

# 多波长消光法粒径测量中颗粒形状的影响

李潭 苏明旭 陈军 蔡小舒

上海理工大学颗粒与两相流测量技术研究所, 上海 200093

**摘要** 对多波长消光法颗粒测量方法中非球形颗粒形状的影响进行研究。采用广义米散射理论数值模拟计算了不同长短轴椭球颗粒在不同入射角度下的消光截面和消光系数,并与等效球形颗粒的消光特性进行比较,结合 Lambert-Beer 定律计算消光谱,采用正则化算法反演椭球颗粒粒径,进而分析椭球颗粒形状对粒径测量结果的影响。结果表明,与球形假设相比,椭球颗粒的形状改变使得粒径反演结果产生较大偏差。本算例中,对于亚微米颗粒,当形状参数  $a/b=5$  时,其相对偏差可能超过 90%。

**关键词** 散射; 消光法; 非球形颗粒; 广义米氏理论; 消光谱; 反演

**中图分类号** O436.2 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP53.092901

## Effect of Particle Shape on Particle Size Measurement in Multi-Wavelength Light Extinction Method

Li Tan Su Mingxu Chen Jun Cai Xiaoshu

*Institute of Particle and Two-Phase Flow Measurement, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*

**Abstract** The effect of non-spherical particles shape on particle measuring method based on multi-wavelength light extinction method is investigated. According to the generalized Mie scattering theory, the extinction section and extinction coefficient of spheroidal particles with different major and minor axes under different incident angles are calculated by numerical simulation, and they are compared with the extinction characteristics of equivalent spherical particle. The extinction spectrum is calculated by combining with Lambert-Beer law, and the particle size of the spheroidal particles is inversed by regularization algorithm. Then the influence of the shapes of the spheroidal particles on particle size measurement result is analyzed. The results show that the change of spheroidal particle shape will bring significant deviation to the inversed particle size result compared with spherical assumption. In this paper, relative deviation can exceed 90% for submicron particles under shape parameter  $a/b$  of 5.

**Key words** scattering; light extinction method; non-spherical particles; generalized Mie theory; extinction spectrum; inversion

**OCIS codes** 290.5850; 300.6170; 290.2200

## 1 引言

光散射粒径测量方法具有非接触、准确、快速、自动化程度高等优点,随着科学技术的迅猛发展及各学科领域的相互渗透,其在颗粒粒径测量技术领域占据重要地位<sup>[1]</sup>。光散射粒径法中的多波长消光法对仪器光源和接收器要求不高,多数情况下,利用可见光范围的光纤光谱仪即可完成粒径大小和分布情况的测量,操作简便,测量速度较快。近年来,随着很多领域对亚微米至纳米级颗粒在线检测需求的日益增加,消光法以

**收稿日期:** 2016-03-29; **收到修改稿日期:** 2016-05-21; **网络出版日期:** 2016-08-29

**基金项目:** 国家自然科学基金(51176128, 91544225)

**作者简介:** 李潭(1989—),男,硕士研究生,主要从事基于光散射方法进行颗粒粒径测量方面的研究。

E-mail: 554244219@qq.com

**导师简介:** 苏明旭(1973—),男,博士,教授,主要从事超声、光散射颗粒测量理论和技术方面的研究。

E-mail: sumx@usst.edu.cn(通信联系人)

其独特的优势而受到各国学者的广泛关注和重视,应用前景广阔<sup>[2]</sup>。

消光法的光学理论基础是球形颗粒的米散射理论,采用该理论计算颗粒的消光系数并结合 Lambert-Beer 定律构建数学模型,然后通过实验获取的消光谱进行反演即可求解出颗粒粒径分布。不过,球形颗粒假设是一种数学近似,并不符合自然产生的和工业产品中的绝大多数颗粒真实情况,由此可能带来的影响和测量误差,非常值得探讨。由于椭球模型更接近于一些实际存在的颗粒,例如,实验观测已证实下落的雨滴大多呈椭球形,一些生物细胞也非常接近椭球形,所以详细研究椭球形颗粒的散射特性或采用椭球模型去描述颗粒物较球形假设更具一般性。

关于椭球形颗粒对平面波的散射,Schulz 等<sup>[3-5]</sup>用  $T$  矩阵方法研究了椭球颗粒在平面波中的散射问题。Asano 等<sup>[6]</sup>利用分离变量法,求解了椭球颗粒对平面波的散射,提出了一种处理椭球颗粒电磁场边界条件的理论方法,较好地解决了边界条件问题。韩一平等<sup>[7]</sup>改进了边界条件的推导,并纠正了 Asano 文献中的错误参数。徐峰等<sup>[8-17]</sup>进一步研究了均匀椭球颗粒对任意形状、位置和入射角的波束的散射,发展了两种相互独立的方法:广义米散射理论和扩展的几何光学方法。

在此基础上,本文主要以亚微米椭球形颗粒为例,通过严格的理论计算,分析了等体积条件下颗粒形状(包括不同长短轴比、入射方位角)对消光谱的影响。同时,结合正则化反演算法讨论了球形颗粒假设对消光法颗粒粒径测量带来的偏差。

## 2 方 法

### 2.1 消光法原理

消光法利用测量光通过颗粒离散介质后的消光谱,并由谱信息反演得到颗粒粒径分布,其理论核心是 Lambert-Beer 定律。如图 1 所示,如果一束直径远大于被测颗粒粒径、强度为  $I_0$ 、波长为  $\lambda$  的平行单色光入射到一含有被测颗粒群的介质时,由于颗粒对光的散射和吸收,透射光  $I$  的强度为

$$I = I_0 \exp(-\tau l), \quad (1)$$

式中  $l$  为光程, $\tau$  称为浊度。如果各个颗粒的光散射满足不相关单散射,单位体积内  $N$  个粒径为  $D$  的单分散颗粒系,浊度  $\tau$  为

$$\tau = NC_{\text{ext}} = N \frac{\pi}{4} D^2 Q_{\text{ext}}, \quad (2)$$

式中  $C_{\text{ext}}$  为消光截面, $Q_{\text{ext}}$  为消光系数,均为入射光波长  $\lambda$ 、被测颗粒直径  $D$ 、颗粒相对于周围介质的折射率  $m$  的函数。将(2)式代入(1)式后可得

$$\ln(I/I_0) = -NlC_{\text{ext}}, \quad (3)$$

式中比值  $I/I_0$  称为光透射率。

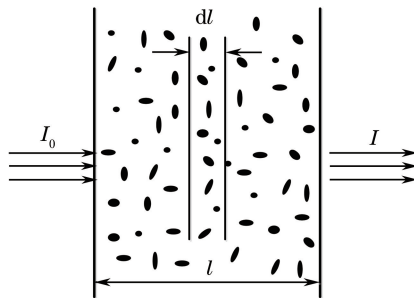


图 1 消光法测量原理示意图

Fig. 1 Schematic diagram of light extinction method measurement

多波长消光法利用消光谱(一般为十几至数十个波长离散谱)增加信息量,与介质中颗粒浓度、粒径分布关联,在许多方面取得了较好的应用<sup>[18-22]</sup>。然而在以往的模型中,需通过基于均匀各向同性的球形颗粒假设的米散射理论计算消光截面。对于椭球颗粒情形,其核心在于引入广义米散射理论计算均匀取向椭球颗粒群(非球形)的消光截面,并用于消光法。

## 2.2 椭球颗粒的消光谱计算

### 2.2.1 椭球坐标系

以长椭球为例讨论颗粒形状问题,将椭圆坐标系绕椭圆长轴旋转即形成长椭球坐标系,椭圆旋转而成椭球面。在椭球坐标系中,由角坐标  $\eta$ , 径向坐标  $\xi$  和方位角坐标  $\varphi$  来定义椭球面上的一点,它们的取值范围为

$$-1 \leq \eta \leq 1, \quad 1 \leq \xi \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (4)$$

定义  $f$  为椭球的半焦距,即椭球两个焦点之间的距离, $f$  可以表示为

$$f = a \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

式中  $a$  表示旋转椭球体的半长轴, $b$  表示旋转椭球体的半短轴。在极限情况下,当  $f \rightarrow 0$  时,即旋转椭球体的两个焦点重合,退化为球坐标系。

### 2.2.2 椭球颗粒光散射特性

如图 2 所示,采用广义米散射理论方法计算了椭球形状参数  $a/b=2$ , 尺寸参数  $c=1.0$  ( $a=0.1163 \mu\text{m}$ ,  $b=0.0581 \mu\text{m}$ ), 相对折射率  $m=1.33$  (空气中的小水珠), 入射光波长  $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$ , 入射角  $\zeta=45^\circ$ , 椭球方位角  $\varphi=0^\circ, 45^\circ$  和  $90^\circ$  时,椭球颗粒散射光强空间分布,进而在此基础上计算椭球颗粒消光截面、消光系数和消光谱。图中  $i_1, i_2$  为散射光强函数<sup>[1]</sup>, 与球形颗粒不同的是,散射光强函数为入射角  $\zeta$  的函数且受其影响明显。

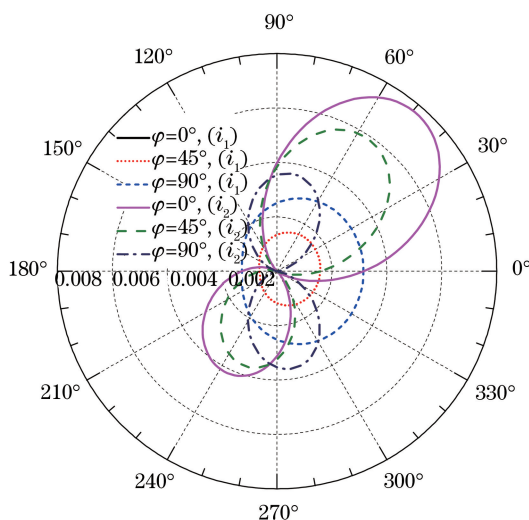


图 2 平面波入射的长椭球颗粒散射光强空间分布图 ( $\zeta=45^\circ$ )

Fig. 2 Spatial distribution map of prolate spheroidal particle scattering intensity by incident plane wave ( $\zeta=45^\circ$ )

### 2.2.3 消光截面、消光系数和消光谱的计算

当平面波以偏振角  $\Phi=0^\circ$ , 入射角  $\zeta$  入射时,单个长椭球颗粒的消光截面和消光系数可以写成如下形式<sup>[6]</sup>

$$C_{\text{ext}}(\zeta) = -\frac{\lambda}{\pi} \text{Re} \left\{ \sum_{m,n} [\alpha_{mn} \cdot \sigma_{mn}(\zeta) + \beta_{mn} \cdot \chi_{mn}(\zeta)] \right\}, \quad (6)$$

$$Q_{\text{ext}}(\zeta) = C_{\text{ext}}(\zeta) / G(\zeta), \quad (7)$$

式中

$$G(\zeta) = \frac{\pi a b^2}{(a^2 \cdot \cos^2 \zeta + b^2 \sin^2 \zeta)^{1/2}}. \quad (8)$$

消光截面  $C_{\text{ext}}$  和消光系数  $Q_{\text{ext}}$  均为椭球尺寸参数  $c$ 、椭球相对折射率  $m$  和入射角  $\zeta$  的函数,(6)式中  $\text{Re}$  表示取实部, $\alpha_{mn}, \beta_{mn}$  为散射系数, $\sigma_{mn}, \chi_{mn}$  为内场系数。然而,自然界中的粒子是随机取向的,对于随机取向的群聚椭球粒子消光截面的统计平均值,采用入射角从  $\zeta=0^\circ$  到  $180^\circ$  变化,每变化  $1^\circ$  求出其消光截面  $C_{\text{ext}}$ , 然后进行求和平均:

$$\bar{C}_{\text{ext}} = \frac{1}{181} \sum_{\zeta=0^\circ}^{180^\circ} C_{\text{ext}}(\zeta), \quad (9)$$

进一步针对不同光波长,将消光截面进一步代入(3)式,即可计算消光谱。

### 3 数值模拟

#### 3.1 方法和程序验证

为了验证单个颗粒消光特征,图3给出消光系数  $Q_{\text{ext}}$  随椭球尺寸参数  $c$  的变化,  $c = 2\pi f/\lambda$ 。为便于与 Asano 的结果<sup>[6]</sup>对比,算例选取形状参数  $a/b = 2$ ,入射角度  $\zeta = 0^\circ, 45^\circ$  和  $90^\circ$ ,相对折射率  $m = 1.33$ (无虚部),椭球颗粒对光只有散射,没有吸收,即  $Q_{\text{ext}} = Q_{\text{sca}}$ 。经比较,图3结果与文献<sup>[6]</sup>中图19吻合,验证了计算的正确性。由图可见,消光系数  $Q_{\text{ext}}$  随尺寸参数  $c$  的增大而递增,但趋势逐渐减缓并在达到极值后随其减小,给定尺寸时,其随入射角  $\zeta$  的增大而减小。

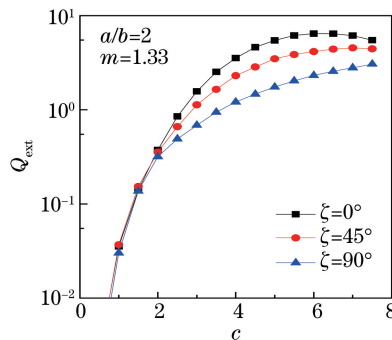


图3 椭球消光系数  $Q_{\text{ext}}$  随尺寸参数  $c$  的变化

Fig. 3 Variation of spheroid extinction coefficient  $Q_{\text{ext}}$  with the size parameter  $c$

#### 3.2 消光截面

图4为等效粒径为  $0.1 \mu\text{m}$  的椭球颗粒,入射光波长  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ ,偏振角  $\Phi = 0^\circ$ ,不同入射角  $\zeta$  和相对折射率  $m$  下,椭球消光截面  $C_{\text{ext}}$  随  $a/b$  的变化情况。图4(a)、(b)、(c)分别表示  $\zeta = 0^\circ, 45^\circ$  和  $90^\circ$  时不同相对折射率下  $C_{\text{ext}}$  随  $a/b$  的变化情况。可见,形状参数  $a/b$  从1到6变化,椭球消光截面  $C_{\text{ext}}$  随  $a/b$  的增加而增加,且  $a/b$  越大,变化趋势越明显。对比图中不同折射率  $m$  下椭球消光截面  $C_{\text{ext}}$  随  $a/b$  的变化曲线还可以

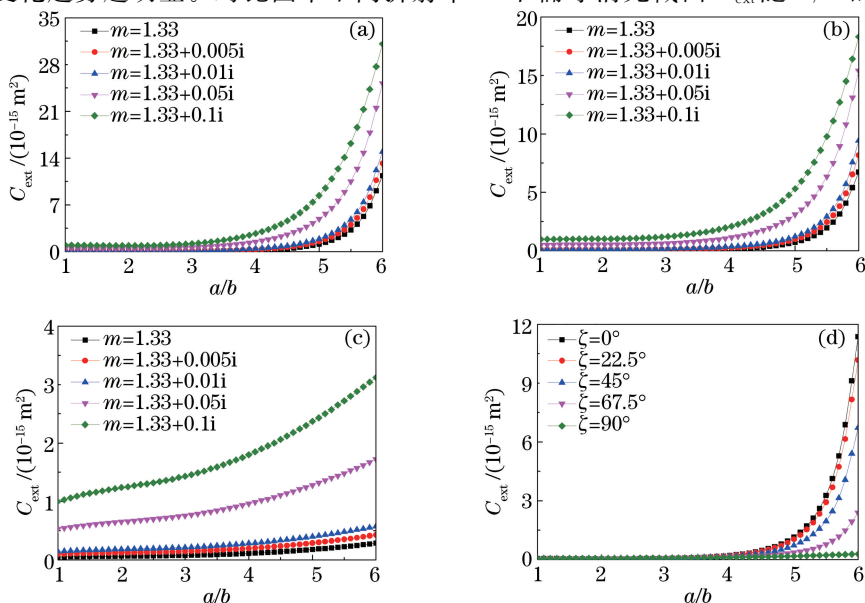


图4 (a)~(c) 不同折射率  $m$  和(d) 不同入射角度  $\zeta$  时  $C_{\text{ext}}$  随  $a/b$  的变化曲线。

(a)  $\zeta = 0^\circ$ ; (b)  $\zeta = 45^\circ$ ; (c)  $\zeta = 90^\circ$ ; (d)  $m = 1.33$

Fig. 4 Variation curves of  $C_{\text{ext}}$  with  $a/b$  at (a)~(c) different refractive index  $m$  and (d) different incident angles  $\zeta$ .

(a)  $\zeta = 0^\circ$ ; (b)  $\zeta = 45^\circ$ ; (c)  $\zeta = 90^\circ$ ; (d)  $m = 1.33$

发现,随着相对折射率  $m$  的虚部的增加,椭球消光截面  $C_{\text{ext}}$  也随之增大。图 4(d)为相对折射率  $m = 1.33$  时,不同入射角  $\zeta$  下椭球消光截面  $C_{\text{ext}}$  随  $a/b$  的变化曲线, $\zeta = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ$  和  $90^\circ$ 。可以明显看出,随着入射角  $\zeta$  增加,椭球消光截面  $C_{\text{ext}}$  随  $a/b$  的变化幅度减小,曲线趋于平缓。

### 3.3 消光谱的预测及分析

为研究椭球颗粒形状对消光的影响,进一步结合(3)式计算了椭球颗粒消光谱。为使椭球颗粒的消光谱和球形颗粒更具可比性,表 1 按等效体积法给出了等效几何尺寸关系。

表 1 不同计算条件下颗粒几何尺寸

Table 1 Particle's geometric size under different calculation conditions

Diameter of the sphere $D_{32}/\mu\text{m}$	Axis length of spheroid / $\mu\text{m}$			
	$a/b=2$		$a/b=5$	
	$a$	$b$	$a$	$b$
0.05	$3.9685 \times 10^{-2}$	$1.9843 \times 10^{-2}$	$7.3100 \times 10^{-2}$	$1.4620 \times 10^{-2}$
0.1	$7.9370 \times 10^{-2}$	$3.9685 \times 10^{-2}$	$1.4620 \times 10^{-1}$	$2.9240 \times 10^{-2}$
0.5	$3.9685 \times 10^{-1}$	$1.9843 \times 10^{-1}$	$7.3100 \times 10^{-1}$	$1.4620 \times 10^{-1}$
0.8	$6.3496 \times 10^{-1}$	$3.1748 \times 10^{-1}$	1.1696	$2.3392 \times 10^{-1}$
1	$7.9370 \times 10^{-1}$	$3.9685 \times 10^{-1}$	1.4620	$2.9240 \times 10^{-1}$

选取与粒径  $D = 0.1 \mu\text{m}$  的球体等体积的椭球水滴,其相对于空气的折射率  $m = 1.33$ ,体积浓度  $C_v = 1 \times 10^{-5}$ ,消光光程  $l = 0.01 \text{ m}$ 。图 5 给出了不同形状参数  $a/b = 1, 2, 5$  下消光谱  $\ln(I_0/I)$  随着波长  $\lambda$  的变化规律( $a/b = 1$  即为球形颗粒)。

由图中曲线可以看出,随着入射光波长  $\lambda$  的增加, $\ln(I_0/I)$  减小,即该长椭球小水滴光透射率  $\ln(I_0/I)$  增加,其消光作用减弱;此外,当椭球形状参数  $a/b$  由 2 变化到 5 时,光透射率  $\ln(I_0/I)$  变化幅度很大,曲线的变化趋势也很明显,说明椭球形状的变化对消光具有很大的影响;再对比图中三条曲线还可以发现, $a/b = 1$  时曲线呈明显单调衰减的变化趋势, $a/b = 2$  时曲线相对比较平坦,变化不明显,当  $a/b = 5$  时,曲线又表现出一个明显的衰减趋势。由基于消光谱的粒径反演主要与曲线变化趋势有关,因此可以得知,颗粒形状的变化对其消光谱和粒径反演有很大影响,用球模型近似计算非球形颗粒的消光值会带来明显的偏差。

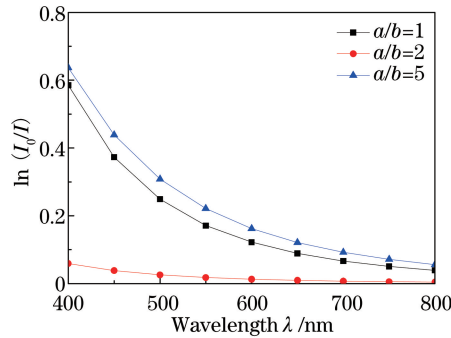


图 5  $a/b$  不同时,长椭球颗粒与球形颗粒消光谱对比( $D = 0.1 \mu\text{m}$ )

Fig. 5 Comparison of extinction spectra of prolate spheroidal particles and spherical particles with different  $a/b$  ( $D = 0.1 \mu\text{m}$ )

## 4 反演

### 4.1 反演方法

在前述工作的基础上,进一步通过反演求解并分析不同形状特征对颗粒系粒径测量的影响。采用了一种较为稳定的独立模式正则化求解算法,通过测量数据求解第一类 Fredholm 积分方程确定颗粒的分布。

对于多分散颗粒系,对应给出(3)式的积分形式

$$\ln(I/I_0) = -l \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \bar{C}_{\text{ext}}(m, D, \lambda) N(D) dD, \quad (10)$$

式中  $D_{\min}$  和  $D_{\max}$  分别为粒径积分下限和上限, (10) 式为典型的第一类 Fredholm 积分方程, 按数值方法离散, 则可得如下线性方程组

$$\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \mathbf{x} \geq 0, \quad (11)$$

式中  $\mathbf{T}$  为系数矩阵,  $\mathbf{y}$  为不同波长下消光构成向量谱,  $\mathbf{x}$  为离散化颗粒粒径概率频度分布。

考虑(11)式, 显然其可按照非负最小二乘法(NNLS)进行求解<sup>[23]</sup>, 即

$$\min_x (\|\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|), \mathbf{x} \geq 0, \quad (12)$$

该方法一个很大的缺点就是其解受到向量  $\mathbf{y}$  的误差扰动影响很大, 解向量过于震荡。另一方面, 正则化处理对于病态问题往往能给出实数域内稳定解。其做法引入了矩阵  $\mathbf{L}$  和正则化参数  $\gamma$  (又称拉格朗日乘子或光顺因子) 改善系数矩阵的性态, 形如

$$\min_x (\|\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \gamma \|\mathbf{L}\mathbf{x}\|^2). \quad (13)$$

鉴于该算法不能保证解的非负性, 可行的做法是将其与 NNLS 算法结合起来即 Twomey-NNLS 算法<sup>[24]</sup>。

## 4.2 反演结果及分析

作为反演算法的基本验证, 分别对标称值为 0.05, 0.1, 0.5, 0.8, 1  $\mu\text{m}$  的球形颗粒 ( $a/b=1$  时) 消光谱进行粒径反演, 结果如表 2 所示,  $D_{32}$  与标称值的误差均在 2% 以内, 反演结果与标称值吻合较好。接下来对于上述球形颗粒的等体积椭球变化颗粒, 研究不同形状参数  $a/b$  对粒径反演的影响, 结果如表 2 所示。由表 2 可以看出, 随着椭球形状参数  $a/b$  变化, 反演结果与标称值即产生很大偏差, 且对同一粒径标称值, 总体上  $a/b$  数值越大反演结果偏离越远。就本算例看, 当椭球形状参数  $a/b=5$  时, 其最大偏差可能超过 90%。可见, 等体积条件下颗粒形状改变对消光谱粒径反演结果有很大的影响。从表 2 结果看, 这种影响对于不同粒径的颗粒均存在, 同时, 该影响与粒径没有非常明显的差异性。

表 2 椭球形颗粒粒径反演结果随形状参数  $a/b$  的变化

Table 2 Variation of spheroidal particle size inversion results with shape parameter  $a/b$

Nominal value $D_{32}/\mu\text{m}$	Inversion results $D_{32}/\mu\text{m}$		
	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=5$
0.05	0.0499	0.0651	0.0963
Relative deviation / %	0.0266	30.267	92.752
0.1	0.0982	0.1041	0.1563
Relative deviation / %	1.7845	4.1610	56.305
0.5	0.4902	0.4402	0.7226
Relative deviation / %	1.9474	11.942	44.524
0.8	0.7929	0.7981	1.1975
Relative deviation / %	0.8831	0.2383	49.687
1	0.9996	1.0973	1.6610
Relative deviation / %	0.0368	9.7360	66.105

## 5 结 论

对多波长消光法颗粒粒径测量中, 颗粒形状对测量的影响进行数值计算和分析。椭球形状参数  $a/b$  从 1 到 6 变化时消光截面  $C_{\text{ext}}$  也随之增加, 且增加的趋势随  $a/b$  的增加越明显。入射角增大时, 消光截面随  $a/b$  的变化趋势变得平缓。椭球形状对消光截面的影响进而影响到椭球消光谱,  $a/b=1, 2, 5$  时颗粒消光谱曲线趋势变化明显。对不同  $a/b$  下的椭球消光谱作粒径反演并与等体积球形颗粒结果对比表明, 椭球形状的变化会给粒径反演带来较大偏差。就本算例看, 对于亚微米颗粒, 当椭球形状参数  $a/b=5$  时, 其偏差可能超过 90%。另一方面, 这一影响与标称颗粒本身大小关系不大, 也没有表现出明显的趋势性。

## 参 考 文 献

- 1 蔡小舒, 苏明旭, 沈建琪, 等. 颗粒粒度测量技术及应用[M]. 北京: 化学工业出版社, 2010.
- 2 Xu Feng, Cai Xiaoshu, Su Mingxu, *et al.* Research on the measurement of high pressure wet steam by spectral light

- extinction method[J]. Chinese Journal of Power Engineering, 2009, 29(3): 254-260.
- 徐 峰, 蔡小舒, 苏明旭, 等. 光谱消光法测量高压湿蒸汽的研究[J]. 动力工程, 2009, 29(3): 254-260.
- 3 Schulz F M, Stamnes K, Stamnes J J. Scattering of electromagnetic waves by spheroidal particles: a novel approach exploiting the  $T$  matrix computed in spheroidal coordinates[J]. Applied Optics, 1998, 37(33): 7875-7896.
- 4 Hackman R H, Lim R. Development and application of the spheroidal coordinate based  $T$  matrix solution to elastic wave scattering[J]. Radio Science, 1994, 29(4): 1035-1049.
- 5 Geller P E, Tsuei T G, Barber P W. Information content of the scattering matrix for spheroidal particles[J]. Applied Optics, 1985, 24(15): 2391-2396.
- 6 Asano S, Yamamoto G. Light scattering by a spheroidal particle[J]. Applied Optics, 1975, 14(1): 29-49.
- 7 Han Yiping, Wu Zhensen. Discussion of the boundary condition for electromagnetic scattering by spheroidal particles[J]. Acta Physica Sinica, 2000, 49(1): 57-60.
- 韩一平, 吴振森. 椭球粒子电磁散射的边界条件的讨论[J]. 物理学报, 2000, 49(1): 57-60.
- 8 Xu F. Shaped beam scattering by a spheroid and online wet steam measurement by using spectral light extinction method[J]. University of Rouen, 2007: 117-120.
- 9 Xu Feng, Cai Xiaoshu, Shen Jiaqi. Geometric approximation of light scattering in arbitrary diffraction regime for absorbing particles: Application in laser particle sizing[J]. Acta Optica Sinica, 2003, 23(12): 1464-1469.
- 徐 峰, 蔡小舒, 沈嘉祺. 米氏理论的近似及在粒度测量中的应用[J]. 光学学报, 2003, 23(12): 1464-1469.
- 10 Xu F, Cai X S Ren K F. Geometrical-optics approximation of forward scattering by coated particles[J]. Applied Optics, 2004, 43(9): 1870-1879.
- 11 Xu F, Cai X S, Su M X, *et al.* Inversion of refractive index in particle sizing by multi-spectral light extinction method[J]. China Powder Science & Technology, 2005.
- 12 Xu F, Ren K F, Cai X S. Extension of geometrical-optics approximation to on-axis Gaussian beam scattering I: By a spherical particle[J]. Applied Optics, 2006, 45(20): 4990-4999.
- 13 Xu F, Cai X S, Ren K F, *et al.* Application of genetic algorithm in particle size analysis by multispectral extinction measurements[J]. China Particuology, 2004, 2(6): 235-240.
- 14 Xu F, Ren K F, Cai X S, *et al.* Extension of geometrical-optics approximation to on-axis Gaussian beam scattering II: By a spheroidal particle with end-on incidence[J]. Applied Optics, 2006, 45(20): 5000-5009.
- 15 Xu F, Ren K F, Cai X S. Expansion of an arbitrarily oriented, located, and shaped beam in spheroidal coordinates[J]. JOSA A, 2007, 24(1): 109-118.
- 16 Xu F, Ren K F, Gouesbet G, *et al.* Generalized Lorenz-Mie theory for an arbitrarily oriented, located, and shaped beam scattered by a homogeneous spheroid[J]. JOSA A, 2007, 24(1): 119-131.
- 17 Xu F, Ren K F, Gouesbet G, *et al.* Theoretical prediction of radiation pressure force exerted on a spheroid by an arbitrarily shaped beam[J]. Physical Review E, 2007, 75(2): 026613.
- 18 Long Minghui, Su Mingxu, Cai Xiaoshu. Study on the measurement of emulsion particles by using light extinction method[J]. Optical Instruments, 2010, 32(3): 18-22.
- 龙明晖, 苏明旭, 蔡小舒. 消光法测量乳剂颗粒的研究[J]. 光学仪器, 2010, 32(3): 18-22.
- 19 Liu Fushui, Dai Yujie, He Xu, *et al.* Application of a novel uncollimated light extinction for soot concentration measurement[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2014, 34(12): 1283-1288.
- 刘福水, 戴钰杰, 何 旭, 等. 一种新型非平行光消光法在碳烟测试中的应用[J]. 北京理工大学学报, 2014, 34(12): 1283-1288.
- 20 He Xu, Dai Yujie, Zheng Liang, *et al.* Application of two-dimensional light extinction technique for soot concentration measurement in an axisymmetric laminar diffusion flame[J]. Proceedings of the CSEE, 2012, 32(26): 57-64.
- 何 旭, 戴钰杰, 郑 亮, 等. 二维消光法在乙炔火焰碳烟浓度测量中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2012, 32(26): 57-64.
- 21 Liu Yu, Li Jun, Liu Dawen. Instantaneous soot formation process measured in cylinder by using forward illumination light extinction method[J]. Automobile Technology, 2011(9): 52-55.
- 刘 宇, 李 君, 刘大文. 光源前置消光法测量缸内碳烟瞬态生成过程[J]. 汽车技术, 2011, (9): 52-55.
- 22 Zhou Zhen, Lü Ting, Wu Yuqu, *et al.* Study of light extinction method rapid detection of casein concentration[J]. Journal

of Harbin University of Sciences, 2013, 18(4): 108-111.

周 真, 吕 廷, 吴玉渠, 等. 消光法快速检测酪蛋白溶液浓度的研究[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2013, 18(4): 108-111.

23 Lawson C L, Hanson R J. Solving least squares problems[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1987, 158-169.

24 Su M X, Xu F, Cai X S, *et al.* Optimization of regularization parameter of inversion in particle sizing using light extinction method[J]. China Particuology, 2007, 5(4): 295-299.