle)_1(|0\rangle - i|1\rangle)_2$  的概率分布和  $\frac{1}{2}(|0\rangle + i|1\rangle)_1(|0\rangle + i|1\rangle)_2$  的相类似。如果初态是纠缠态,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)_{12}$  的分布和  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)_{12}$  类似, 行走者局域在坐标原点的概率是  $P(0,0) = 0.023$ 。初态  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)_{12}$  的分布和  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{12}$  的类似。

### 3 结 论

讨论了在  $x$  轴和  $y$  轴上添加相位缺陷的二维量子行走的性质, 通过数值计算系统分析了相位缺陷、系统初态、硬币操作等因素对二维量子行走性质的影响, 并且解释了该模型中观察到的量子局域性。数值计算结果表明, 局域性与系统的初态、硬币操作、随位置变化的相位缺陷有关。当选择合适的初始状态、硬币操作和相位缺陷时, 二维量子行走的扩散速度得到很大抑制, 从与步数平方成正比的扩散转变为局域性。

通过计算整个系统的初始状态与二维量子行走演化算符局域本征态之间的保真度, 对局域现象进行了解释。只有当保真度  $F > 0$ , 才会观察到局域性, 并且保真度越大, 局域性越明显。与系统初态紧密关联的二维量子行走中的局域性可用于过滤、囚禁粒子。通过改变相位缺陷的位置和大小可以实现对量子行走具体演化形式的操控。二维量子行走的很多性质和量子混沌中的共振类似, 因此二维量子行走模型有助于研究量子混沌。

### 参 考 文 献

- [1] Guilloitin-Plantard N, Schott R. Dynamic random walks: Theory and application[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [2] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N. Quantum random walks[J]. Phys Rev A, 1993, 48(2): 1687-1690.
- [3] Ambainis A. Quantum walks and their algorithmic applications[J]. International Journal of Quantum Information, 2003, 1(4): 507-518.
- [4] Childs A M, Cleve R, Deotto E, *et al.* Quantum walks on graphs[C]. Proc 35th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 2003: 59-68.
- [5] Shenvi N, Kempe J. Quantum random-walk search algorithm[J]. Phys Rev A, 2003, 67(5): 052307.
- [6] Kempe J. Quantum random walks: An introductory overview[J]. Contemporary Physics, 2003, 44(4), 307-327.
- [7] Oliveira A C, Portugal R, Donangelo R. Decoherence in two-dimensional quantum walks[J]. Phys Rev A, 2006, 74(1): 012312.
- [8] Brun T A, Carteret H A, Ambainis A. Quantum to classical transition for random walks[J]. Phys Rev Lett, 2003, 91(13): 130602.
- [9] Crespi A, Osellame R, Ramponi R, *et al.* Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk

- [J]. Nature Photonics, 2013, 7(4), 322-328.
- [10] Kitagawa T, Rudner M S, Berg E, *et al.* Exploring topological phases with quantum walks[J]. Phys Rev A, 2010, 82(3): 033429.
- [11] Kitagawa T, Broome M A, Fedrizzi A, *et al.* Observation of topologically protected bound states in photonic quantum walks[J]. Nature Communications, 2012, 3: 882.
- [12] Childs A M. Universal computation by quantum walk[J]. Phys Rev Lett, 2009, 102(18): 180501.
- [13] Childs A M, Gosset D, Webb Z. Universal computation by multiparticle quantum walk[J]. Science, 2013, 339(6121): 791-794.
- [14] Lovett N B, Cooper S, Everitt M, *et al.* Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk[J]. Phys Rev A, 2010, 81(4): 042330.
- [15] Kurzyński P, Wójcik A. Discrete-time quantum walk approach to state transfer[J]. Phys Rev A, 2011, 83(6): 062315.
- [16] Du J, Li H, Xu X, *et al.* Experimental implementation of the quantum random-walk algorithm[J]. Phys Rev A, 2003, 67(4): 042316.
- [17] Ryan C A, Laforest M, Boileau J C, *et al.* Experimental implementation of a discrete-time quantum random walk on an NMR quantum-information processor[J]. Phys Rev A, 2005, 72(6): 062317.
- [18] Lu D, Zhu J, Zou P, *et al.* Experimental implementation of a quantum random-walk search algorithm using strongly dipolar coupled spins[J]. Phys Rev A, 2010, 81(2): 022308.
- [19] Zahringer F, Kirchmair G, Gerritsma R, *et al.* Realization of a quantum walk with one and two trapped ions[J]. Phys Rev Lett, 2010, 104(10): 100503.
- [20] Schmitz H, Matjeschk R, Schneider Ch, *et al.* Quantum walk of a trapped ion in phase space[J]. Phys Rev Lett, 2009, 103(9): 090504.
- [21] Broome M A, Fedrizzi A, Lanyon B P, *et al.* Discrete single-photon quantum walks with tunable decoherence[J]. Phys Rev Lett, 2010, 104(15): 153602.
- [22] Schreiber A, Cassemiro K N, Potocek V, *et al.* Photons walking the line: A quantum walk with adjustable coin operations[J]. Phys Rev Lett, 2010, 104(5): 050502.
- [23] Schreiber A, Cassemiro K N, Potocek V, *et al.* Decoherence and disorder in quantum walks: From ballistic spread to localization[J]. Phys Rev Lett, 2011, 106(18): 180403.
- [24] Peruzzo A, Lobino M, Matthews J C F, *et al.* Quantum walks of correlated photons[J]. Science, 2010, 329(5998): 1500-1503.
- [25] Schreiber A, Gábris A, Rohde P, *et al.* A 2D quantum walk simulation of two-particle dynamics[J]. Science, 2012, 336(6077): 55-58.
- [26] Crespi A, Osellame R, Ramponi R, *et al.* Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk [J]. Nature Photonics, 2013, 7(4): 322-328.
- [27] Owens J O, Broome M A, Biggerstaff N, *et al.* Two-photon quantum walks in an elliptical direct-write waveguide array[J]. New Journal of Physics, 2011, 13(7): 075003.
- [28] Huang Jiang, Xie Qin, Zhou Kaiwei, *et al.* Sudden death and sudden birth of bound entanglement[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2015, 52(4): 042701.  
黄江, 谢钦, 周凯伟, 等. 束缚纠缠的猝死与复活[J]. 激光与光电子学进展, 2015, 52(4): 042701.
- [29] Lu Daoming. Time evolution of chaotic field in diffusion process[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2015, 52(4): 042702.  
卢道明. 扩散过程中混沌场的演化[J]. 激光与光电子学进展, 2015, 52(4): 042702.
- [30] Sansoni L, Sciarrino F, Vallone G, *et al.* Two-particle bosonic-fermionic quantum walk via integrated photonics[J]. Phys Rev Lett, 2012, 108(1): 010502.
- [31] Zhang R, Xue P. Two-dimensional quantum walk with position-dependent phase defects[J]. Quantum Information Processing, 2014, 13(8): 1825-1839.
- [32] Xue P, Sanders B C, Leibfried D. Quantum walk on a line for a trapped ion[J]. Phys Rev Lett, 2009, 103(18): 183602.

- [33] Wójcik A, Łuczak T, Kurzyński P, *et al.* Trapping a particle of a quantum walk on the line[J]. Phys Rev A, 2012, 85(1): 012329.
- [34] Segev M, Silberberg Y, Christodoulides D N. Anderson localization of light[J]. Nature Photonics, 2013, 7(3): 197-204.
- [35] Li Z J, Izaac J A, Wang J B. Position-defect-induced reflection, trapping, transmission, and resonance in quantum walks[J]. Phys Rev A, 2013, 87(1): 012314.
- [36] Lu Daoming. Solution of master equation of density matrix in interaction system of atom with thermal reservoir[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53(9): 092701.  
卢道明. 原子与库场相互作用系统中密度矩阵主方程的解[J]. 激光与光电子学进展, 2016, 53(9): 092701.