

# 三棱镜折射率的精确测量

孟赞<sup>1</sup>, 闫宝罗<sup>1</sup>, 樊代和<sup>2,3</sup>, 贾欣燕<sup>2,3</sup>, 刘其军<sup>2,3</sup>, 魏云<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>西南交通大学物理科学与技术学院, 四川 成都 611756;

<sup>2</sup>西南交通大学物理实验中心, 四川 成都 611756;

<sup>3</sup>西南交通大学物理国家级实验教学示范中心, 四川 成都 611756

**摘要** 基于三棱镜折射率的测量原理,采用最小偏向角法、掠入射法和垂直底边入射法对折射率相对不确定度进行理论研究。结果表明,折射率相对不确定度随三棱镜顶角的增大而减小,不同波长的光对折射率相对不确定度的影响较小,折射率的相对不确定度随角度测量不确定度的增加而变大。而且在使用最小偏向角法时,最小偏向角位置附近偏向角随入射角的改变变化不明显,但偏向角不明显变化的范围随三棱镜顶角的增大而减小。最后,给出了可获得折射率最小相对不确定度的最优方案,为三棱镜折射率的精确测量提供了理论依据。

**关键词** 测量; 折射率; 分光计; 棱镜; 不确定度

**中图分类号** O435.1 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP54.121201

## Accurate Measurement of Refractive Index of Triangular Prism

Meng Yun<sup>1</sup>, Yan Baoluo<sup>1</sup>, Fan Daihe<sup>2,3</sup>, Jia Xinyan<sup>2,3</sup>, Liu Qijun<sup>2,3</sup>, Wei Yun<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>*School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 611756, China;*

<sup>2</sup>*Physical Experiment Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 611756, China;*

<sup>3</sup>*National Demonstration Center for Experimental Physics Education, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 611756, China*

**Abstract** Based on the measurement principle of refractive index of triangular prism, the relative uncertainty is theoretically analyzed by using minimum deviation angle method, glancing incidence method and vertical bottom edge incidence method respectively. The results show that the relative uncertainty of the refractive index decreases with the increasing of the vertex angle of the triangular prism. The effect of the beams with different wavelengths on the relative uncertainty of the refractive index is small. And the relative uncertainty of the refractive index increases with the increasing of the uncertainty of the angulation. Moreover, when minimum deviation angle method is used, the effect of the deviation angle near the minimum deviation angle position on the incident angle is not obvious. But the unapparent variation range of the deviation angle decreases with the increasing of the vertex angle of the triangular prism. Finally, the optimal scheme is provided for obtaining the minimum relative uncertainty of refractive index, which provides a theoretical basis for the accurate measurement of the refractive index of the triangular prism.

**Key words** measurement; refractive index; spectrometer; prism; uncertainty

**OCIS codes** 120.5710; 230.5480; 260.2030

## 1 引言

折射率是表征介质材料光学性质的一个重要参数,随着精密光学仪器的发展,对折射率的测量精度要求越来越高。在光学玻璃的生产和检测过程中,折射率对光学器件的质量具有重要的影响<sup>[1-3]</sup>,因此对折射率

**收稿日期:** 2017-07-03; **收到修改稿日期:** 2017-07-13

**基金项目:** 国家自然科学基金青年科学基金(51402244)

**作者简介:** 孟赞(1996—),男,本科生,主要从事量子光学方向的研究。E-mail: 15528083820@163.com

**导师简介:** 樊代和(1981—),男,博士,讲师,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: dhfan@swjtu.edu.cn(通信联系人)

的精确测量具有重要意义。Hori 等<sup>[4-6]</sup>发表这方面的成果中显示其测量精度高于 $\pm 3 \times 10^{-5}$ ,甚至可达到 $\pm 3 \times 10^{-6}$ 。

分光计是大学物理实验中最常用的精密测量角度的仪器之一,大多数高校都开设分光计测量折射率的实验<sup>[7]</sup>。其中三种最常用的测量方法,分别为最小偏向角法<sup>[8]</sup>、掠入射法<sup>[9]</sup>和垂直底边入射法<sup>[1]</sup>。目前,周文平等<sup>[10]</sup>提出了一种精确测量棱镜材料折射率的改进方法,并通过测量数据来计算折射率,误差不超过 $\pm 0.015\%$ ;单明等<sup>[11-12]</sup>从测量实验数据的角度计算了不同方法测量折射率存在的误差;周凯宁等<sup>[13-14]</sup>通过实验数据计算不确定度,对比了各种测量折射率方法的优劣;刘才明等<sup>[15-16]</sup>通过数值模拟得到最小偏向角法测量三棱镜折射率时,对三棱镜的顶角有一定要求的结论;葛松华等<sup>[17]</sup>通过数值模拟分析最小偏向角法测量中临界角位置的不确定度,并提出克服临界角不确定度的操作方法;王雁冰<sup>[18]</sup>通过数值模拟得出了折射率与最小偏向角和顶角的关系。然而,实验数据测量过程中的一些因素,如分光计是否调整到最佳状态、数据读取存在偶然误差、实验环境等都会造成实验数据具有一定的误差,最终导致以上所提到的通过实验数据来评价三种测量折射率精度的方法说服力不强。到目前为止,还未有报道从理论上详细分析以上三种测量折射率方法精度优劣的报道。鉴于此,本文从分光计测量三棱镜折射率的实验原理出发,从理论上对大学物理实验中最常用的最小偏向角法、掠入射法、垂直底边入射法等三种折射率测量方法进行折射率相对不确定度的分析。本文的分析结果对大学物理实验中精确测量折射率具有一定的指导意义。

## 2 折射率相对不确定度分析

### 2.1 测量原理

目前,大学物理实验中常用的三种测量三棱镜折射率方法的光路图如图 1 所示。其中(a)图为最小偏向角法,(b)图为掠入射法,(c)图为垂直底边入射法, $A$  为三棱镜顶角, $i$  为入射角, $\delta$  为偏向角, $\theta$  和  $\alpha$  为出射角。

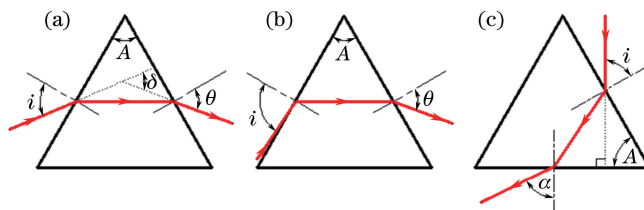


图 1 测量三棱镜折射率原理图。(a)最小偏向角法;(b)掠入射法;(c)垂直底边入射法

Fig. 1 Schematic diagram of measuring the refractive index of triangular prism. (a) Minimum deviation angle method; (b) glancing incidence method; (c) vertical bottom edge incidence method

假设三棱镜的顶角为  $A$ ,对于最小偏向角法[如图 1(a)所示],当入射角等于出射角(即  $i = \theta$ )时,有  $\delta = \delta_{\min}$ , $\delta_{\min}$  即为最小偏向角,此时折射率  $n$  的计算公式为

$$n = \frac{\sin(\delta_{\min} + A)/2}{\sin A/2} \quad (1)$$

对于掠入射法[如图 1(b)所示],当入射角以  $i = 90^\circ$  光线掠入射时,有  $\theta = \theta_{\min}$ ,此时折射率  $n$  的计算公式为

$$n = \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_{\min} + \cos A}{\sin A}\right)^2 + 1} \quad (2)$$

对于垂直底边入射法[如图 1(c)所示],折射率  $n$  的计算公式为

$$n = \sqrt{\sin^2 \alpha + (1 + \sin \alpha \cdot \cot A)^2} \quad (3)$$

从(1)~(3)式可以看出,上述三种测量三棱镜折射率的方法均只与两个角度的直接测量量有关,即只要在实验中能够精确测量出顶角  $A$  和另外一个角度(如最小偏向角、最小出射角等),代入相应的公式便可求得三棱镜的折射率。因此,角度的测量不确定度直接影响着折射率的测量精度。

目前大学物理实验室中三棱镜的材质一般为 K9 玻璃,俞胜清等<sup>[19-20]</sup>对该玻璃的色散关系进行了测定,给出折射率与波长的关系为

$$n = 1.50805 + \frac{2588.92498}{\lambda^2} + \frac{1.92102 \times 10^8}{\lambda^4}, \quad (4)$$

式中  $\lambda$  为波长, 单位为 nm。实验选 GP20Hg 型汞灯谱线中亮度较高的  $\lambda = 546.1$  nm 的绿光进行分析, 结合 (4) 式可得到对应的折射率  $n = 1.51889$ 。

## 2.2 顶角 $A$ 对折射率相对不确定度的影响

由 (1)~(3) 式可得到最小偏向角法、掠入射法、垂直底边入射法中  $n$  的相对不确定度的理论公式分别为

$$\frac{u_n}{n} = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \delta_{\min}}\right)^2 \left(\frac{u_{\delta_{\min}}}{n}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial A}\right)^2 \left(\frac{u_A}{n}\right)^2}, \quad (5)$$

$$\frac{u_n}{n} = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \theta_{\min}}\right)^2 \left(\frac{u_{\theta_{\min}}}{n}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial A}\right)^2 \left(\frac{u_A}{n}\right)^2}, \quad (6)$$

$$\frac{u_n}{n} = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \alpha}\right)^2 \left(\frac{u_{\alpha}}{n}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial A}\right)^2 \left(\frac{u_A}{n}\right)^2}, \quad (7)$$

式中  $u_A$  为测量顶角的不确定度,  $u_{\delta_{\min}}$  为测量最小偏向角的不确定度,  $u_{\theta_{\min}}$ 、 $u_{\alpha}$  为测量出射角的不确定度。 $u_n/n$  越小, 表明折射率的测量精度越高。考虑到实验在分光计上进行, 假设角度测量的不确定度为分光计的最小分度值  $1'$ , 选择  $\lambda = 546.1$  nm,  $u_A = 1'$ ,  $u_{\delta_{\min}} = 1'$ ,  $u_{\theta_{\min}} = 1'$ ,  $u_{\alpha} = 1'$ ,  $n = 1.51889$ , 代入 (5)~(7) 式中, 可得到三种测量方法中折射率相对不确定度随顶角  $A$  的变化关系如图 2 所示。图 2 中黑色实线表示最小偏向角法; 红色虚线表示掠入射法; 蓝色点划线表示垂直底边入射法。

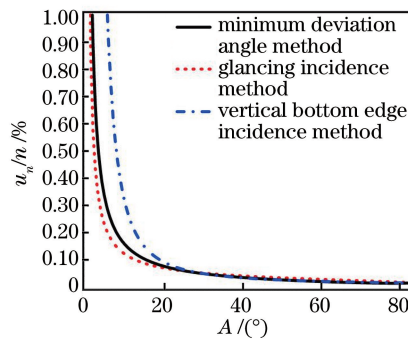


图 2 三种方法的折射率相对不确定度与顶角的关系

Fig. 2 Relationship between relative uncertainty of refractive index and vertex angle for three methods

从图 2 中可以看出, 若只考虑三棱镜顶角大小的影响, 三种方法所得到的折射率相对不确定度都随顶角的增大而减小。当选择三棱镜顶角  $A < 25^\circ$  时, 三种方法测得的折射率相对不确定度均大于  $0.05\%$  (此时折射率的不确定为  $0.00076$ , 即折射率的测量可精确到小数点后第 3 位), 且随顶角的变化相对较快。相比而言, 用掠入射法测量折射率可获得最小的相对不确定度。当选择三棱镜顶角  $A > 25^\circ$  时, 三种方法所测得的折射率相对不确定度几乎没有差别。例如当  $A = 80^\circ$  时, 折射率的相对不确定度只有约  $0.02\%$  (此时折射率的不确定为  $0.00030$ )。为了最大程度上得到最小的折射率相对不确定度, 在下文中如无特别说明, 均选用  $A = 80^\circ$  的三棱镜进行分析。值得注意的是, 当顶角  $A > 82^\circ$  左右时, 光线在三棱镜的出射面上将发生全反射, 即 (1)~(3) 式不再成立。因此图 2 中横坐标的最大值被限定在  $A < 82^\circ$  范围内。

## 2.3 不同入射光波长对折射率相对不确定度的影响

事实上, 测量三棱镜材料的折射率时, 可以分析实验中哪个波长可获得对应折射率的最精确值。根据 (1)~(7) 式, 令  $A = 80^\circ$ ,  $u_A = 1'$ ,  $u_{\delta_{\min}} = 1'$ ,  $u_{\theta_{\min}} = 1'$ ,  $u_{\alpha} = 1'$ , 可得到折射率的相对不确定度与入射光波长的关系曲线, 如图 3 所示。图 3 中实线、虚线、点划线分别为最小偏向角法、掠入射法、垂直底边入射法时的情况。

从图 3 中可以看出, 在可见光波长范围内, 对于最小偏向角法,  $u_n/n$  随着  $\lambda$  的增大而减小; 对于掠入射法和垂直底边入射法,  $u_n/n$  几乎不随  $\lambda$  变化。在相同的入射光波长下, 最小偏向角法的测量精度明显优于其他两种方法。

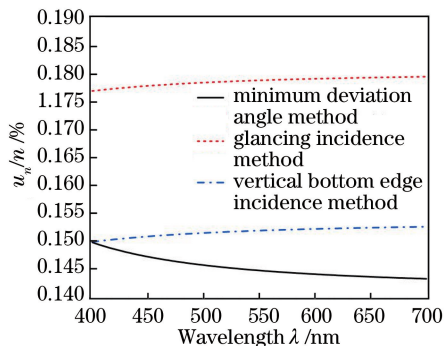


图3  $A = 80^\circ$ 时折射率的相对不确定度与入射光波长的关系

Fig. 3 Relationship between relative uncertainty of refractive index and wavelength of incident light when  $A = 80^\circ$

但是从纵坐标的数量级中可以看出,在可见光波长范围内,所得  $u_n/n$  均在万分之一量级(即折射率的不确定度均小于 0.00027)。而且,三种方法所得到的  $u_n/n$  最大只有不到 0.005% 的差别,因此可认为波长对三种方法所得折射率相对不确定度的影响差别不大。

## 2.4 测量角度的不确定度对折射率相对不确定度的影响

从(1)~(3)式可以看出,折射率的测量除了与三棱镜顶角  $A$  的测量有关外,还和另一个角度(最小对于最小偏向角法为最小偏向角  $\delta_{\min}$ ,对于掠入射法为出射角  $\theta_{\min}$ ,对于垂直底边入射法为出射角  $\alpha$ )的测量有关。根据(5)~(7)式,令  $A = 80^\circ$ ,  $n = 1.51889$ ,可研究折射率的相对不确定度与角度测量不确定度的关系,结果如图4所示。图4中黑色线表示最小偏向角法,红色线表示掠入射法,蓝色线表示垂直底边入射法;实线表示  $u_n/n$  与  $u_A$  的关系,虚线表示  $u_n/n$  与另外一个角度测量不确定度的关系。

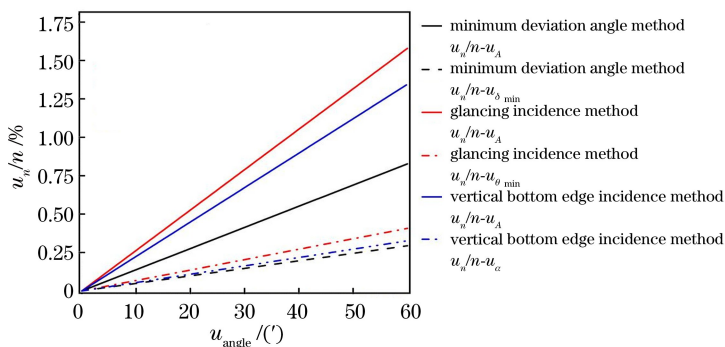


图4 三种方法的折射率相对不确定度与角度不确定度的关系

Fig. 4 Relationship between relative uncertainty of refractive index and angle uncertainty with three methods

图4中,为了方便比较,在研究折射率相对不确定度与某一个角度不确定度的关系时,选另一个角度不确定度为0。例如研究最小偏向角法  $u_n/n$  与  $u_{\delta_{\min}}$  的关系时(图4中黑色虚线),选取  $u_A = 0$ ;而研究  $u_n/n$  与  $u_A$  的关系时(图4中黑色实线),选取  $u_{\delta_{\min}} = 0$ 。

从图4中可以看出,不论对于哪种测量方法,只要测量角度的不确定度增大,对应的折射率相对不确定度均将增大,而且顶角的不确定度对测量折射率相对不确定度的影响(实线)总是大于另一个角度(对于最小偏向角法为最小偏向角  $\delta_{\min}$ ,对于掠入射法为出射角  $\theta_{\min}$ ,对于垂直底边入射法为出射角  $\alpha$ )的不确定度(虚线)对测量折射率相对不确定度的影响。由此表明,为了获得相同的折射率相对不确定度,实验中顶角  $A$  应比另一个角度的测量精度要求高一些。

从图4中还可以看出,对于最小偏向角法,当角度的不确定度达到  $60'$  时,顶角  $A$  和最小偏向角  $\delta_{\min}$  对折射率相对不确定的影响分别可以达到 0.83% 和 0.29%;对于掠入射法,当角度的不确定度达到  $60'$  时,顶角  $A$  和最小出射角  $\theta_{\min}$  对折射率相对不确定的影响分别可以达到 1.58% 和 0.41%;对于垂直底边入射法,当角度的不确定度达到  $60'$  时,顶角  $A$  和出射角  $\alpha$  对折射率相对不确定的影响分别可以达到 1.34% 和 0.33%。因此比较三种测量方法可知,掠入射法中顶角  $A$  的不确定度  $u_A$  对折射率相对不确定度的影响最大,最小偏



向角法中最小偏向角  $\delta_{\min}$  的不确定度  $u_{\delta_{\min}}$  对折射率相对不确定度的影响最小。假设三种方法中各直接测量量的相对不确定度均为  $60'$  (即  $u_A = u_{\delta_{\min}} = u_{\theta_{\min}} = u_a = 60'$ )，可以计算得到总的折射率相对不确定度分别为  $0.58\%$  (最小偏向角法)、 $1.07\%$  (掠入射法)、 $0.91\%$  (垂直底边入射法)，结果表明若不考虑其他因素的影响，最小偏向角法测量折射率的精度最高。

## 2.5 其他因素对折射率测量影响的讨论

周文平等<sup>[10]</sup>报道了利用最小偏向角法进行折射率的测量实验时，发现当出射光线在最小偏向角位置附近，即使载物台转动一较大的角度(即入射角改变一较大的角度)，在望远镜视野中出射光线的角度位置变化也不大。因此利用该方法测量折射率时，给最小偏向角的测量带来了较大的不确定度值。根据最小偏向角法测量折射率的光路图[1(a)]，由折射定律可得出入射角  $i$  与偏向角  $\delta$  的关系为

$$\delta = \arcsin \left[ n \cdot \sin \left( A - \arcsin \frac{\sin i}{n} \right) \right] - A + i. \quad (8)$$

根据(8)式，假设  $n=1.51889$ ，可研究选取不同顶角  $A$  时，偏向角  $\delta$  随入射角  $i$  的变化关系，如图5所示。在图5中， $A=50^\circ$  的曲线用红色实线表示， $A=60^\circ$  的曲线用蓝色实线表示， $A=70^\circ$  的曲线用黑色实线表示， $A=80^\circ$  的曲线用绿色实线表示。图5中竖虚线为各曲线中纵坐标最小值(即最小偏向角)  $+1'$  所对应的横坐标。

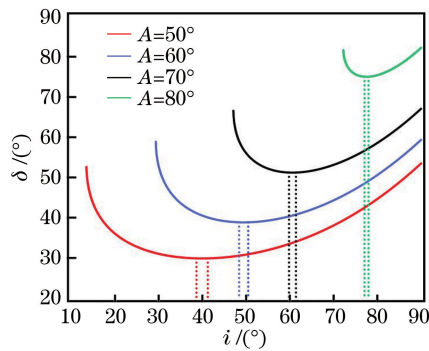


图5 最小偏向角法的偏向角与入射角的关系

Fig. 5 Relationship between deviation angle and incident angle with minimum deviation angle method

从图5中可以看出，对于不同的顶角  $A$ ，均存在一个偏向角的最小值  $\delta_{\min}$ 。随着顶角  $A$  的增大，最小偏向角  $\delta_{\min}$  也将增大。但是，每条曲线在  $\delta_{\min}$  附近的变化均比较平缓，也就是说当入射角在该范围内变化几度甚至十几度，偏向角几乎不变。这就是实验中出射光在最小偏向角位置附近时，转动载物台而出射光位置几乎不变的原因。上述结果将导致最小偏向角测量法具有比较大的随机性。由于人眼可以分辨的最小角度约为  $1'$ <sup>[21]</sup> (当最小偏向角测量值比真实值偏大  $1'$  时，测得折射率的值将在小数点后第4位变化)，即转动载物台以改变入射角时，若偏向角改变的角度小于  $1'$ ，人眼是分辨不出来的。在该过程中载物台转过的角度(入射角的改变量)在图5中可用曲线下方的两条竖虚线间的横坐标差  $\Delta$  表示。从曲线上可以计算得出  $\Delta_{A=50^\circ} \approx 2^\circ 36'$ ， $\Delta_{A=60^\circ} \approx 2^\circ 5'$ ， $\Delta_{A=70^\circ} \approx 1^\circ 35'$ ， $\Delta_{A=80^\circ} \approx 56'$ 。可以看出， $\Delta$  随  $A$  的增大而减小。因此，可以认为利用最小偏向角法测量三棱镜的折射率时，选择顶角较大的三棱镜可以尽量减小最小偏向角的不确定范围，进而在一定程度上降低折射率的相对不确定度。这一结果与上文分析不同的顶角对折射率相对不确定度的影响结论相同。

## 3 结 论

本文首先分析不同的顶角对折射率相对不确定度的影响，结果表明三种方法得到的折射率相对不确定度都随顶角的增大而减小。因此在不发生全反射的条件下，为了获得最小的折射率相对不确定度，建议尽量采用顶角较大的三棱镜来完成实验。其次，研究不同波长的入射光对测量折射率相对不确定度的影响，结果表明在可见光范围内，三种方法对不同波长对应的折射率相对不确定度的影响差别不大。再者，研究测量角度的不确定度对折射率相对不确定度的影响，结果表明在相同的角度不确定度情况下，最小偏向角法可获得最佳的折射率测量精度。特别地，当选用顶角  $A=80^\circ$ ， $\lambda=546.1 \text{ nm}$ ，其他直接测量量的不确定度均为  $60'$

时,利用最小偏向角法测量折射率的相对不确定度可达到 0.58%。最后,分析最小偏向角法在不同顶角情况下,偏向角随入射角的变化关系。结果表明当人眼可分辨最小偏向角变化为 1'时,入射角的变化范围随顶角增大而减小,进一步证明使用大顶角三棱镜对测量折射率的优越性。本文研究得出的结论为利用分光计精确测量三棱镜折射率提供了理论依据。

### 参 考 文 献

- [1] Mi Baoyong. Photoelectric automatic refractometer with high precision in the wavelength range 365 to 12000 nm[J]. Optics and Precision Engineering, 1998, 6(3): 79-84.  
米宝永. 光谱范围从 365 至 12000 nm 的高精度光电自动折射仪[J]. 光学精密工程, 1998, 6(3): 79-84.
- [2] Zhou Jinzhao, Chen Zhiqing, Huang Zuohua. Accurate measurement of the prism refractive index by use of total reflection principle[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2013, 50(1): 011201.  
周进朝, 陈志青, 黄佐华. 利用全反射原理精确测量棱镜折射率[J]. 激光与光电子学进展, 2013, 50(1): 011201.
- [3] Meng Qinghua, Xiang Yang. Novel high accurate measurement method for refractive index of optical glass[J]. Optics and Precision Engineering, 2008, 16(11): 2114-2119.  
孟庆华, 向阳. 高精度测量光学玻璃折射率的新方法[J]. 光学精密工程, 2008, 16(11): 2114-2119.
- [4] Hori Y, Hirai A, Minoshima K, *et al.* High-accuracy interferometer with a prism pair for measurement of the absolute refractive index of glass[J]. Appl Opt, 2009, 48(11): 2045-2050.
- [5] Cao M, Wang X, Yan J C. *et al.* Opto-mechanical design and error analysis of digital system measuring refractive index [J]. International Journal of Control and Automation, 2016, 9(4): 29-38.
- [6] Zhang Jianfeng, Cao Xuedong, Wu Shibin, *et al.* Temperature effect on high precision measurement of refractive index homogeneity of optical glass[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(1): 011203.  
张建锋, 曹学东, 吴时彬, 等. 温度对高精度光学玻璃折射率均匀性检测的影响[J]. 激光与光电子学进展, 2012, 49(1): 011203.
- [7] Hu Xiaopeng, Gao Wenli, Wan Chunhua. University physics experiment (science)[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 2012: 158-167.  
胡小鹏, 高文莉, 万春华. 大学物理实验(理科)[M]. 南京: 南京大学出版社, 2012: 158-167.
- [8] Astrua M, Pisani M. Validation of a novel technique for the measurement of the refractive index of a prism by means of interlaboratory comparison[J]. Measurement, 2009, 42(10): 1546-1549.
- [9] Wan J, Lu Y, Li X, *et al.* Liquid prism based refractometer[J]. Journal of Optics, 2017, 19(5): 055705.
- [10] Zhou Wenping, Song Lianke, Wang Lan, *et al.* An improved method for measuring refractive index of prismatic materials[J]. Journal of Qufu Normal University(Natural Science), 2007, 33(1): 72-74.  
周文平, 宋连科, 王兰, 等. 精确测量棱镜材料折射率的改进方法[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2007, 33(1): 72-74.
- [11] Shan Ming, Liu Aihong. Demand and system error analysis of the photomicrometer adjustment [J]. Physical Experiment of College, 2004, 17(2): 54-57.  
单明, 刘爱红. 分光计的调节要求及系统误差分析[J]. 大学物理实验, 2004, 17(2): 54-57.
- [12] Wang Xuedong, Liu Ping, Li Zheng, *et al.* Discussion on the precision of triple prism in the spectrometer experiment [J]. Physical Experiment, 1998, 18(5): 46-46.  
王雪冬, 刘平, 李正, 等. 关于分光计实验中三棱镜精度的讨论[J]. 物理实验, 1998, 18(5): 46-46.
- [13] Zhou Kaining, Xiao Ning, Chen Qi, *et al.* Comparing of three prism refractive index measuring methods[J]. Research and Exploration in Laboratory, 2011, 30(4): 22-25.  
周凯宁, 肖宁, 陈棋, 等. 3 种测量三棱镜折射率方法的对比[J]. 实验室研究与探索, 2011, 30(4): 22-25.
- [14] Han Shengyang, Wu Dianhong, Hou Xiaobo. Measuring refractive index of triple prism by any angle of deflection[J]. Physical Experiment of College, 1995, 8(4): 4-7.  
韩胜阳, 吴殿鸿, 侯晓波. 用任意偏向角测量三棱镜折射率[J]. 大学物理实验, 1995, 8(4): 4-7.
- [15] Liu Caiming. The evaluation of uncertainty in measurement of index of refractive of prism[J]. Journal of Zhejiang University (Sciences Edition), 2000, 27(1): 53-58.  
刘才明. 三棱镜折射率测量结果的不确定度评定[J]. 浙江大学学报(理学版), 2000, 27(1): 53-58.

- [16] Zhu Kun. Numerical study of least deviation angular[J]. Journal of Liupanshui Teachers College, 2011, 23(6): 25-27.  
祝昆. 数值计算方法确定最小偏向角的大小[J]. 六盘水师范高等专科学校学报, 2011, 23(6): 25-27.
- [17] Ge Songhua, Tang Yaming. Discussion on measuring the refractive index of prism[J]. Physical Experiment of College, 2010, 23(1): 7-8.  
葛松华, 唐亚明. 测量玻璃折射率实验的讨论[J]. 大学物理实验, 2010, 23(1): 7-8.
- [18] Wang Yanbing. The influence of different vertex angle and refractive index to the minimum deviation angle of triangular prism[J]. Yinshan Academic Journal (Natural Science Edition), 2007, 21(4): 47-49.  
王雁冰. 不同顶角及折射率对三棱镜最小偏向角的影响[J]. 阴山学刊(自然科学版), 2007, 21(4): 47-49.
- [19] Yu Shengqing, Huang Xiaojun. Determination of dispersion relation of corrugated glass K9 prism[J]. Science and Technology Consulting Herald, 2011(24): 216-218.  
俞胜清, 黄晓俊. 冕牌玻璃 K9 棱镜色散关系的测定[J]. 科技创新导报, 2011(24): 216-218.
- [20] Li Xishan, Jiang Haiying, Jiang Anmin. Dispersion measurement of optical glass and discussion of the approximate calculation method[J]. Acta Optica Sinica, 1995, 15(2): 206-211.  
李锡善, 蒋海英, 蒋安民. 光学玻璃的色散特性测量及近似计算方法的讨论[J]. 光学学报, 1995, 15(2): 206-211.
- [21] Lu Hui. Optics[M]. Shanghai: East China University of Science and Technology Press, 2014: 120.  
陆慧. 光学[M]. 上海: 华东理工大学出版社, 2014: 120.