

# Demkov-Kunike 模型的高保真度超绝热量子驱动

冯平, 孙建安, 王文元, 豆福全

西北师范大学物理与电子工程学院甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 甘肃 兰州 730070

**摘要** 高保真度量子态的制备是量子精确操控的基本要求。利用超绝热技术,通过引入一个附加场强度参数,研究了 Demkov-Kunike 模型的高保真度超绝热量子驱动问题,讨论了附加场强度参数、啁啾参数、耦合强度以及静态失谐参数对 Demkov-Kunike 模型绝热过程的影响。研究表明,系统的保真度与附加场强度参数密切相关。当附加场强度参数为适当值时,无论对于无静态失谐情况还是存在静态失谐情况都有很好的参数稳健性,在所有的参数范围内能够抑制跃迁概率的振荡,实现高保真度、快速以及超绝热量子驱动。

**关键词** 量子光学; 高保真度; 超绝热技术; Demkov-Kunike 模型; 量子驱动

**中图分类号** O431.2 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP54.122701

## High-Fidelity Superadiabatic Quantum Driving in Demkov-Kunike Model

Feng Ping, Sun Jian'an, Wang Wenyuan, Dou Fuquan

*Key Laboratory of Atomic and Molecular Physics & Functional Materials of Gansu Province,**College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou, Gansu 730070, China*

**Abstract** The preparation of high-fidelity quantum state is a basic requirement for precise control of quantum system. In this paper, by using superadiabatic technology and introducing an auxiliary field strength parameter, we investigate the problem of high-fidelity superadiabatic quantum driving in the Demkov-Kunike model, and discuss the influence of the auxiliary field strength parameters, chirp parameters, coupling strength and static detuning parameters on the adiabatic process of the Demkov-Kunike model. The results show that the fidelity of the system is closely related to the auxiliary field strength parameters. When the appropriate auxiliary field parameters are selected, the system has good parametric robustness, no matter the system is at no static detuning case or static detuning case. The oscillation of transition probability can be suppressed in all parameter ranges. The system can achieve high-fidelity, fast, and superadiabatic quantum driving.

**Key words** quantum optics; high-fidelity; superadiabatic technology; Demkov-Kunike model; quantum driving

**OCIS codes** 270.5585; 020.1475

## 1 引言

量子系统的精确操控是现代科学领域的重要课题之一,该研究涉及到量子光学、量子信息、多体物理以及精密测量等领域<sup>[1-3]</sup>。高保真度、快速性是诸如量子态制备等量子精确操控中的基本要求。为了实现这一目标,人们发展了各种优化技术<sup>[4-13]</sup>。超绝热量子驱动技术就是高保真度量子绝热操控过程中的一个重要方法<sup>[14-16]</sup>。该技术通过在系统中附加一个哈密顿量去抵消系统中的非绝热跃迁,从而实现快速的高保真度绝热演化。近年来,超绝热量子驱动技术成为量子操控研究中的一个热点研究领域。理论上人们已将其应用到许多量子系统中<sup>[17-18]</sup>,实现了 Landau-Zener 模型、Allen-Eberly 模型、高斯模型和 Tangent 模型的高保

**收稿日期:** 2017-06-21; **收到修改稿日期:** 2017-07-05

**基金项目:** 国家自然科学基金(11547046, 11665020)、中国博士后科学基金(2015M580068)、甘肃省自然科学基金(1606RJZA081)、西北师范大学青年教师科研能力提升计划项目(NWNU-LKQN-16-3, NWNU-LKQN-16-14)

**作者简介:** 冯平(1990—),男,硕士研究生,主要从事超冷原子物理方面的研究。E-mail: fengping525@163.com

**导师简介:** 豆福全(1977—),男,博士,副教授,主要从事超冷原子物理方面的研究。

E-mail: doufq@nwnu.edu.cn(通信联系人)

真度量子操控<sup>[19-21]</sup>。实验上也分别在光晶格中的玻色爱因斯坦凝聚<sup>[19]</sup>、自旋量子<sup>[22]</sup>以及 Nitrogen-Vacancy 色心<sup>[23-24]</sup>等系统中验证了该技术的有效性。

两能级系统是量子物理中的基本组成部分,在量子光学等领域中有着重要作用<sup>[25-26]</sup>。Demkov-Kunike 模型作为两能级系统中的一个基本模型<sup>[27]</sup>,在特殊条件下可以简化为 Landau-Zener、Rosen-Zener、Allen-Eberly、Bambini-Berman 等模型<sup>[28-30]</sup>。该模型已被广泛地应用于各个领域,例如量子跃迁的相干控制<sup>[31]</sup>、原子分子转化<sup>[32]</sup>和高保真复合绝热通道技术等<sup>[8,33]</sup>。最近,Paul 等<sup>[34]</sup>已将 Allen-Eberly 模型初步应用于波导管中,发现快速绝热过程在该系统中具有非常重要的作用。然而,对于有静态失谐参数的 Demkov-Kunike 模型超绝热量子驱动还有一系列问题值得探究。

本文系统地研究了 Demkov-Kunike 模型的高保真超绝热量子操控问题。通过引入附加场强度参数,在不同的情况下,讨论了附加场大小、啁啾参数、耦合强度以及静态失谐参数对超绝热驱动过程的影响。

## 2 方 法

外场驱动的两能级量子系统可以由下述无量纲化的薛定谔方程描述

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = H(t) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中  $a$  和  $b$  分别是两个非绝热态的概率幅,系统的总概率守恒,即  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ;  $t$  为时间。哈密顿量  $H(t)$  为

$$H(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & \nu(t) \\ \nu(t) & -\gamma(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

式中  $\gamma(t)$  是两能级系统的能级差(失谐), $\nu(t)$  是两能级间耦合强度(啁啾频率)。系统的绝热态为  $|\psi_{\pm}(t)\rangle$ , 下标“-”和“+”分别代表基态和激发态。假设初始时刻系统被制备在绝热基态  $|\psi_{-}(t_{\text{ini}})\rangle$  上,演化结束后末态  $|\psi_{\text{fin}}\rangle$  依然在绝热基态  $|\psi_{-}(t_{\text{fin}})\rangle$ , 系统就能实现末态的高保真度  $F_{\text{fin}} = |\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{-}(t_{\text{fin}}) \rangle|^2 = 1$ <sup>[19]</sup>。一般情况下系统要实现绝热演化,必须满足绝热条件,从而使得绝热演化过程耗费更长的时间。为了克服这一局限,超绝热技术要求在系统中附加一个哈密顿量  $H_s$ , 去抵消演化过程的非绝热跃迁,这样系统在整个过程中沿  $H + H_s$  绝热演化,且用时大大缩短,从而实现快速的高保真度绝热操控过程。附加哈密顿量  $H_s$  的形式为<sup>[19]</sup>

$$H_s(t) = i \sum_n [ |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| - |n(t)\rangle \langle \partial_t n(t)| ] / 2, \quad (3)$$

式中  $|n(t)\rangle$  是哈密顿量  $H$  的本征态,对于两能级系统  $H_s$  为

$$H_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & -i\dot{\theta}/2 \\ i\dot{\theta}/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

式中  $\theta = \arctan[\nu(t)/\gamma(t)]$ 。在实际的实验中,人们不能非常精确地控制附加哈密顿量  $H_s$ , 为了研究其对跃迁效率稳定性的影响,引入一个附加场强度参数  $\lambda$ <sup>[14,21,35]</sup>, 系统总的哈密顿量变为

$$H_{\text{tot}}(t) = H + \lambda H_s = \begin{pmatrix} \gamma(t) & \nu(t) - i\lambda\dot{\theta}/2 \\ \nu(t) + i\lambda\dot{\theta}/2 & -\gamma(t) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$\lambda = 0$  表示没有增加附加场,即一般的两能级系统, $\lambda = 1$  时对应文献[19]中的超绝热驱动技术。

## 3 Demkov-Kunike 模型的高保真度超绝热量子驱动

Demkov-Kunike 模型中  $\gamma(t)$  和  $\nu(t)$  的形式如下<sup>[27]</sup>

$$\gamma(t) = \gamma_1 + \gamma_0 \tanh\left(\frac{t}{T}\right), \quad \nu(t) = \nu_0 \operatorname{sech}\left(\frac{t}{T}\right), \quad (6)$$

式中  $T$  是扫描周期(脉冲的宽度), $\gamma_1$  是静态失谐参数, $\gamma_0$  是啁啾参数, $\nu_0$  是最大耦合强度。当  $\gamma_0 = 0$  时,该模型简化为 Rosen-Zener 模型;当  $\gamma_1 = 0$  时,简化为 Allen-Eberly 模型;当  $\gamma_1 = \gamma_0$  时,简化为

Bambini-Berman模型<sup>[29]</sup>。对于 Demkov-Kunike 模型,有

$$\dot{\theta} = -\frac{\nu(t) [\gamma_0 + \gamma_1 \tanh(t/T)]}{T [\nu^2(t) + \gamma^2(t)]}. \quad (7)$$

在数值计算中,采用 4-5 阶龙格-库塔法对方程(1)式进行数值求解,并假设初始时刻系统被制备在绝热基态  $|\psi_-(t_{ini})\rangle$  上。为了简单起见,取  $T=1$ 。

### 3.1 无静态失谐情况 ( $\gamma_1=0$ )

$\gamma_1=0$ ,意味着无静态失谐情况, Demkov-Kunike 模型简化为 Allen-Eberly 模型。图 1 绘制了在不同附加场强度参数  $\lambda$  下末态保真度  $F_{fin}$  关于啁啾参数  $\gamma_0$  和耦合强度  $\nu_0$  的等密度图,蓝色区域代表低保真度,红色区域代表高保真度。可以发现,  $\lambda$  明显影响系统的保真度,当  $\lambda=0$  时[图 1(a)],对于小的  $\gamma_0$ ,保真度  $F_{fin}$  随  $\nu_0$  变化出现了拉比振荡。对于小的  $\nu_0$ ,保真度  $F_{fin}$  较低。当  $\lambda=0.5$  时[图 1(b)],保真度  $F_{fin}$  明显提高,直到  $\lambda=1$  时[图 1(c)],拉比振荡完全消失,在所有参数范围内实现了超高保真度。为了使结果更清晰,分别绘制了在不同的  $\lambda$  和  $\gamma_0$  下保真度  $F_{fin}$  随  $\nu_0$  的变化规律[图 2(a)和(b)],以及不同  $\lambda$  和  $\nu_0$  下保真度  $F_{fin}$  随  $\gamma_0$  的变化规律[图 2(c)和(d)],图 2 的结果进一步验证了以上结论。图 3 展示了不同啁啾参数  $\gamma_0$  下末态保真度  $F_{fin}$  关于附加场强度参数  $\lambda$  的变化规律。可以发现保真度  $F_{fin}$  随  $\lambda$  先增大后减小,在  $\lambda=1$  时达到最大值,并且关于  $\lambda=1$  对称<sup>[21]</sup>。附加场强度从 0 到 1 的变化过程中意味着附加场从无到有,随着附加场的参与,逐渐抵消非绝热振荡,当到达 1 时非绝热振荡完全被抵消,从而实现高保真度超绝热过程。

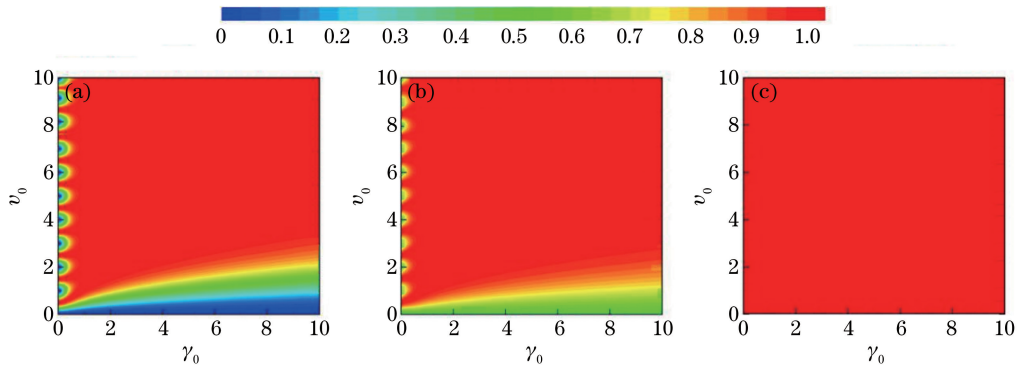


图 1 (a)  $\lambda=0$ 、(b)  $\lambda=0.5$ 、(c)  $\lambda=1$  时,末态保真度关于啁啾参数和耦合强度的等密度图

Fig. 1 Contour plots of the fidelity of the final state as the function of the chirp parameter and the coupling strength with (a)  $\lambda=0$ , (b)  $\lambda=0.5$ , (c)  $\lambda=1$

### 3.2 存在静态失谐情况 ( $\gamma_1 \neq 0$ )

下面研究  $\gamma_1 \neq 0$  的情况对超绝热过程的影响。图 4 绘制了在不同附加场强度参数  $\lambda$  下末态保真度  $F_{fin}$  关于静态失谐参数  $\gamma_1$  和耦合强度  $\nu_0$  的等密度图,计算中取  $\gamma_0=0.1$ 。可以发现系统的末态保真度  $F_{fin}$  关于  $\gamma_1=0$  对称,并且在  $|\gamma_1| > 0.1$  和  $|\gamma_1| < 0.1$  范围内保真度  $F_{fin}$  的振荡情况不同。为了使结果更清晰,图 5 绘制了不同附加场强度参数  $\lambda$  和静态失谐参数  $\gamma_1$  下末态保真度  $F_{fin}$  随耦合强度  $\nu_0$  的变化规律,图 6 绘制了不同附加场强度参数  $\lambda$  和耦合强度  $\nu_0$  下末态保真度  $F_{fin}$  随静态失谐参数  $\gamma_1$  的变化规律。当  $\lambda=0$  时,对于较小的  $|\gamma_1|$ ,保真度  $F_{fin}$  也出现了拉比振荡[图 5(a)]。当  $|\gamma_1|=0.1$  时,保真度  $F_{fin}$  随  $\nu_0$  的变化稳定在一个较大的值[图 5(b)]。当  $|\gamma_1|$  继续增大,保真度  $F_{fin}$  再次出现一个振荡[图 5(c)]。对于较大的  $|\gamma_1|$ ,振荡消失[图 5(d)]。同样,在图 6 中可以清楚地看到末态保真度关于  $\gamma_1=0$  对称,这是由于两能级系统中 Demkov-Kunike 模型跃迁概率  $P$  为<sup>[27,29]</sup>

$$P = \frac{\cosh(2\pi T \gamma_0) - \cosh[2\pi T (\gamma_0^2 - \nu_0^2)^{1/2}]}{\cosh(2\pi T \gamma_1) + \cosh(2\pi T \gamma_0)}, \quad (8)$$

很明显  $P$  是关于  $\gamma_1=0$  对称的。当  $\lambda=0.5$  时,保真度  $F_{fin}$  明显提高,直到  $\lambda=1$  时,振荡完全消失,保真度实现超高值。通过进一步分析也可发现,在存在静态失谐的情况下,系统的末态保真度  $F_{fin}$  关于  $\lambda$  具有对称性。

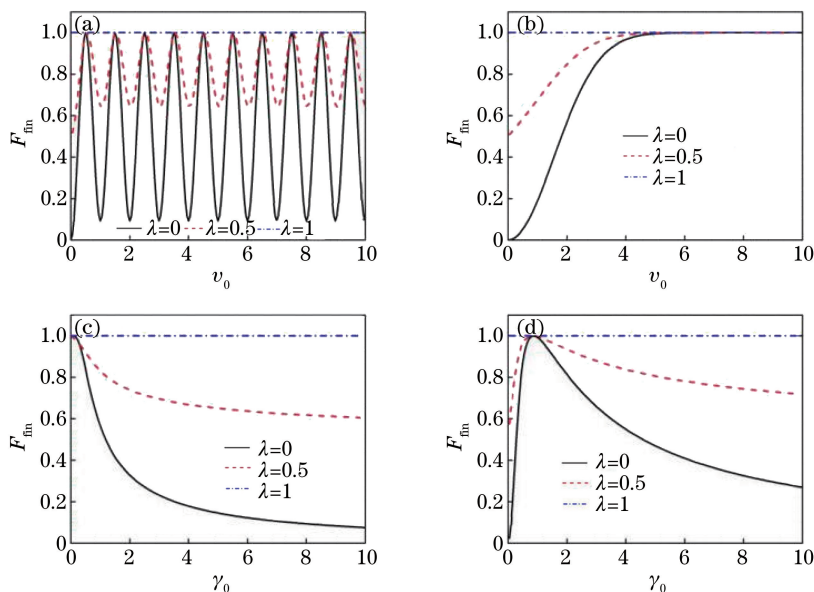


图 2 (a)  $\gamma_0 = 0.1$  和(b)  $\gamma_0 = 15$  时末态保真度随耦合强度的变化规律; (c)  $v_0 = 0.5$  和(d)  $v_0 = 1$  时末态保真度随啁啾参数的变化规律

Fig. 2 Fidelity of the final state as a function of the coupling strength with (a)  $\gamma_0 = 0.1$  and (b)  $\gamma_0 = 15$ ; fidelity of the final state as a function of the chirp parameter with (c)  $v_0 = 0.5$  and (d)  $v_0 = 1$

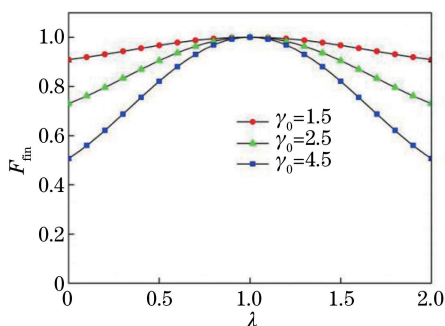


图 3  $v_0 = 1$  时, 不同啁啾参数下末态保真度关于附加场强度参数的变化规律

Fig. 3 Fidelity of the final state as a function of the auxiliary field strength parameter with different chirp parameters with  $v_0 = 1$

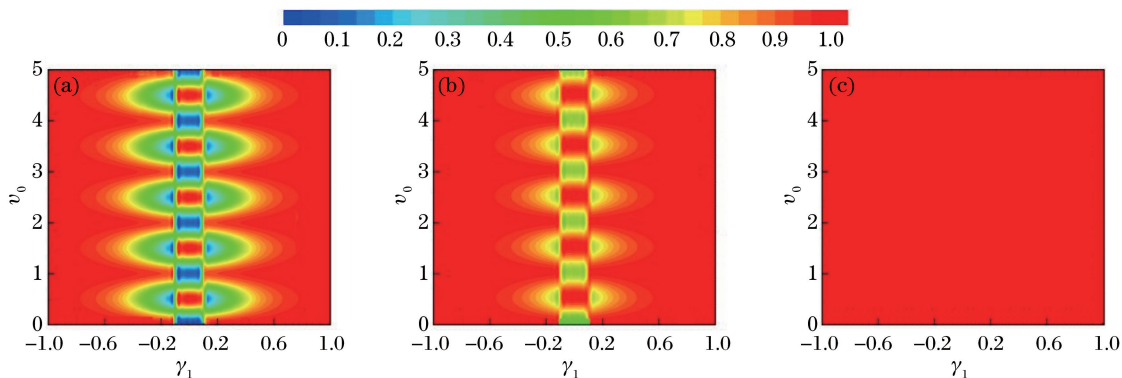


图 4 (a)  $\lambda = 0$ 、(b)  $\lambda = 0.5$ 、(c)  $\lambda = 1$  时, 末态保真度关于静态失谐参数和耦合强度的等密度图

Fig. 4 Contour plots of the fidelity of the final state as the function of the static detuning parameter and the coupling strength with (a)  $\lambda = 0$ , (b)  $\lambda = 0.5$ , (c)  $\lambda = 1$

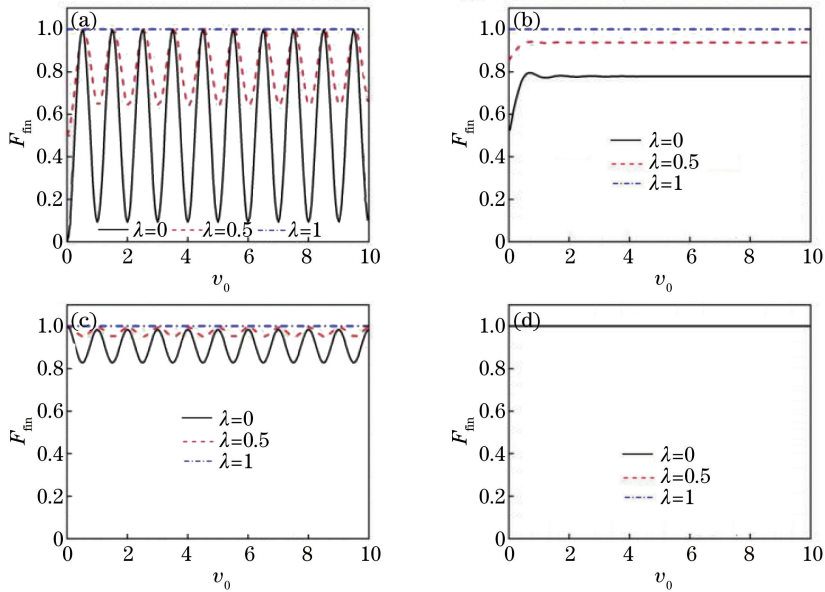


图 5 (a)  $\gamma_1 = -0.01$ 、(b)  $\gamma_1 = -0.1$ 、(c)  $\gamma_1 = -0.5$ 、(d)  $\gamma_1 = -2$  时,末态保真度随耦合强度的变化规律

Fig. 5 Fidelity of the final state as a function of the coupling strength with (a)  $\gamma_1 = -0.01$ , (b)  $\gamma_1 = -0.1$ , (c)  $\gamma_1 = -0.5$ , (d)  $\gamma_1 = -2$

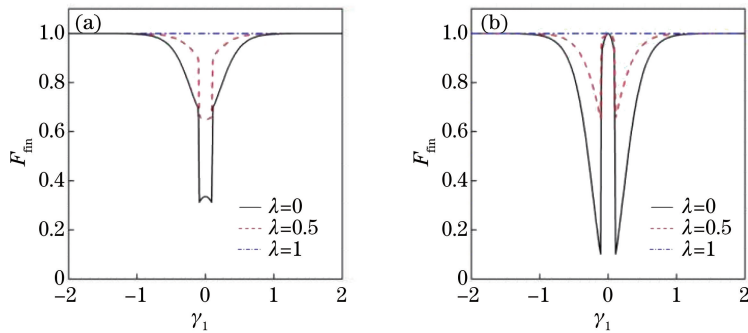


图 6 (a)  $\nu_0 = 0.2$ 、(b)  $\nu_0 = 1.5$  时,末态保真度随静态失谐参数的变化规律

Fig. 6 Fidelity of the final state as a function of the static detuning parameter with (a)  $\nu_0 = 0.2$ , (b)  $\nu_0 = 1.5$

## 4 结 论

采用 4-5 阶龙格-库塔算法数值求解薛定谔方程,研究了 Demkov-Kunike 模型的高保真度超绝热量子驱动。通过引入附加场强度参数,讨论了附加场大小、啁啾参数、耦合强度以及静态失谐参数对绝热过程的影响。在绝热过程中附加场用来抵消系统演化过程中的非绝热跃迁,从而实现快速的高保真度绝热演化,使系统在很短的时间内完全绝热演化成为了可能。研究发现末态保真度关于附加场强度参数  $\lambda = 1$  对称,并且在  $\lambda = 1$  时系统的保真度始终保持一个超高值。对于存在静态失谐的情况( $\gamma_1 \neq 0$ ),研究发现末态保真度关于静态失谐参数  $\gamma_1 = 0$  对称。总之,超绝热技术极大地提高了保真度,并且具有很好的参数稳健性,只要附加场选择适当( $\lambda = 1$ ),就能实现所有参数内的快速高保真度量子过程,误差小于量子计算中的阈值  $10^{-4}$ 。

## 参 考 文 献

- [1] Brif C, Chakrabarti R, Rabitz H. Control of quantum phenomena: past, present and future[J]. New Journal of Physics, 2010, 12(7): 075008.
- [2] de Melo C S. When fermions become bosons: pairing in ultracold gases[J]. Physics Today, 2008, 61(10): 45-51.
- [3] Saberi H, Opatrny T, Mølmer K, *et al.* Adiabatic tracking of quantum many-body dynamics[J]. Phys Rev A, 2014, 90(6): 060301(R).

- [4] Torosov B T, Guérin S, Vitanov N V. High-fidelity adiabatic passage by composite sequences of chirped pulses[J]. Phys Rev Lett, 2011, 106(23): 233001.
- [5] Masuda S, Nakamura K. Acceleration of adiabatic quantum dynamics in electromagnetic fields[J]. Phys Rev A, 2011, 84(4): 043434.
- [6] Dou F Q, Cao H, Fu L B, *et al.* High-fidelity composite adiabatic passage in nonlinear two-level systems[J]. Phys Rev A, 2016, 93(4): 043419.
- [7] Hu Jingyu, Mao Tengfei, Dou Fuquan, *et al.* Application of the composite adiabatic passage technique in the Landau-Zener model with harmonic interaction modulation[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(17): 170303.  
胡靖宇, 毛腾飞, 豆福全, 等. 复合绝热通道技术在谐相互作用调制的 Landau-Zener 模型中的应用[J]. 物理学报, 2013, 62(17): 170303.
- [8] Cao X X, Zhuang J, Ning X J, *et al.* Accelerating an adiabatic process by nonlinear sweeping[J]. Chin Phys B, 2013, 22(9): 090310.
- [9] Chen X, Lizuain I, Ruschhaupt A, *et al.* Shortcut to adiabatic passage in two-and three-level atoms[J]. Phys Rev Lett, 2010, 105(12): 123003.
- [10] Du Y X, Liang Z T, Li Y C, *et al.* Experimental realization of stimulated Raman shortcut-to-adiabatic passage with cold atoms[J]. Nat Commun, 2016, 7: 12479.
- [11] Funo K, Zhang J N, Chatou C, *et al.* Universal work fluctuations during shortcuts to adiabaticity by counterdiabatic driving[J]. Phys Rev Lett, 2017, 118(10): 100602.
- [12] Chen Y H, Xia Y, Wu Q C, *et al.* Method for constructing shortcuts to adiabaticity by a substitute of counterdiabatic driving terms[J]. Phys Rev A, 2016, 93(5): 052109.
- [13] Wang Liping, Meng Shuo, Tan Fengling, *et al.* Coherent control of population transfer in asymmetric double quantum well[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0927002.  
汪利平, 孟硕, 谭凤玲, 等. 不对称双量子阱中电子布居转移的相干控制研究[J]. 光学学报, 2016, 36(9): 0927002.
- [14] Masuda S, Rice S A. Selective vibrational population transfer using combined stimulated Raman adiabatic passage and counter-diabatic fields[J]. J Phys Chem C, 2014, 119(26): 14513-14523.
- [15] Vandermause J, Ramanathan C. Superadiabatic control of quantum operations[J]. Phys Rev A, 2016, 93(5): 052329.
- [16] Demirplak M, Rice S A. Adiabatic population transfer with control fields[J]. J Phys Chem A, 2003, 107(46): 9937-9945.
- [17] Agundez R R, Hill C D, Hollenberg L C L, *et al.* Superadiabatic quantum state transfer in spin chains[J]. Phys Rev A, 2017, 95(1): 012317.
- [18] Song X K, Ai Q, Qiu J, *et al.* Physically feasible three-level transitionless quantum driving with multiple Schrödinger dynamics[J]. Phys Rev A, 2016, 93(5): 052324.
- [19] Bason M G, Viteau M, Malossi N, *et al.* High-fidelity quantum driving[J]. Nat Phys, 2012, 8: 147-152.
- [20] Malossi N, Bason M G, Viteau M, *et al.* Quantum driving protocols for a two-level system: from generalized Landau-Zener sweeps to transitionless control[J]. Phys Rev A, 2013, 87(1): 012116.
- [21] Dou F Q, Liu J, Fu L B. High-fidelity superadiabatic population transfer of a two-level system with a linearly chirped Gaussian pulse[J]. Europhysics Letters, 2017, 116(6): 60014.
- [22] Zhang J, Shim J H, Niemeyer I, *et al.* Experimental implementation of assisted quantum adiabatic passage in a single spin[J]. Phys Rev Lett, 2013, 110(24): 240501.
- [23] Liang Z T, Yue X, Lü Q, *et al.* Proposal for implementing universal superadiabatic geometric quantum gates in nitrogen-vacancy centers[J]. Phys Rev A, 2016, 93(4): 040305.
- [24] Zhou B B, Baksic A, Ribeiro H, *et al.* Accelerated quantum control using superadiabatic dynamics in a solid-state lambda system[J]. Nat Phys, 2017, 13: 330-334.
- [25] Lu Daoming. Entanglement properties in the system of atoms interacting with coupled cavities via a two-photonhopping interaction[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(2): 0227001.  
卢道明. 双光子过程耦合腔系统中的纠缠特性[J]. 光学学报, 2012, 32(2): 0227001.
- [26] Li Bin, Sachuerfu, Guo Caili. Quantum properties in a system of two two-level atoms interacting with Pólya state light field[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53(3): 032702.

- 李斌, 萨楚尔夫, 郭彩丽. 两个二能级原子与 Pólya 态光场相互作用系统的量子特性[J]. 激光与光电子学进展, 2016, 53(3): 032702.
- [27] Suominen K A, Garraway B M. Population transfer in a level-crossing model with two time scales[J]. Phys Rev A, 1992, 45(1): 374-386.
- [28] Simeonov L S, Vitanov N V. Exactly solvable two-state quantum model for a pulse of hyperbolic-tangent shape[J]. Phys Rev A, 2014, 89(4): 043411.
- [29] Lacour X, Guérin S, Yatsenko L P, *et al.* Uniform analytic description of dephasing effects in two-state transitions[J]. Phys Rev A, 2007, 75(3): 033417.
- [30] Ye Difa, Fu Libin, Zhao Hong, *et al.* Nonlinear Rosen-Zener transition[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(9): 5071-5076.  
叶地发, 傅立斌, 赵鸿, 等. 非线性 Rosen-Zener 跃迁[J]. 物理学报, 2007, 56(9): 5071-5076.
- [31] Torosov B T, Vitanov N V. Coherent control of a quantum transition by a phase jump[J]. Phys Rev A, 2007, 76(5): 053404.
- [32] Ishkhanyan A M, Joulakian B, Suominen K A. Two strong nonlinearity regimes in cold molecule formation[J]. Eur Phys J D, 2008, 48(3): 397-404.
- [33] Dou Fuquan, Zheng Weiqiang. High-fidelity population inversion of two-level system[J]. Chin Sci Bull, 2016, 61(20): 2309-2315 .  
豆福全, 郑伟强. 两能级系统中高保真度布居数反转[J]. 科学通报, 2016, 61(20): 2309-2315.
- [34] Paul K, Sarma A K. Shortcut to adiabatic passage in a waveguide coupler with a complex-hyperbolic-secant scheme[J]. Phys Rev A, 2015, 91(5): 053406.
- [35] Chen Y H, Shi Z C, Song J, *et al.* Optimal shortcut approach based on an easily obtained intermediate Hamiltonian [J]. Phys Rev A, 2017, 95(6): 062319.