

原子与库场相互作用系统中密度矩阵主方程的解

卢道明

武夷学院机电工程学院, 福建 武夷山 354300

摘要 利用 Ket-Bra 纠缠态方法求解了原子与库场相互作用系统中的密度矩阵主方程, 给出了解的解析表达式。研究了系统中原子的偶极压缩效应, 讨论了库场平均光子数和原子自发辐射率对原子偶极压缩效应的影响。研究表明, 随着自发辐射率和平均光子数的增大, 原子偶极压缩效应减弱。

关键词 量子光学; 二能级原子; 库场; 主方程解; 偶极压缩效应

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP53.092701

Solution of Master Equation of Density Matrix in Interaction System of Atom with Thermal Reservoir

Lu Daoming

College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China

Abstract The master equation of density matrix in the interaction system of atom with thermal reservoir can be solved by virtue of the Ket-Bra entangled state method and the analytical solution expression is shown. Atomic dipole squeezing effect in this system is numerically studied and the effects of the mean number of photons in the thermal reservoir and the atomic spontaneous emission rate on the atomic dipole squeezing effect are discussed. The results show that the atomic dipole squeezing effect is weakened with the increase of the mean number of photons and the atomic spontaneous emission rate.

Key words quantum optics; two-level atom; thermal reservoir; solution of master equation; dipole squeezing

OCIS codes 270.5580; 020.5580

1 引言

量子系统不可避免地与外界环境发生相互作用, 环境的影响会引起量子系统相干性的减弱和原有量子特征的丢失。退相干现象是影响当今量子信息处理和量子计算的主要障碍之一。近年来, 研究者们对耗散情况下的退相干现象进行了详细的研究^[1-6]。张浩亮等^[1]研究了由光子增减叠加相干态的非经典性质及其在热环境中的退相干问题。郑小兰等^[2]研究了处于热库中的两比特量子纠缠和量子关联的演化。在处理耗散系统的动力学问题中, 找到描述系统的密度矩阵的演化规律是至关重要的。为了得到密度矩阵的演化规律, 通常需要解密度矩阵主方程。传统的解法是将密度矩阵主方程转化为 Fokker-Planck 方程或 Langevin 方程进行求解, 这种解法不能方便地给出任意初态的解。

1981年, Walls等^[7]提出了原子偶极压缩的概念, 并指出压缩原子可以辐射压缩光。Wódkiewicz等^[8]证明了压缩原子可以辐射压缩态光场。原子的偶极压缩效应在高精度光学测量、引力波检测和量子信息处理等方面具有重要作用, 一直是量子光学领域关注的课题之一。至今已有大量关于原子偶极压缩效应的研究报道^[9-13]。文献^[9]讨论了选择原子测量对原子偶极压缩效应的影响。本文应用 Ket-Bra 纠缠态方法, 将原子与库场耦合系统中的密度矩阵主方程转化为类似于薛定谔方程的形式, 求解了原子与库场耦合系统中的密度矩阵主方程, 给出了主方程解的解析表达式。该方法优点在于容易从初始密度矩阵导出任意时刻的

收稿日期: 2016-05-19; 收到修改稿日期: 2016-05-21; 网络出版日期: 2016-08-26

基金项目: 福建省自然科学基金(2015J01020)

作者简介: 卢道明(1963—), 男, 硕士, 教授, 主要从事量子光学方面的研究。E-mail: daominglu79@hotmail.com

密度矩阵。进一步研究了系统中原子的偶极压缩效应,讨论了原子自发辐射和库场对原子偶极压缩效应的影响。

2 密度矩阵主方程的解

在 Markov 近似下,描述二能级原子与初始处于热平衡态的库场相互作用系统的矩阵密度主方程为

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) + \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+), \quad (1)$$

式中 ρ 为密度矩阵, γ 为原子自发辐射率, \bar{n} 为库场的平均光子数, $\sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$ 和 $\sigma_- = |0\rangle\langle 1|$ 为原子跃迁算符。在以 $\left\{ |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 为基矢的子空间中, σ_+ 和 σ_- 的矩阵表示为

$$\sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

为了求解(1)式,引入双模 Ket-Bra 纠缠态(KBES)^[14]

$$|\eta\rangle = \exp(\sigma_+ \tilde{\sigma}_+) |00\rangle = |00\rangle + |11\rangle, \quad (3)$$

式中 \sim 表示虚模空间的量, $|0\rangle$ 为虚模基态, $|1\rangle$ 为虚模激发态, $\tilde{\sigma}_+$ 表示与实算符 σ_+ 相伴的虚模空间中的算符。将实模和虚模算符作用在 KBES 上的结果为

$$\sigma_+ |\eta\rangle = \tilde{\sigma}_- |\eta\rangle, \sigma_- |\eta\rangle = \tilde{\sigma}_+ |\eta\rangle, \quad (4)$$

这意味着,虚模和实模算符作用在 $|\eta\rangle$ 上,具有下列交换关系

$$\sigma_+ \leftrightarrow \tilde{\sigma}_-, \sigma_- \leftrightarrow \tilde{\sigma}_+. \quad (5)$$

将(1)式两边作用于 KBES 上,为简便起见,记 $|\rho(t)\rangle = \rho |\eta\rangle$, $|\rho_0\rangle = \rho_0 |\eta\rangle$ (ρ_0 为初始密度矩阵),作用结果为

$$\frac{d}{dt} |\rho\rangle = F |\rho\rangle, \quad (6)$$

$$F = \alpha(2\sigma_- \tilde{\sigma}_- - \sigma_+ \sigma_- - \tilde{\sigma}_+ \tilde{\sigma}_-) + \beta(2\sigma_+ \tilde{\sigma}_+ - \sigma_- \sigma_+ - \tilde{\sigma}_- \tilde{\sigma}_-), \alpha = \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1), \beta = \frac{\gamma}{2}\bar{n}, \quad (7)$$

(6)式的解为

$$|\rho(t)\rangle = \exp(Ft) |\rho_0\rangle, \quad (8)$$

由(8)式可知,利用 KBES 的良好特性,即虚模和实模算符作用在 KBES 上,具有交换关系 $\sigma_+ \leftrightarrow \tilde{\sigma}_-$ 和 $\sigma_- \leftrightarrow \tilde{\sigma}_+$, 很容易将原子与库场耦合系统中的密度矩阵主方程转化为类似于薛定谔方程的形式,从而给出(8)式所示的形式解。

在以 $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$ 为基矢的子空间中, F 的矩阵表示为

$$F = \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & 2\beta \\ 0 & -\alpha - \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha - \beta & 0 \\ 2\alpha & 0 & 0 & -2\beta \end{bmatrix}, \quad (9)$$

通过计算不难得出

$$\exp(Ft) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha \exp[-2(\alpha + \beta)t] + \beta}{\alpha + \beta} & 0 & 0 & \frac{\beta - \beta \exp[-2(\alpha + \beta)t]}{\alpha + \beta} \\ 0 & \exp[-(\alpha + \beta)t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp[-(\alpha + \beta)t] & 0 \\ \frac{\alpha - \alpha \exp[-2(\alpha + \beta)t]}{\alpha + \beta} & 0 & 0 & \frac{\alpha + \beta \exp[-2(\alpha + \beta)t]}{\alpha + \beta} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

以 $\left\{ |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 为基矢, 描述原子状态的密度矩阵为

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

在以 $\{|\tilde{1}\tilde{1}\rangle, |\tilde{1}\tilde{0}\rangle, |\tilde{0}\tilde{1}\rangle, |\tilde{0}\tilde{0}\rangle\}$ 为基矢构成的子空间中, 态矢 $|\eta\rangle$ 表示为

$$|\eta\rangle = |\tilde{0}\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\tilde{1}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

那么

$$|\rho(t)\rangle = \rho(t) |\eta\rangle = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{bmatrix} \otimes \tilde{\mathbf{I}} |\eta\rangle = \begin{bmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{10} \\ \rho_{01} \\ \rho_{00} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

式中 \mathbf{I} 为单位矩阵, \otimes 表示直积运算。将(9)式和(13)式代入(10)式, 求得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \rho_{11}(t) \\ \rho_{10}(t) \\ \rho_{01}(t) \\ \rho_{00}(t) \end{bmatrix} = \exp(\mathbf{F}t) \times \begin{bmatrix} \rho_{11}(0) \\ \rho_{10}(0) \\ \rho_{01}(0) \\ \rho_{00}(0) \end{bmatrix} \\ \rho_{11}(t) = \frac{\beta + \exp[-2(\alpha + \beta)t] \times [\alpha\rho_{11}(0) - \beta\rho_{00}(0)]}{\alpha + \beta} \\ \rho_{10}(t) = \exp[-(\alpha + \beta)t] \times \rho_{10}(0) \\ \rho_{01}(t) = \exp[-(\alpha + \beta)t] \times \rho_{01}(0) \\ \rho_{00}(t) = \frac{\alpha + \exp[-2(\alpha + \beta)t] \times [\beta\rho_{00}(0) - \alpha\rho_{11}(0)]}{\alpha + \beta} \end{cases} \quad (14)$$

利用(14)式可以从初始时刻的密度矩阵容易得出 t 时刻的密度矩阵, 体现了 Ket-Bra 纠缠态方法的优越性。

3 原子的偶极压缩效应

为了讨论原子的偶极压缩效应, 定义两个正交算符矩阵

$$\mathbf{S}_x = \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_y = \frac{1}{2i}(\sigma_+ - \sigma_-) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

由于 $[\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y] = i\mathbf{S}_z$, 因此(15)式满足测不准关系

$$\langle (\Delta S_x)^2 \rangle \langle (\Delta S_y)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle S_z \rangle|^2, \quad (16)$$

其中 $\mathbf{S}_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\langle (\Delta S_j)^2 \rangle = \langle S_j^2 \rangle - \langle S_j \rangle^2$, $j = x, y$ 。定义偶极压缩量

$$\begin{cases} F_x = \langle (\Delta S_x)^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle S_z \rangle| \\ F_y = \langle (\Delta S_y)^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle S_z \rangle| \end{cases}, \quad (17)$$

若 $F_x < 0$, 则 S_x 分量被压缩; 若 $F_y < 0$, 则 S_y 分量被压缩。

假设原子初始时刻处于基态和激发态的叠加态, 即

$$|\psi(0)\rangle = \cos\theta |1\rangle + \sin\theta \times \exp(i\varphi) |0\rangle, \quad (18)$$

式中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, φ 为相对相位角且 $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ 。原子初态的密度矩阵为

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \exp(i\varphi) \\ \cos \theta \sin \theta \exp(i\varphi) & \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (19)$$

将(19)式代入(14)式,计算得出

$$\begin{cases} \rho_{11}(t) = \frac{\beta + \exp[-2(\alpha + \beta)t] \times (\alpha \cos^2 \theta - \beta \sin^2 \theta)}{\alpha + \beta} \\ \rho_{10}(t) = \exp[-(\alpha + \beta)t] \times \cos \theta \sin \theta \exp(-i\varphi) \\ \rho_{01}(t) = \exp[-(\alpha + \beta)t] \times \cos \theta \sin \theta \exp(i\varphi) \\ \rho_{00}(t) = \frac{\alpha + \exp[-2(\alpha + \beta)t] \times (\beta \sin^2 \theta - \alpha \cos^2 \theta)}{\alpha + \beta} \\ \langle S_x \rangle = \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \times \exp[-(\alpha + \beta)t] \\ \langle S_y \rangle = \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \times \exp[-(\alpha + \beta)t] \\ \langle S_z \rangle = \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \{ \beta - \alpha + 2 \exp[-2(\alpha + \beta)t] \times (\alpha \cos^2 \theta - \beta \sin^2 \theta) \} \\ \langle S_x^2 \rangle = \langle S_y^2 \rangle = \frac{1}{4} \end{cases}. \quad (20)$$

3.1 原子自发辐射率对原子偶极压缩效应的影响

利用(17)式和(20)式,就能计算偶极压缩参量 F_x 和 F_y 随时间的演化, F_x 的演化规律如图 1 所示。由图可知, F_x 在演化初期呈现压缩效应,随着时间的增加压缩效应逐渐减弱直至消失。对不同 γ 值的演化曲线进行比较发现,随自发辐射率的增大,压缩区间减小,原子偶极压缩效应减弱。当 $\gamma=0.1$ 时,压缩区间为 $[0, 1.56]$; 当 $\gamma=0.2$ 时,压缩区间为 $[0, 0.78]$; 当 $\gamma=0.3$ 时,压缩区间为 $[0, 0.52]$ 。当 $\varphi=0$ 或 π 时,偶极压缩参量 F_y 没有呈现出压缩效应,其演化曲线不再给出。当 $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 时,偶极压缩参量 F_y 呈现压缩效应,其演化规律与图 1 中 F_x 的演化规律一致。由(20)式可知, $\langle S_z \rangle$ 与相位角 φ 无关,而 $\langle S_x \rangle |_{\varphi=0, \pi} = \langle S_y \rangle |_{\varphi=\pm \frac{\pi}{2}}$, 因此 $F_x |_{\varphi=0, \pi} = F_y |_{\varphi=\pm \frac{\pi}{2}}$ 。这表明当 $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, F_y 的演化与 $\varphi=0$ 或 π 时 F_x 的演化一致。

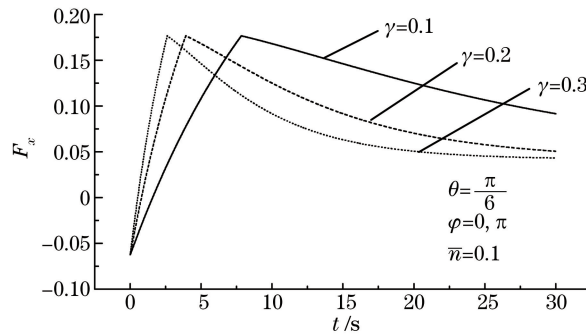


图 1 不同 γ 下的压缩参量 F_x 随时间的演化

Fig. 1 Time evolution of F_x for different γ

3.2 库场平均光子数对原子偶极压缩效应的影响

不同平均光子数 \bar{n} 对应的压缩参量 F_x 随时间的演化规律如图 2 所示。由图可知,库场平均光子数对 F_x 演化的影响类似于原子自发辐射率对 F_x 演化的影响。随库场平均光子数的增大,压缩区间减小,原子偶极压缩效应减弱。当 $\gamma=0.2, \bar{n}=0.1$ 时,压缩区间为 $[0, 0.78]$; 当 $\gamma=0.2, \bar{n}=0.5$ 时,压缩区间为 $[0, 0.54]$; 当 $\gamma=0.2, \bar{n}=1.0$ 时,压缩区间为 $[0, 0.39]$ 。

4 结 论

利用 Ket-Bra 纠缠态的特点求解了原子与库场耦合系统的密度矩阵主方程,给出了密度矩阵解的解析表达式,该方法的优点是能从原子初始密度矩阵导出任意时刻的密度矩阵。利用密度矩阵的解,研究了当原

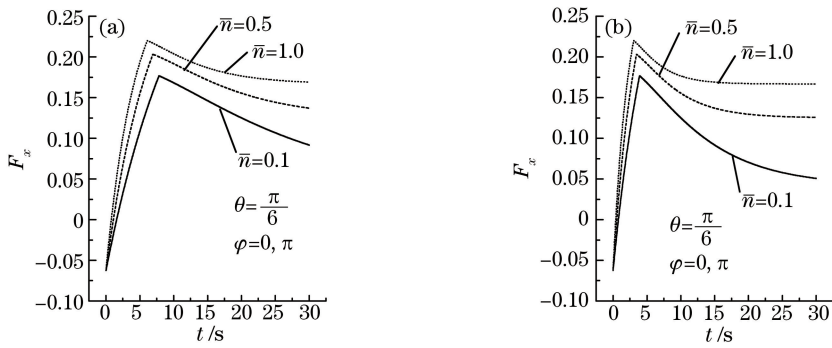


图 2 不同 γ 下,不同平均光子数对应的 F_x 随时间的演化。(a) $\gamma=0.1$; (b) $\gamma=0.2$

Fig. 2 Time evolution of F_x at different mean number of photons for different γ . (a) $\gamma=0.1$; (b) $\gamma=0.2$

子初始处于叠加态时原子的偶极压缩效应。采用数值计算方法,讨论了原子自发辐射率和库场平均光子数对原子偶极压缩效应的影响。计算结果表明,随原子自发辐射率的增大和库场平均光子数的增加,压缩区域减小直至消失,压缩效应减弱。

参 考 文 献

- Zhang Haoliang, Jia Fang, Xu Xuexiang, *et al.*. Decoherence of a photon-subtraction-addition coherent state in a thermal environment[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(1): 014208.
张浩亮, 贾芳, 徐学翔, 等. 光子增减叠加相干态在热环境中的退相干[J]. *物理学报*, 2013, 62(1): 014208.
- Zheng Xiaolan, Zhang Bin. Quantum entanglement and correlations between two qubits induced by a heat bath[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(1): 0127002.
郑小兰, 张斌. 热库诱导的两比特量子纠缠与量子关联[J]. *光学学报*, 2014, 34(1): 0127002.
- Wang Chengzhi, Yu Xiaoqin, Li Chunxian, *et al.*. Entanglement between two atoms mediated by two dissipative optical cavities[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(s2): s227001.
王成志, 喻小琴, 李春先, 等. 耗散双光腔调制的两原子间的纠缠[J]. *光学学报*, 2013, 33(s2): s227001.
- Xu B M, Zou J, Li J G, *et al.*. Effect of different environments on multipartite global discord[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2015, 63(3): 291-295.
- Pan Changning, Zhao Xuehui, Yang Diwu, *et al.*. Dipole squeezing of atomic systems in dissipative environment[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(10): 6814-6818.
潘长宁, 赵学辉, 杨迪武, 等. 耗散环境下原子-库场相互作用系统中原子的偶极压缩特性[J]. *物理学报*, 2010, 59(10): 6814-6818.
- He Zhi, Li Longwu. Quantum correlation dynamics of two two-level atoms in common environment[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(18): 180301.
贺志, 李龙武. 两二能级原子在共同环境下的量子关联动力学[J]. *物理学报*, 2013, 62(18): 180301.
- Walls D F, Zoller P. Reduced quantum fluctuations in resonance fluorescence [J]. *Physical Review Letters*, 1981, 47(10): 709-711.
- Wódkiewicz K, Knight P L, Buckle S J, *et al.*. Squeezing and superposition states[J]. *Physical Review A*, 1987, 35(6): 2567-2577.
- Lu Daoming. Dipole squeezing in the system of Λ -type three-level atom interacting with two-mode coherent light field[J]. *Acta Sinica Quantum Optica*, 2011, 17(1): 5-9.
卢道明. 选择原子测量对原子偶极压缩效应的影响[J]. *量子光学学报*, 2011, 17(1): 5-9.
- Piao Hongguang, Ma Xiaoping, Li Xinhua, *et al.*. Properties of atom dipole squeezing in time-dependent and intensity-dependent coupling J-C model[J]. *Acta Sinica Quantum Optica*, 2006, 12(4): 207-211.
朴红光, 马晓萍, 李新华, 等. 依赖于时间和强度耦合 J-C 模型中原子偶极压缩特性[J]. *量子光学学报*, 2006, 12(4): 207-211.
- Li Jun. Controlling dipole squeezing of an entangled atom via coherent state field[J]. *Acta Sinica Quantum Optica*, 2008, 14(2): 138-141.

- 栗 军. 用相干态腔场控制纠缠原子的偶极压缩[J]. 量子光学学报, 2008, 14(2): 138-141.
- 12 Zhou P, Peng J S. Dipole squeezing in the two-photon Jaynes-Cummings model with superposition statepreparation[J]. Physical Review A, 1991, 44(5): 3331-3335.
- 13 Zheng Xiaohu, Cao Zhuoliang. Dipole squeezing of the system of the two-mode entangled coherent states interacting with a V-type three-level atom[J]. Journal of Atomic and Molecular Physics, 2004, 21(4): 570-574.
郑小虎, 曹卓良. 双模纠缠相干光场与 V 型三能级原子相互作用系统的原子偶极压缩效应[J]. 原子与分子物理学报, 2004, 21(4): 570-574.
- 14 Ren Yichong, Fan Hongyi. Supersymmetry of the solution to the master equation between two-level atom and laser channel[J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(3): 030301.
任益充, 范洪义. 两能级原子主方程和激光通道主方程的解之间的超对称性[J]. 物理学报, 2016, 65(3): 030301.