

基于拉普拉斯方程的渐进多焦点眼用 镜片轮廓线优化设计

张皓^{1,2}, 唐运海¹, 吴泉英¹, 陈晓翌²

¹苏州科技大学数理学院江苏省微纳热流技术与能源应用重点实验室, 江苏 苏州 215009;

²苏州苏大明世光学股份有限公司江苏省企业研究生工作站, 江苏 苏州 215028

摘要 设计渐进多焦点眼用镜片(PAL)的轮廓线 u 以得到近用区可视范围广且渐变通道长度变短的渐进多焦点眼用镜片。对渐进多焦点眼用镜片采取对称设计, 设置子午线上 u 的变化曲线作为拉普拉斯方程的边界条件, 并给出边界条件的具体形式。结合自然边界条件, 运用分离变量法和傅里叶变换法求解拉普拉斯方程的解析解。设计实例表明, 该设计方法不仅能使渐进多焦点眼用镜片拥有宽阔的近用区可视范围, 还能使渐进多焦点眼用镜片的渐变通道变短。将设计数据进行实际加工, 并对加工获得的渐进多焦点眼用镜片进行测试分析, 结果表明设计与实际测试结果基本相符。

关键词 光学设计; 渐进多焦点眼用镜片; 拉普拉斯方程; 光焦度; 散光度

中图分类号 TH74 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP54.112201

Contour Line Optimization Design of Progressive Addition Lenses Based on Laplace Equation

Zhang Hao^{1,2}, Tang Yunhai¹, Wu Quanying¹, Chen Xiaoyi²

¹*Jiangsu Key Laboratory of Micro and Nano Heat Fluid Flow Technology and Energy Application, School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, Jiangsu 215009, China;*

²*Graduate Practice Station, Suzhou Mason Optics Co., Ltd., Suzhou, Jiangsu 215028, China*

Abstract The contour u of the progressive addition lens (PAL) surface is designed to obtain a PAL whose near visual area is obviously expanded and the progressive channel length is decreased. The PAL is designed symmetrically. The curve of u at meridian line is set as the boundary conditions of the Laplace equation, and the specific form of the boundary conditions is given. Combined with the natural boundary condition, the analytic solution of the Laplace equation is solved using the separation of variables method and the Fourier transform method. The design example shows that this design method not only expands the wide range of near zone visible area of PAL, but also shortens the progressive channel length. The design data are processed actually, and the PAL obtained is tested and analyzed. The results show that the design and the actual test results are basically consistent.

Key words optical design; progressive addition lenses; Laplace equation; focal power; astigmatism

OCIS codes 220.3630; 220.4610

收稿日期: 2017-06-08; **收到修改稿日期:** 2017-06-18

基金项目: 国家自然科学基金(61378056)、江苏省“十三五”光学工程重点学科(20168765)、江苏省高校优势学科建设工程(2015PAPD)、江苏省研究生科研创新计划项目(KYLX15_1313)、苏州科技大学研究生科研创新计划项目(SKCX16_059)、苏州科技大学协同创新项目、苏州科技大学科研基金青年项目(XKQ201614)、江苏省“六大人才高峰”第十二批资助项目(DZXX-026)、苏州市重点产业技术创新项目(SYG201646)

作者简介: 张皓(1992—), 男, 硕士研究生, 主要从事非球面光学设计方面的研究。E-mail: 774348455@qq.com

导师简介: 吴泉英(1965—), 女, 博士, 教授, 主要从事光学设计与信息处理等方面的研究。

E-mail: wqycyh@sina.cn(通信联系人)

1 引言

渐进多焦点眼镜片(PAL)能同时满足视远与视近所需的光焦度。1959年,法国依视路公司成功研制出渐进多焦点眼镜片,并将其命名为 Varilux,自此,第一代渐进镜出现^[1-2]。2000年,依视路公司设计出第5代渐进镜,可使佩戴者得到更完美的空间视觉和知觉^[3-4]。

目前,国内外公布的渐进多焦点眼镜片的设计一般有 Maitenaz 方法^[5-6]、Steele 方法^[7]、Winthrop 方法^[8-10]等。这三种设计方法都包括子午线设计、轮廓线设计等多个设计步骤,每个步骤在其设计方法上都有拓展空间。近年来国内出现了关于渐进多焦点眼镜片子午线设计的研究^[11-12]。2006年,本课题组对不同轮廓线设计进行研究^[13],轮廓线一般可分为直线型、二次曲线型和柱面簇曲线型等。直线型轮廓线设计方便,但光焦度变化时产生的像散和畸变较大;二次曲线型轮廓线设计较灵活,但对设计水平要求较高,其镜片通道长度较长,近用区偏下;柱面簇曲线型镜片具有较小的最大散光,但其近用区不够宽阔。本文提出一种采用子午线上轮廓线的分布值作为边界条件解拉普拉斯方程设计渐进多焦点眼镜片轮廓线的方法,该方法能够有效增大远用区和近用区范围,减小渐变通道长度,且最大散光较小。

2 渐进多焦点眼镜片的基本结构和设计思想

如图1所示,渐进多焦点眼镜片表面分为远用区Ⅰ、近用区Ⅱ、渐变通道Ⅲ和散光区Ⅳ。 A 为镜片上视远参考点, B 为镜片上视近参考点。远用区位于渐进多焦点眼镜片上半部分的宽阔区域,具有矫正视远能力、提供清晰和宽阔视野的功能;近用区用于观察近物,视觉清晰范围较小;渐变通道为连接远用区和近用区的过渡区域,其光焦度从视远参考点 A 到视近参考点 B 平滑渐变,用于观察中等距离物体,也是渐进镜片区别于双光镜的主要特征区域,一般较窄。从 A 点到 B 点光焦度的增量称为渐进多焦点眼镜片的附加光焦度(ADD)。远用区、近用区和渐变通道统称为有效视觉区;其他区域为散光区,不能用于矫正视力。

在笛卡尔坐标系中,原点在镜片中心, y 轴水平向右, x 轴竖直向下, z 轴垂直于纸面指向读者,长度单位为 mm。 A 到 B 的连线称为子午线,其长度为 h 。 A 点到镜片中心的距离为 l 。

为了设计覆盖整个镜片表面的曲率半径 R ,引入一个中间变量 u , u 在镜片上的等值曲线簇称为轮廓线。图2是一种轮廓线分布图,图中 A 点和 B 点连线为子午线。可以看出,每条轮廓线与子午线有且只有一个交点。对渐进多焦点眼镜片子午线的设计^[5]即设计子午线上的 u 值与渐进多焦点眼镜片表面曲率半径的函数关系,也就是设计整个镜片上 u 与 R 的关系 $R(u)$ 。

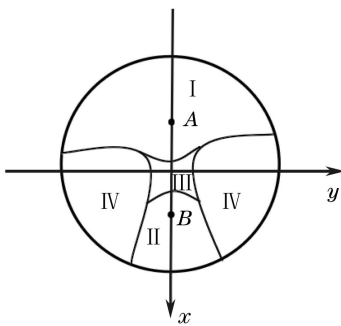


图1 渐进多焦点眼镜片表面区域划分示意图

Fig. 1 Schematic of surface area division of the PAL

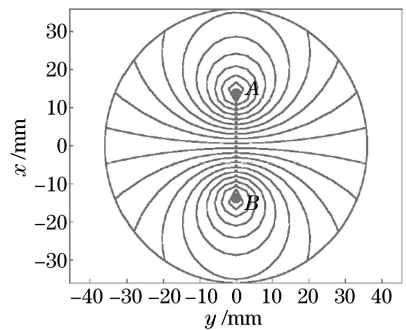


图2 轮廓线分布图

Fig. 2 Distribution map of the contours

渐进多焦点眼镜片的表面矢高表示为

$$z(x, y) = \zeta(u) - \{R^2(u) - [x - \xi(u)]^2 - [y - \eta(u)]^2\}^{1/2}, \quad (1)$$

式中 (ξ, η, ζ) 为对应球面的曲率中心^[11],曲率中心为 u 的积分函数。

3 渐进多焦点眼镜片的轮廓线设计

3.1 拉普拉斯方程

由于渐进多焦点眼镜片表面的曲率半径 R 是轮廓线 u 的函数。为了防止镜片表面曲率半径变化过

快,散光太大,轮廓线函数 $u(x, y)$ 必须平滑渐变,即函数 $u(x, y)$ 必须满足拉普拉斯方程^[8]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

要使拉普拉斯方程的解满足渐进多焦点眼镜片轮廓线的要求,解(2)式之前,必须对其边界条件进行合理设置。

镜片采用对称设计,即关于子午线对称,将子午线上 u 的变化曲线作为边界条件设计轮廓线,对子午线右半平面进行求解,左半平面由对称而得。此拉普拉斯方程需满足:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, y > 0, -\infty < x < +\infty, \quad (3)$$

$$u|_{y=0} = f(x), -\infty < x < +\infty, \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u = 0, -\infty < x < +\infty, \quad (5)$$

式中 $f(x)$ 为子午线上 u 的变化曲线,(5)式为自然边界条件。

3.2 设置拉普拉斯方程的边界条件

边界条件边界条件远用区参考点 A 处的 u 值为 $-l$,近用区参考点 B 处的 u 值为 $h-l$,即子午线上远用区参考点 A 处的值 $u(-l, 0)$ 和近用区参考点 B 处的值 $u(h-l, 0)$ 边界条件远用区满足:

$$\begin{cases} u(-l, 0) = -l \\ u(h-l, 0) = h-l \end{cases} \quad (6)$$

为了简化设计,将视远点和视近点设置为关于中心点对称,即 $h=2l$,此时,拉普拉斯方程的边界条件应该满足:

$$f(x) = \frac{kx}{x^2 + b^2}, \quad (7)$$

式中 x 为镜片的纵向坐标, $k=l^2+b^2$, b 为调节系数。

另外,这里设拉普拉斯方程满足自然边界条件,即在无限远处为零。

3.3 轮廓线求解

求解拉普拉斯方程一般有分离变量法、傅里叶变换法、格林函数法等三种方法^[14],运用分离变量法、傅里叶变换法分别求解 3.1 节的拉普拉斯方程,以验证求解的准确性。

1) 分离变量法^[14]

设(3)式有变量分离的形式解 $u(x, y) = X(x)Y(y)$, 代入(3)式得到:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$Y'' - \lambda Y = 0, \quad (9)$$

式中 λ 是分离常数。当 $\lambda > 0$ 时,(8)式的通解为

$$X(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x, \quad (10)$$

式中 $\omega = \sqrt{\lambda}$, a, b 为任意常数。相应地,(9)式的通解为

$$Y(y) = c e^{\omega y} + d e^{-\omega y}, \quad (11)$$

式中 c, d 为任意常数。

自然边界条件(5)式要求 $c=0$, 于是,满足(3)和(5)式的解为

$$u_{\omega}(x, y) = [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] e^{-\omega y}, \quad (12)$$

式中 $A(\omega) = ad, B(\omega) = bd$ 。为了满足边界函数 $f(x)$,需要对(12)式进行叠加以构成一般解。现在变量 ω 的变化是连续的,因此一般解是对 ω 的积分,即:

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] e^{-\omega y} d\omega. \quad (13)$$

由(4)式得到:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega, \quad (14)$$

(14)式是边界函数 $f(x)$ 的傅里叶积分表示式,其中展开系数为

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \\ B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \end{cases} \quad (15)$$

将(7)式代入(15)式中,得到:

$$\begin{cases} A(\omega) = 0 \\ B(\omega) = k e^{-\omega b} \end{cases} \quad (16)$$

将(16)式代入(13)式中,可得轮廓线方程右半平面的解为

$$u(x, y) = k \frac{x}{(y+b)^2 + x^2} \quad (17)$$

将(17)式关于子午线对称,求得遍及整个镜片的轮廓线 $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \frac{kx}{(|y|+b)^2 + x^2} \quad (18)$$

2) 傅里叶变换法^[14]

对(3)~(5)式关于 x 作傅里叶变换,得到:

$$-\omega^2 U(\omega, y) + \frac{d^2 U(\omega, y)}{dy^2} = 0, \quad (19)$$

$$U|_{y=0} = F(\omega), \quad (20)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} U = C, \quad (21)$$

式中 C 为一个有限值。

(19)式的通解为

$$U(\omega, y) = C_1 e^{-\omega y} + C_2 e^{-\omega y}. \quad (22)$$

自然边界条件(21)式要求 $C_1 = 0$ (如果 $\omega < 0$) 或者 $C_2 = 0$ (如果 $\omega > 0$)。因此, (22)式可以写为

$$U(\omega, y) = F(\omega) e^{-|\omega|y}. \quad (23)$$

对(22)式反演,由逆傅里叶变换得:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-|\omega|y} e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \right] e^{-|\omega|y} e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [e^{-|\omega|y} e^{-i\omega(\xi-x)} d\xi] d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

因为:

$$F(e^{-\beta|t|}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|t|} e^{-i\omega x} dx = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}, \quad (25)$$

可以得到:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (26)$$

将(7)式代入(26)式,可得:

$$u(x, y) = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{\xi^2 + b^2} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = k \frac{x}{(y+b)^2 + x^2}, \quad (27)$$

这与根据分离变量法得到的(17)式的结果一致。

4 优化设计实例及分析

实例中镜片直径 $\varphi = 72$ mm, 远用区光焦度为 -1.2 D, 近用区光焦度为 0.6 D。所用镜片坯料前表面为球面, 光焦度为 2 D, 故设计镜片后表面的远用区光焦度为 3.2 D, 附加光焦度为 -1.8 D。渐变通道长度 $h =$

22 mm, 视远参考点 A 到镜片中心点 O 之间的距离 $l=11$ mm。镜片材料折射率为 1.532。子午线上边界条件由(6)式计算, b 取 15, 得到子午线上 u 的变化曲线如图 3 所示。

根据(18)式计算得到轮廓线分布, 轮廓线 $u(x, y)$ 如图 4 所示。

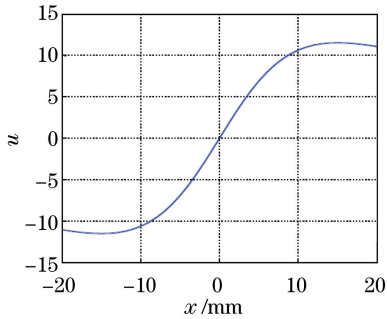


图 3 子午线处 u 的曲线图

Fig. 3 Curve of u on the meridian

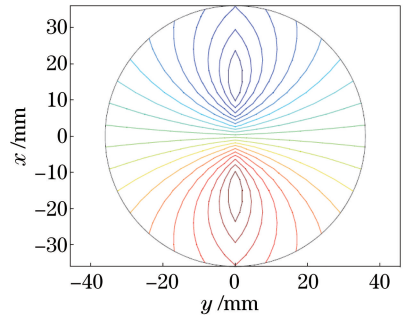


图 4 轮廓线 $u(x, y)$

Fig. 4 Contours of $u(x, y)$

将轮廓线分布 $u(x, y)$ 依次代入子午线表达式和(1)式, 计算出渐进多焦点眼镜片的矢高, 进而计算出渐进多焦点眼镜片后表面光焦度等值线和散光等值线分布, 如图 5 所示。

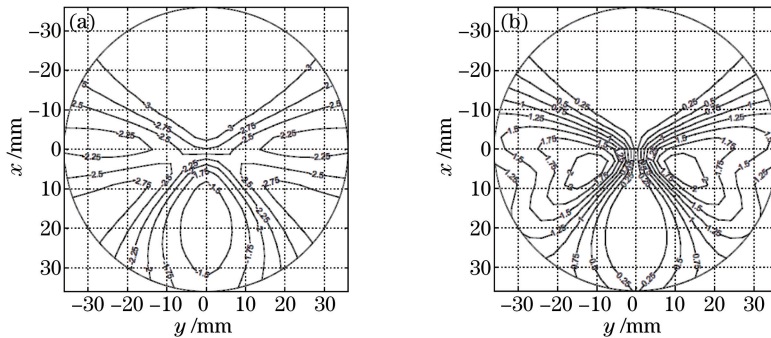


图 5 设计的渐进多焦点眼镜片后表面的(a)光焦度和(b)散光度图

Fig. 5 (a) Focal power and (b) astigmatism of back surface of the designed PAL

将镜片矢高数据 $z(x, y)$ 输入计算机, 经计算机数字控制(CNC)雕刻机铣磨并用复曲面精磨精抛机进行抛光, 制备出样品镜片。由于设计时采取的是对称设计, 而渐进镜片的视近点距中心点距离都大于视远点距中心点距离, 故输入时, 将矢高数据整体沿 x 正向平移 4 mm, 即图 5 中 $x=-10$ mm 对应实际加工图中 $x_1=-6$ mm。用以色列自由曲面检测仪(FFV)测试该样品镜片的光焦度和散光度分布, 如图 6 所示。

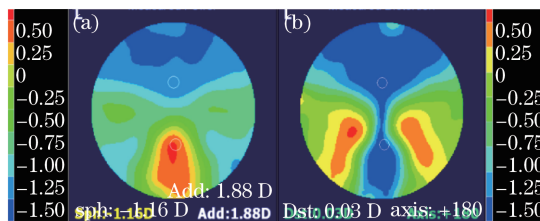


图 6 加工的渐进多焦点眼镜片的(a)光焦度和(b)散光分布图

Fig. 6 (a) Focal power and (b) astigmatism of the manufactured PAL

设计镜片后表面光学参数和加工镜片的光学参数如表 1 所示。从表 1 中可以看出: 渐进多焦点眼镜片的后表面面形与加工样品镜片的附加光焦度绝对值差异为 0.08 D, 最大散光偏差为 0.06 D。由于内渐进多焦点眼镜片与前弯匹配的影响^[15], 加工样品镜片的远用区视觉清晰范围($\Phi_{ast} < 0.25$ D, $x_1 = -10$ mm)的宽度比设计的后表面面形小 8 mm, 近用区视觉清晰范围($\Phi_{ast} < 0.25$ D, $x_1 = 15$ mm)的宽度比设计的后表面面形小 3 mm。

目前, 在相同附加光焦度下, 镜片光焦度和散光满足设计要求下的通道长度 h 一般都超过 25 mm, 但设计实例中的通道长度 $h=22$ mm。

表1 设计渐进多焦点眼镜片后表面和加工后镜片的光学参数

Table 1 Optical parameters of back surface of designed PAL and manufactured PAL

Item	Addition power /D	Maximum astigmatism /D	Width of the far zone ($\Phi_{ast} < 0.25$ D, $x_1 = -10$ mm) /mm	Width of the near zone ($\Phi_{ast} < 0.25$ D, $x_1 = 15$ mm) /mm
Back surface of designed PAL	-1.80	2.21	38	14
Manufactured PAL	-1.88	2.15	30	11

5 结 论

本研究对渐进多焦点眼镜片轮廓线的设计加以改进,采用子午线上 u 的分布函数为边界条件求解拉普拉斯方程的解析解,从而得到渐进多焦点眼镜片的轮廓线。从实际加工和测量结果分析可知,此设计方法能够有效扩大远用区和近用区的视觉清晰范围,减小渐变通道长度。

参 考 文 献

- [1] Guilino G H. Design philosophy for progressive addition lenses[J]. Applied Optics, 1993, 32(1): 111-117.
- [2] Bourdoncle B, Chauveau J P, Mercier J L. Traps in displaying optical performances of a progressive-addition lens[J]. Applied Optics, 1992, 31(19): 3586-3593.
- [3] Meister D J, Fisher S W. Progressive in the spectacle correction of presbyopia. Part 2: modern progressive lens technologies[J]. Clin Exp Optom, 2008, 91(3): 251-264.
- [4] Sheedy J, Hardy R F, Hayes J R. Progressive addition lenses-measurements and ratings[J]. Optometry, 2006, 77(1): 23-29.
- [5] Maitenaz B F. Ophthalmic lenses with a progressive varying focal power: US3687528[P]. 1972-08-29.
- [6] Maitenaz B F. Ophthalmic lenses with a progressive varying focal power: US3910691[P]. 1975-10-07.
- [7] Steele T, Mcloughlin H, Payne D. Progressive addition power lens: US6776486 B2[P]. 2004-10-17.
- [8] Winthrop J T. Progressive power ophthalmic lenses: US4861153[P]. 1989-10-29.
- [9] Winthrop J T. Progressive addition spectacle lens: US5123725[P]. 1992-06-23.
- [10] Winthrop J T. Progressive power ophthalmic lenses: US4514061[P]. 1985-04-30.
- [11] Wu Quanying, Qian Lin, Chen Hao, *et al.* Research on meridian lines design for progressive addition lenses[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(11): 3186-3191
吴泉英, 钱霖, 陈浩, 等. 渐进多焦点眼镜片的子午线设计研究[J]. 光学学报, 2009, 29(11): 3186-3191
- [12] Tang Yunhai, Wu Quanying, Chen Xiaoyi, *et al.* Optimization design of the meridian line of progressive addition lenses based on genetic algorithm[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(9): 0922005.
唐运海, 吴泉英, 陈晓翌, 等. 基于遗传算法的渐进多焦点镜片子午线优化设计[J]. 光学学报, 2014, 34(9): 0922005.
- [13] Wu Quanying, Qian Lin, Chen Hao, *et al.* Design methods of progressive addition lenses[J]. Laser Journal, 2009, 30(6): 12-14.
吴泉英, 钱霖, 陈浩, 等. 渐进多焦点镜片的设计方法[J]. 激光杂志, 2009, 30(6): 12-14.
- [14] Gu Qiao. Methods of mathematical physics[M]. Beijing: Science Press, 2012.
顾樵. 数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [15] Zhang Hao, Tang Yunhai, Chen Xiaoyi, *et al.* The study on matching the front sphere surface power of progressive addition lenses[J]. Optical Technique, 2015, 41(3): 212-216.
张皓, 唐运海, 陈晓翌, 等. 内渐进多焦点眼镜片前表面光焦度匹配研究[J]. 光学技术, 2015, 41(3): 212-216.