

四极孤子在自聚焦光诱导四方晶格中的动态演化

覃亚丽, 毛盛益, 刘 鲜, 李屹磊, 任宏亮, 李 伽, 薛林林

浙江工业大学信息工程学院光纤通信与信息工程研究所, 浙江 杭州 310023

摘要 运用交替隐式光束传输法研究了异相和同相四极光束在自聚焦光诱导的四方晶格中的传输特性。给出了异相和同相四极光束在连续均匀介质、自聚焦介质和自聚焦光诱导的光子晶格中的动态演化。在均匀介质中传输时, 异相四极光束发生线性衍射, 峰值强度逐渐变小, 光束间相互排斥, 峰值间距变大; 而同相四极光束先各自衍射, 而后聚合为单束光, 峰值幅度先减小后增加, 继续向前传输, 光束衍射, 峰值递减。引入自聚焦光折变介质后, 异相四极光束发生自聚焦现象, 且相互分离现象更加明显; 而同相四极光束相互吸引融合为单束光, 能量几乎全部汇聚到晶格中心点。引入自聚焦光诱导光子晶格后, 异相四极光束一定条件下能形成稳定传输的异相四极孤子, 其对角波峰相位相同, 相邻波峰相位差为 π ; 而同相四极光束在一定的条件下能形成局域的同相四极孤子, 其波峰相位均相同。

关键词 非线性光学; 四极孤子; 光子晶格; 光折变晶体

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP54.111901

Evolution of Quadrupole Solitons in Self-Focusing Photoinduction Tetragonal Photonic Lattices

Qin Yali, Mao Shengyi, Liu Xian, Li Yilei, Ren Hongliang, Li Jia, Xue Linlin

Institute of Fiber-Optic Communication and Information Engineering, College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, Zhejiang 310023, China

Abstract Out-of-phase (OOP) and in-phase (IP) quadrupole beams propagation in self-focusing photoinduction tetragonal photonic lattices is investigated by alternative direction implicit-beam propagation method (ADI-BPM). The evolution of OOP and IP quadrupole beams in continuous homogeneous medium, self-focusing medium and self-focusing photoinduction photonic lattices is presented respectively. In the continuous homogeneous medium, it is shown that OOP quadrupole beams are linearly diffracted, with the peak intensity decreasing gradually. Besides, the beams repel each other and the peak spacing becomes larger. IP quadrupole beams are diffracted originally, and then fused into the single beam. The peak is decreased in the beginning and then increased. As the beam is transmitted forward and diffracted, the peak intensity declines. In the self-focusing nonlinear medium, the OOP quadrupole beams could self-focus and the separation becomes more obvious, while the IP quadrupole beams could attract each other and merge into a single beam. In the self-focusing light photoinduction lattices, under appropriate conditions, the OOP quadrupole beams could form the stable OOP quadrupole solitons whose diagonal humps have the same phase but the adjacent humps have π -phase difference, while the IP quadrupole beams could form the localized IP quadrupole solitons whose four humps have the same phase.

Key words nonlinear optics; quadrupole solitons; photonic lattice; photorefractive crystal

OCIS codes 190.4400; 190.6130; 260.2160; 190.5330

1 引 言

高阶模孤子是指其强度分布截面上有两个或者两个以上的峰值^[1], 具有潜在的应用价值, 不仅可以用于

收稿日期: 2017-03-21; **收到修改稿日期:** 2017-05-26

基金项目: 国家自然科学基金(61675184, 61275124, 61405178, 61205121)

作者简介: 覃亚丽(1963—), 女, 博士, 教授, 主要从事光孤子及非线性光学、微波通信及光通信、信号处理等方面的研究。

E-mail: ylqin@zjut.edu.cn

承载高信息量的“孤子波包”，还可以很方便地提取或增加其单独的孤子^[2]分量，因此引起人们广泛的研究兴趣。目前，理论及实验已经证实许多高阶模耦合孤子可以由简单的偶极孤子组成^[3-4]，偶极孤子、多极孤子得到了学者的不断研究^[5-7]。偶极孤子对矢量系统(2+1)维的单一分量^[3,8-9]可以有效地阻止偶极孤子在波导中塌陷从而获得稳定的偶极孤子。采用限制孤子对排斥的光子晶格，在理论及实验上也可以得到稳态的偶极孤子和多极孤子^[10-11]。

多级孤子中，学者对偶极孤子做了较多的研究，早在1992年，Segev等^[12-14]研究了非局域克尔介质中的偶极孤子。2000年，García-Ripoll等^[3]理论上预言了偶极光孤子的存在，同年8月，Krolikowski等^[4]在实验中观测到了光折变晶体中的偶极矢量孤子。而对四极孤子研究的相对较少，2005年，Kartashov等^[15]研究了非局域非线性液晶介质中的多极模光孤子。2008年，Efremidis等^[16]研究了各阶孤子非线性介质中的形成条件以及边界值对孤子形成的影响。2010年，Dong等^[17]通过数值模拟方法研究了(1+1)维的多级孤子稳定性，从而得出基态孤子及偶极孤子都可以在存在的区域内稳定传输，三极及以上孤子的不稳定区域则随着样品宽度的增大而增加。2015年，Huang等^[18]研究了四极物质波孤子在二维自由空间的相互作用，2016年，Zhang等^[19]研究了在宇称-时间(PT)对称势中的偶极、三极、四极孤子，杨斌等^[20]研究了光诱导晶格中偶极孤子，杜英杰等^[21-22]研究了高阶非相性对孤子传输的影响。

多极孤子可以对信息进行空分复用，从而提高信道的容量。因此，本文对异相(OOP)和同相(IP)的四极光束进行了研究，当光折变晶体上的外加电场强度、光诱导的晶格深度以及入射光束的强度相互匹配时，异相四极光束能形成稳定传输的异相四极孤子，其对角波峰相位相同，相邻波峰相位差为 π ；而同相四极光束能形成局域的同相四极孤子，其波峰相位均相同。

2 基本原理

2.1 理论模型

光子晶格即波导阵列，是光学中的一种横向折射率为周期性变化的结构，与光子晶体有许多类似的性质，如带隙结构以及布里渊区等。但是，它们还有许多区别，同光子晶体相比，光子晶格的周期尺度要远大于光的波长，通常是几个到几十个微米；其折射率调制则比光子晶体折射率调制小几个数量级，通常是 $10^{-5} \sim 10^{-3}$ 量级。因此，光子晶格具有光子晶体的很多性质，同时还具有很多自身的独特性质。2002年，Efremidis等^[16]提出利用光诱导的方法，在具有各向异性的光折变晶体(铌酸锆钽，SBN)中制作波导阵列，即在非线性光折变晶体中利用周期性光强分布诱导出周期性的折射率分布，其中寻常偏振光(o光)为阵列诱导光，异常偏振光(e光)为探测光。由于寻常偏振光及异常偏振光的电光系数相差大约10倍，相对探测光而言，阵列光可以被认为是线性传播的。

四极光束在光折变晶体中传输时遵循Maxwell方程组。考虑傍轴近似，同时忽略晶体的各向异性性质。四极光束在其中传输时，满足下面的无量纲归一化非线性薛定谔方程：

$$iu_z + u_{xx} + u_{yy} - V_0 u / (1 + I_1 + |u|^2) = 0, \quad (1)$$

式中 i 为虚数， u 表示探测光束的慢变包络(以晶体背景光光强 I_d 来归一化)； $V_0 = x_0^2 k_0^2 n_e^4 \gamma_{33} E_0 / 2$ ， $k_0 = 2\pi/\lambda$ 表示波数， λ 为光波波长， x_0 表示光束宽度， n_e 表示e光的折射率， γ_{33} 为e光的电光系数， E_0 表示外加电场强度，通过施加电压使光折变晶体产生自聚焦非线性效应； I_1 是以 I_d 为单位的四方晶格的强度分布，其函数表达式为

$$I_1 = I_0 \sin^2 \frac{x+y}{D} \sin^2 \frac{x-y}{D}, \quad (2)$$

其中 I_0 表示晶格深度，即晶格强度的最大值， D 表示晶格周期。采用SBN晶体，参数为： $\lambda = 488 \text{ nm}$ ， $x_0 = 14 \text{ }\mu\text{m}$ ， $n_e = 2.20$ ， $\gamma_{33} = 33$ 。当取 $I_0 = 20$ ， $D = \sqrt{2}$ ，晶格的强度分布如图1所示。

2.2 异相四极光束

异相四极孤子具有4个波峰，分别位于四方晶格的4个相邻晶格点，其对角波峰相位相同，相邻波峰相位差为 π 。令 $Z_1 = \exp\{-[x^2 + (y - \mu)^2 / \sigma^2]\}$ ， $Z_2 = \exp\{-[x^2 + (y + \mu)^2 / \sigma^2]\}$ ， $Z_3 = \exp\{-[(x - \mu)^2 + y^2] / \sigma^2\}$ ， $Z_4 = \exp\{-[(x + \mu)^2 + y^2] / \sigma^2\}$ ，则输入的4束高斯光束的数学模型可描述为



图 1 四方光子晶格的强度分布。(a)二维图;(b)三维图

Fig. 1 Intensity distribution of tetragonal photonic lattices. (a) 2D pattern; (b) 3D pattern

$$u(x, y) = A [(Z_1 + Z_2) + \exp(i\pi)(Z_3 + Z_4)], \quad (3)$$

式中 A 表示光束振幅, σ 为光束尺寸, $\mu = \pi/\sqrt{2}D$ 。这里, $A=2, \mu=\pi/2, \sigma=\sqrt{2}$, 4 束高斯光束尺寸与晶格格点大小可比拟。光束分别正入射 4 个相邻晶格点, 入射位置如图 2(a) 中实线所示, 入射光束的强度与相位分布如图 2(b)、(c) 所示, 图 2(d) 为对应的入射光束的三维轮廓图。

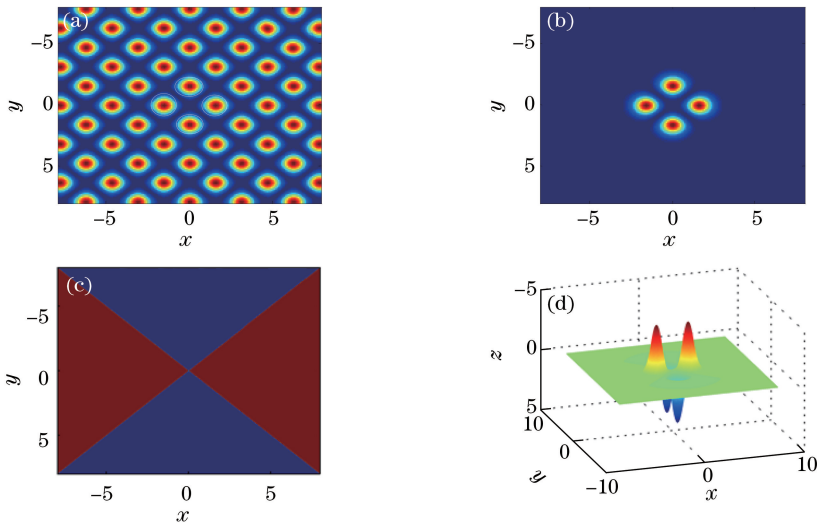


图 2 (a) 4 束高斯光束的入射位置;(b) 异相四极光束的强度分布;(c) 异相四极光束的相位分布;(d) 入射异相高斯光束的三维轮廓图

Fig. 2 (a) Incident position of four Gaussian beams; (b) intensity of OOP quadrupole beams; (c) phase of OOP quadrupole beams; (d) 3D pattern of incident OOP Gaussian beams

2.3 同相四极光束

同相四极孤子具有 4 个波峰, 分别位于四方晶格的 4 个相邻晶格点, 其波峰相位均相同。输入的 4 束同相高斯光束的数学模型为

$$u(x, y) = A (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4). \quad (4)$$

与异相四极光束一样, $A=2, \mu=\pi/2, \sigma=\sqrt{2}$,

入射位置如图 2(a) 中实线所示, 光束分别正入射 4 个相邻晶格点。入射光束的强度以及光束的三维轮廓图如图 3(a) 和 (b) 所示。



图 3 (a) 同相四极高斯光束的强度分布;(b) 入射同相高斯光束三维轮廓图

Fig. 3 (a) Intensity of IP quadrupole Gaussian beams; (b) 3D pattern of incident IP Gaussian beams

3 数值仿真结果与分析

3.1 异相和同相四极光束在连续介质中的线性传输

异相四极光束在无晶格连续的均匀介质中传输,其线性传输 4.8 个单位距离的强度分布如图 4 所示,此处用衍射长度将传输长度归一化,1 个单位为一个衍射长度。从图 4(a)到图 4(d)每 1.2 个单位记录一个图,可以看出,光束向前传输过程中发生线性衍射,慢慢展宽;继续向前传输,高斯光束相互排斥,峰值间距变大。图 4(c)和图 4(d)可以看出光束在交叠区发生干涉,干涉强度具有对称性。显而易见,在整个线性传输过程中,光束峰值强度随着传输距离 z 增大而逐渐变小,如图 4(f)所示。

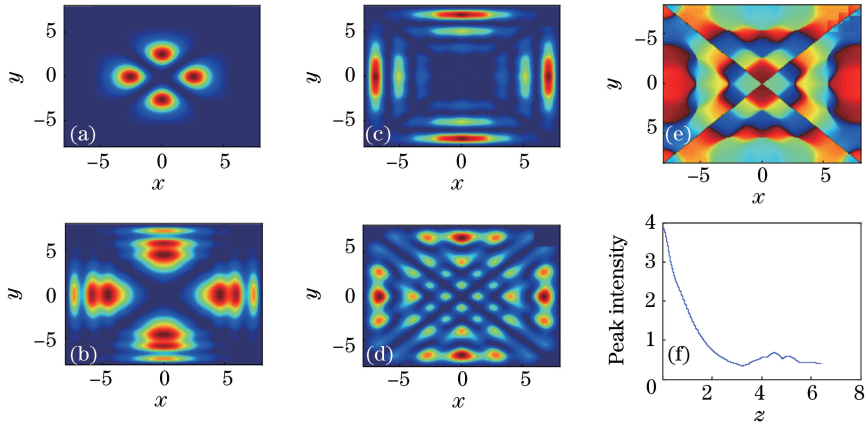


图 4 均匀介质中异相四极光束线性传输 4.8 个单位的强度分布图。

(a) 1.2 个单位; (b) 2.4 个单位; (c) 3.6 个单位; (d) 4.8 个单位; (e) 对应于 (d) 的相位分布图; (f) 光束峰值强度的演变图
Fig. 4 Intensity of OOP quadrupole beams after the linear transmission of 4.8 unit in continuous homogeneous medium.

(a) 1.2 unit; (b) 2.4 unit; (c) 3.6 unit; (d) 4.8 unit; (e) phase of (d); (f) peak intensity

同相四极光束在连续均匀介质中传输的特性。图 5 显示的是同相四极光束线性传输 4.8 个单位距离的强度分布图。从图 5(a)到图 5(d),每 1.2 个单位记录一个图,可以看出,光束向前传输过程中发生线性衍射,慢慢展宽;继续向前传输,光束向中间靠拢,聚合为一束光,传输至更远的距离,单束光发生扩散。显而易见,在整个线性传输过程中,光束的峰值强度不是随着传输距离 z 的增大而单调递减,而是先减小后增加而后递减,如图 5(f)所示。这是由于 4 束同相高斯光束先是各自衍射,峰值幅度减小,而后聚合为单束光,峰值幅度相应增加;继续向前传输,单束光发生衍射,峰值单调递减。

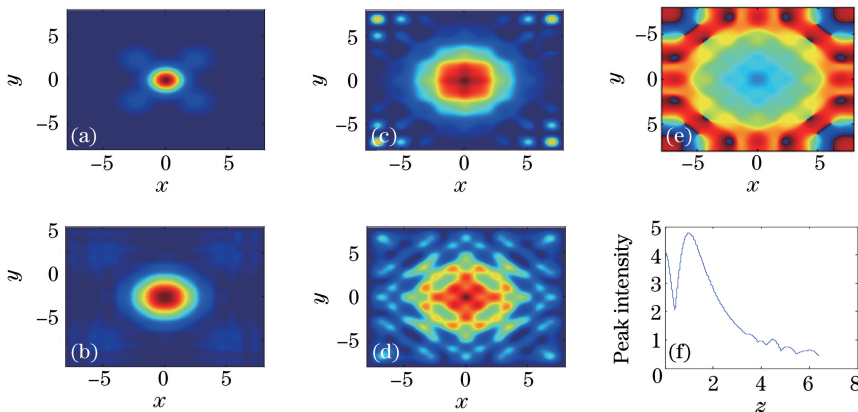


图 5 均匀介质中同相四极光束线性传输 4.8 个单位的强度分布图。

(a) 1.2 单位; (b) 2.4 单位; (c) 3.6 单位; (d) 4.8 单位; (e) 对应于 (d) 的相位分布图; (f) 光束峰值强度的演变图
Fig. 5 Intensity of IP quadrupole beams after the linear transmission of 4.8 unit in continuous homogeneous medium.

(a) 1.2 unit; (b) 2.4 unit; (c) 3.6 unit; (d) 4.8 unit; (e) phase of (d); (f) peak intensity

可见,在均匀介质中传输时异相四极光束相互排斥,同相四极光束相互吸引,有趣的是同相四极光束先会聚成一束光后光束的峰值强度存在一个极小值,然后再衍射。

3.2 异相和同相四极光束在自聚焦介质中的传输

异相四极光束在自聚焦光折变介质中传输过程中产生强非线性效应,光束各自不再发生衍射,而出现自聚焦现象。图 6 显示的是光束传输 9.6 个单位的强度截面图。从图 6(a)到图 6(d)每 2.4 个单位记录一个图,可以看出,较短距离传输时,光束出现自聚焦,波峰之间间距逐渐变大;继续传输,光束相互分离现象更加明显,不能形成异相四极孤子。图 6(e)、图 6(f)分别为对应图 6(c)、图 6(d)的相位分布,发现传输过程中,其对角波峰相位相同,相邻波峰相位差为 π 。

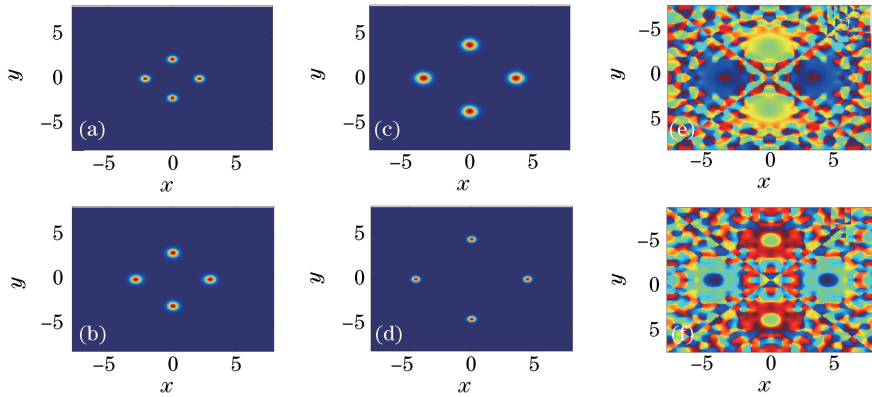


图 6 自聚焦介质中异相四极光束等距离传输 9.6 个单位的强度分布图。

(a) 2.4 单位; (b) 4.8 单位; (c) 7.2 单位; (d) 9.6 单位; (e)(f) 分别为对应(c)(d)的相位分布

Fig. 6 Intensity of OOP quadrupole beams after transmission of 9.6 unit in self-focusing medium.

(a) 2.4 unit; (b) 4.8 unit; (c) 7.2 unit; (d) 9.6 unit; (e) phase of (c); (f) phase of (d)

同相四极光束在自聚焦光折变介质中的传输与异相四极光束一样,引入强非线性效应后,这里的 4 束光束各自也不再发生衍射,而出现自聚焦现象。图 7 是光束传输 9.6 个单位的强度截面图。从图 7(a)到图 7(d)每 2.4 个单位记录一个图,可以看出,传输 2.4 个单位时,少部分能量汇聚到晶格中心非格点区折射率高的地方;继续向前传输,同相四极光束相互吸引融合为单束光,能量几乎全部汇聚到晶格中心点,因此,不能形成同相四极孤子。这里,选取光束的振幅 $A=2$,外加电场强度 $E_0=20$ 。

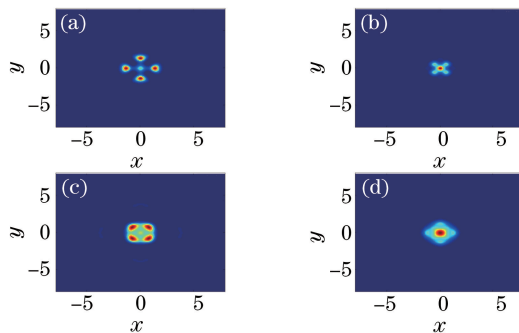


图 7 自聚焦介质中同相四极光束在自聚焦介质中等距离非线性传输 9.6 个单位的强度分布图。

(a) 2.4 单位; (b) 4.8 单位; (c) 7.2 单位; (d) 9.6 单位

Fig. 7 Intensity of IP quadrupole beams after transmission of 9.6 unit in self-focusing medium.

(a) 2.4 unit; (b) 4.8 unit; (c) 7.2 unit; (d) 9.6 unit

对晶体外加偏压后,即引入自聚焦效应,抑制了光束的衍射,异相四极光束和同相四极光束中单光束不再衍射且有自聚焦现象,但异相四极光束和同相四极光束作为整体,仍然呈现出异相光束相互排斥,同相光束相互吸引的现象。

3.3 异相和同相四极光束在晶格中的传输

异相四极光束在自聚焦非线性光折变晶体中引入光诱导光子晶格,晶格折射率的周期性分布能够很好地抑制高斯光束的衍射效应,在一定的条件下能形成稳定传输的异相四极孤子。图 8 为在光束幅度 $A=2$,

晶格深度 $I_0 = 20$, 光束尺寸 $\sigma = \sqrt{2}$, 外加电场强度 $E_0 = 20$ 的条件下, 光束在光子晶格中传输 4.8 个单位距离后的强度和相位分布。图 8 表明, 4 束高斯光束都被晶格的阵列势阱俘获, 分别聚焦在初始入射的 4 个格点上, 从而形成了异相四极离散孤子, 其对角波峰相位相同, 相邻波峰相位差为 π 。传输至 9.6 个单位距离, 可以发现异相四极孤子保持强度不变, 间距不变, 其相位差保持不变。

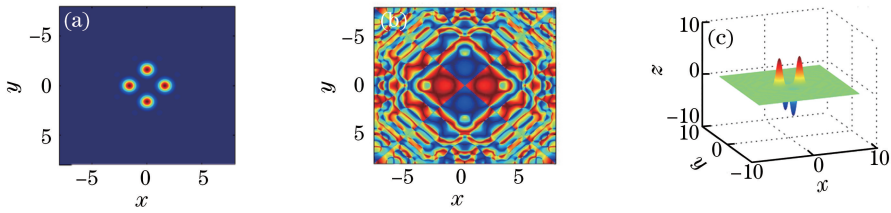


图 8 自聚焦光诱导的光子晶格中异相四极光束传输 4.8 个单位距离后的结果。

(a) 异相四极孤子的强度分布; (b) 相位分布; (c) 异相四极孤子的三维视图

Fig. 8 Intensity of OOP quadrupole beams after transmission of 4.8 unit in self-focusing photoinduction photonic lattices.

(a) Intensity; (b) phase; (c) 3D pattern of OOP quadrupole soliton

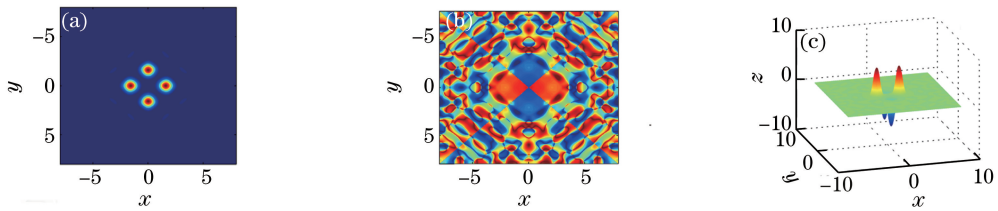


图 9 自聚焦光诱导的光子晶格中异相四极光束传输至 9.6 个单位距离后的结果。

(a) 异相四极孤子的强度分布; (b) 相位分布; (c) 异相四极孤子的三维视图

Fig. 9 Intensity of OOP quadrupole beams after transmission of 9.6 unit in self-focusing photoinduction photonic lattices.

(a) Intensity; (b) phase; (c) 3D pattern of OOP quadrupole soliton

同相四极光束在自聚焦非线性光折变晶体中引入光诱导光子晶格, 在一定的条件下能够形成局域的同相四极孤子。图 10 为在光束幅度 $A = 2$, 晶格深度 $I_0 = 20$, 光束尺寸 $\sigma = \sqrt{2}$, 外加电场强度 $E_0 = 20$ 的条件下, 光束在光子晶格中传输 4.8 个单位距离后的强度和相位分布。从图中可以看出, 4 束高斯光束分别被晶格的阵列势阱俘获, 形成了同相四极离散孤子, 其波峰相位均相同。传输至 9.6 个单位距离, 可以发现同相四极孤子保持强度、轮廓、间距不变, 形成了局域的同相四极孤子。

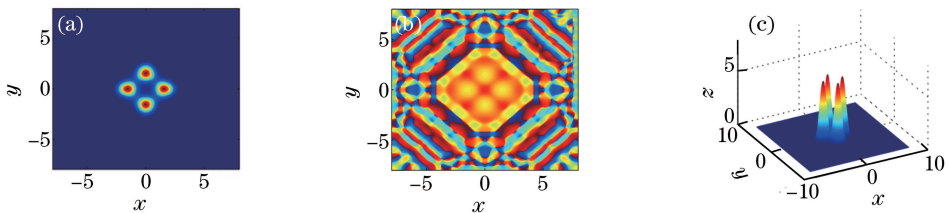


图 10 自聚焦光诱导的光子晶格中同相四极光束传输 4.8 个单位距离后的结果。

(a) 同相四极孤子的强度分布; (b) 相位分布; (c) 同相四极孤子的三维视图

Fig. 10 Intensity of IP quadrupole beams after transmission of 4.8 unit in self-focusing photoinduction photonic lattices.

(a) Intensity; (b) phase; (c) 3D pattern of IP quadrupole soliton

可见, 在输入光光强、外加偏压、晶格深度匹配的情况下, 自聚焦介质中光诱导的光子晶格能稳定地传输异相四极孤子和同相四极孤子。

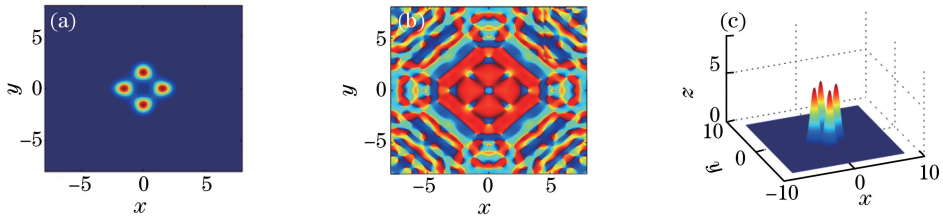


图 11 自聚焦光诱导的光子晶格中同相四极光束传输至 9.6 个单位距离后的结果。

(a) 同相四极孤子的强度分布; (b) 相位分布; (c) 同相四极孤子三维视图

Fig. 11 Intensity of IP quadrupole beams after transmission of 9.6 unit in self-focusing photoinduction photonic lattices.

(a) Intensity; (b) phase; (c) 3D pattern of IP quadrupole soliton

4 结 论

通过数值仿真系统研究了异相和同相四极光束在连续的均匀介质、自聚焦非线性介质和自聚焦四方晶格中的动态演化。仿真结果表明,在均匀介质中传输时,异相四极光束发生线性衍射,光束间相互排斥;而同相四极光束各自衍射后融合为单束光,峰值幅度先减小后增加,继续向前传输,光束衍射,峰值递减。这是因为光束存在自然衍射,且异相光束相互排斥,同相光束相互吸引,融合成的单束光同样发生衍射。引入自聚焦光折变介质后,异相四极光束发生自聚焦现象,且相互分离现象更加明显;而同相四极光束相互吸引融合为单束光,能量几乎全部汇聚到晶格中心点,自聚焦非线性使光束产生聚焦效应,衍射和聚焦相互作用,同样异相光束相互排斥,同相光束相互吸引。引入自聚焦光诱导光子晶格后,输入光强、外加电场强度和光诱导的晶格深度在一定条件下时,异相四极光束能形成稳定传输的异相四极孤子,其对角波峰相位相同,相邻波峰相位差为 π ;而同相四极光束能形成局域的同相四极孤子,其波峰相位均相同。这是光束的衍射、光诱导的光子晶格即周期结构的导波作用、自聚焦效应相互作用所形成的稳定四极孤子。今后,还需进一步研究四极孤子传输的稳健性,为实验的验证和应用提供技术支持。

参 考 文 献

- [1] Zhang Xiaping, Liu Youwen. Analytical solution in the Ince-Gaussian form of the beam propagating in the strong nonlocal media[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(12): 8332-8338.
张霞萍, 刘友文. 强非局域非线性介质中光束传输的 Ince-Gauss 解[J]. 物理学报, 2009, 58(12): 8332-8338.
- [2] Kartashov Y V, Vysloukh V A, Torner L. Soliton trains in photonic lattices[J]. Optics Express, 2004, 12(13): 2831-2837.
- [3] Garcia-Ripoll J J, Perez-Garcia V M, Ostrovskaya E A, *et al.* Dipole-mode vector solitons[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(1): 82-85.
- [4] Krolkowski W, Ostrovskaya E A, Weinau C, *et al.* Observation of dipole-mode vector solitons[C]. Nonlinear Optics: Materials, Fundamentals, and Applications, 2000: 6771178.
- [5] Carmon T, Anastassiou C, Lan S, *et al.* Observation of two-dimensional multimode solitons[J]. Optics Letters, 2000, 25(15): 1113-1115.
- [6] Desyatnikov A S, Neshev D, Ostrovskaya E A, *et al.* Multipole spatial vector solitons[J]. Optics Letters, 2001, 26(7): 435-437.
- [7] Kartashov Y V, Lluís T, Vysloukh V A, *et al.* Multipole vector solitons in nonlocal nonlinear media[J]. Optics Letters, 2006, 31(10): 1483-1485.
- [8] Desyatnikov A S, Kivshar Y S, Kristian M, *et al.* Multicomponent dipole-mode spatial solitons[J]. Optics Letters, 2002, 27(8): 634-636.
- [9] Schröder J, Jander P, Denz C, *et al.* Counter propagating dipole-mode vector soliton[J]. Optics Letters, 2005, 30(9): 1042-1044.
- [10] Kartashov Y V, Egorov A A, Vysloukh V A, *et al.* Rotary dipole-mode solitons in Bessel optical lattices[J]. Journal of Optics B: Quantum & Semiclassical Optics, 2004, 6(11): 444-447.

- [11] Yang J, Makasyuk I, Bezryadina A, *et al.* Dipole and quadrupole solitons in optically induced two-dimensional photonic lattices: Theory and experiment[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2004, 113(4): 389-412.
- [12] Segev M, Crosignani B, Yariv A, *et al.* Spatial solitons in photorefractive media[J]. *Physical Review Letters*, 1992, 68(7): 923-926.
- [13] Yang Zhenjun, Li Shaohua, Lu Daquan, *et al.* Variational analysis of dipole soliton in nonlocal nonlinear Kerr media [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(7): 4707-4714.
杨振军, 李少华, 陆大全, 等. 非局域非线性克尔介质中两极孤子的变分解[J]. *物理学报*, 2010, 59(7): 4707-4714.
- [14] Zhao J Y, Wang Q, Shen M, *et al.* The propagation of dipole solitons in highly nonlocal medium[J]. *Chinese Physics B*, 2010, 19(19):337-341.
- [15] Kartashov Y V, Carretero-Gonzalez R, Malomed B A, *et al.* Multipole-mode solitons in Bessel optical lattices [J]. *Optics Express*, 2005, 13(26): 10703-10710.
- [16] Efremidis N K. Nonlocal lattice solitons in thermal media[J]. *Physical Review A*, 2008, 77(6): 063824.
- [17] Dong L W, Ye F W. Stability of multipole-mode solitons in thermal nonlinear media[J]. *Physical Review A*, 2010, 81(1): 013815.
- [18] Huang J S, Jiang X D, Chen H Y, *et al.* Quadrupolar matter-wave soliton in two-dimensional free space[J]. *Frontiers of Physics*, 2015, 10(4): 1-7.
- [19] Zhang Chenghao, Xu Siliu. Multipole solitons in two dimensions PT-symmetric optical potentials [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(2): 0219001.
章臣浩, 徐四六. 二维 PT 对称晶格势中的多极光孤子[J]. *光学学报*, 2016, 36(2): 0219001.
- [20] Yang Bin, Qin Yali, Liu Xian, *et al.* Research on dipole solitons in optically induced lattices[J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(7): 0719001.
杨斌, 覃亚丽, 刘鲜, 等. 光诱导晶格中偶极孤子的研究[J]. *光学学报*, 2016, 36(7): 0719001.
- [21] Du Yingjie, Yang Zhanying, Xie Xiaotao, *et al.* Influence of higher nonlinearity to optical solitons in electromagnetically induced transparency medium[J]. *Acta Optica Sinica*, 2015, 35(2): 0227002.
杜英杰, 杨战营, 谢小涛, 等. 电磁感应透明的高阶非线性效应对光孤子的影响[J]. *光学学报*, 2015, 35(2): 0227002.
- [22] Xiao Yan, Guo Zedong, Zhang Jian, *et al.* Optical pulse propagation under influence of fifth-order nonlinear Kerr effect [J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(2): 0206002.
肖燕, 郭泽东, 张健, 等. 五阶非线性克尔效应影响下光脉冲的传输[J]. *光学学报*, 2017, 37(2): 0206002.