

# 基于螺旋相位板的涡旋光束的产生与干涉

郭苗军 曾 军 李晋红\*

太原科技大学物理系, 山西 太原 030024

**摘要** 理论上阐述了螺旋相位板产生涡旋光束的机理, 推导了涡旋光束与平面波以及球面波的干涉强度表达式, 并用以研究了涡旋光束的干涉现象, 从数值上得到了拓扑荷数与干涉图样的对应关系。同时在实验上利用螺旋相位板获得了涡旋光束, 并得到其干涉图样, 实验结果与理论结果保持一致。研究表明, 携带不同拓扑荷的涡旋光束对应着唯一的干涉图样, 因此可以通过干涉图样直观地判断出涡旋光束的拓扑荷数。

**关键词** 物理光学; 拓扑荷; 干涉; 涡旋光束

**中图分类号** O436.1 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP53.092602

## Generation and Interference of Vortex Beam Based on Spiral Phase Plate

Guo Miaojun Zeng Jun Li Jinhong

*Department of Physics, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China*

**Abstract** The mechanism of vortex beam generated by spiral phase plate is expounded theoretically. The interference intensity expressions of the vortex beams, plane wave and spherical wave are derived and used to study the interference phenomenon of vortex beam. The corresponding relationship between topological charge and interference pattern is obtained numerically. Meanwhile, the vortex beams are obtained by spiral phase plate experimentally, and the corresponding experimental results are presented, as well as the experimental results and numerical results are practically consistent. The results show that vortex beams with different topological charges correspond to uniqueness interference pattern, hence the topological charge of vortex beam can be intuitively detected by the interference pattern.

**Key words** physical optics; topological charge; interference; vortex beam

**OCIS codes** 260.3160; 050.4865; 110.1650

## 1 引 言

涡旋光束携带的相位因子  $\exp(i l \theta)$  决定了该光束的每一个光子具有  $l \hbar$  的轨道角动量<sup>[1-2]</sup>, 其中  $l$  代表拓扑荷数<sup>[3-4]</sup>, 所以测量出涡旋光束的拓扑荷数, 也就测量出了其携带的轨道角动量。近年来, 光镊技术和量子通信技术的发展正是得益于对涡旋光束轨道角动量的利用, 轨道角动量可以被传递到微粒上并用以控制微粒平行移动和旋转<sup>[5-6]</sup>, 同时也可以对轨道角动量进行信息编码使其成为信息传输的载体<sup>[7-8]</sup>, 而这些应用依赖于确定的轨道角动量, 所以对涡旋光束拓扑荷数的测量也就成为科研工作者关注的焦点。目前, 对涡旋光束拓扑荷数的测量方法主要有衍射法和干涉法两大类, 其中衍射法包括圆孔衍射法<sup>[9]</sup>、三角形孔径衍射法<sup>[10]</sup>、六边形孔径衍射法<sup>[11]</sup>等, 干涉法包含双缝干涉法<sup>[12]</sup>、数字全息法<sup>[13]</sup>等。本文从干涉角度出发, 从理论上分析并计算了平面波以及球面波分别与涡旋光束的干涉情况, 通过干涉强度图归纳出拓扑荷数与干涉图样之间的关系, 并用实验重现了理论结果, 验证了该方法的可靠性。

收稿日期: 2016-05-16; 收到修改稿日期: 2016-05-23; 网络出版日期: 2016-08-26

基金项目: 国家自然科学基金(61405136, 11547211)

作者简介: 郭苗军(1985—), 男, 博士, 讲师, 主要从事量子光学与激光光谱方面的研究。

E-mail: guomiaojun85@sina.com

\* 通信联系人。E-mail: jinhongli@live.cn

## 2 理论分析

### 2.1 涡旋光束的产生

涡旋光束的产生方法最早由 Bryngdahl 等<sup>[14]</sup>于 1974 年提出,即利用错位干涉仪产生涡旋光束,由此他们提出了一个产生涡旋光束的基本思路,即在具有平滑波前的光波中引入一定的位错量从而产生波前位错,继而产生涡旋光束。实验室中常使用几何模式转换法<sup>[15-16]</sup>、螺旋相位板(SPP)法<sup>[17]</sup>、计算全息法<sup>[13]</sup>和空间光调制器法<sup>[18-19]</sup>来获取涡旋光束;但几何模式转换法的转换系统较复杂,各参数不易控制;计算全息法因为衍射效率不高所以只适合产生较低阶的涡旋光束;虽然空间光调制器法能够较灵活地控制光束各参数,产生高质量的涡旋光束,但受限于自身的液晶结构,不能处理功率高的激光束;螺旋相位板法能够实现较高的涡旋光束转换效率,并且能克服空间光调制器的缺点,对高功率光束进行转换。本文所用的涡旋光束都是通过螺旋相位板法得到的,其中,螺旋相位板法是指利用螺旋相位板向具有平滑波前的光波中引入一定的位错量从而产生波前位错,继而生生成涡旋光束的方法。图 1 为螺旋相位板,它是一块具有固定折射率的透明板,其中一端是规则的平面结构,另一端则是一个类似旋转台阶的不规则螺旋面结构,螺旋面的厚度  $h$  会随着方位角  $\theta$  的增加而增加,其中螺旋相位板总厚度  $d$  与方位角  $\theta$  具有如下关系<sup>[20]</sup>:

$$d = h_0 + \frac{h\theta}{2\pi}, \quad (1)$$

式中  $h_0$  代表螺旋相位板基础厚度,  $h$  代表步幅高度(或旋转台阶厚度),  $n$  和  $n_0$  分别表示螺旋相位板内部折射率和周围介质折射率。在步幅高度和光束发散角足够小时,螺旋相位板基本不会改变透射光束的光强,可以认为是一个纯相位型的调制工具。

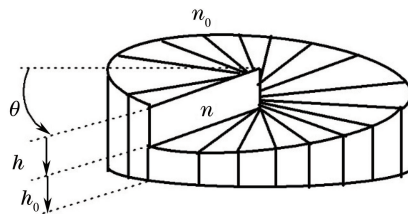


图 1 螺旋相位板结构图

Fig. 1 Structure of spiral phase plate

如图 2 所示,当入射激光束(平面波)通过螺旋相位板时,由于螺旋相位板厚度的不均匀使得光束在通过的过程中产生了一定的光程差,并导致相位也发生了对应的变化,从而使得出射光束变为具有螺旋波前(即携带相位因子)的涡旋光束。入射光与出射光之间产生的相位延迟为

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{(n - n_0)h\theta}{2\pi} + nh_0 \right], \quad (2)$$

式中  $\lambda$  为波长。由(2)式可知,当方位角顺时针增加  $2\pi$  时,相位延迟的增加量  $\Delta\phi = (n - n_0)2\pi h/\lambda$ ,由符号法则<sup>[21]</sup>可知,当相位顺时针增加  $\Delta\phi = 2l\pi$  时,拓扑荷值为  $l$ ,则得到拓扑荷表达式为

$$l = (n - n_0)h/\lambda. \quad (3)$$

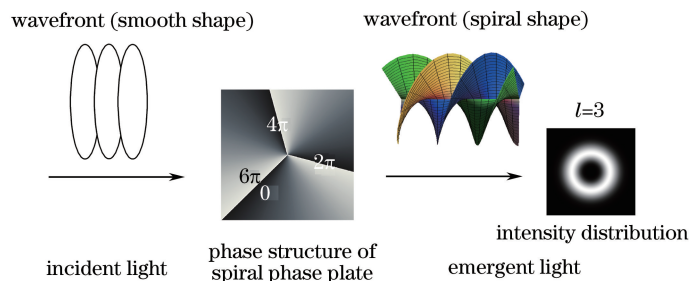


图 2 利用螺旋相位板产生涡旋光束示意图

Fig. 2 Diagrammatic drawing of generation of vortex beam by spiral phase plate

图 2 中给出的是相位结构为逆时针增加  $6\pi$  的螺旋相位板,通过该光路后可以产生拓扑荷为 3 的涡旋光束。

## 2.2 平面波干涉法

平面波干涉法就是将平面波与被测涡旋光束进行干涉,通过产生的叉形干涉条纹的分叉数和方向来确定被测涡旋光束拓扑荷的方法。涡旋光束的场分布可简单表示为

$$E_{\text{vortex}} = E_1 \exp(-\rho^2/\omega_0^2) \exp(i l \theta), \quad (4)$$

式中  $E_1$  为涡旋光束振幅,  $\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}$ ,  $(\rho_x, \rho_y)$  为二点坐标分量,  $\omega_0$  为束腰宽度,  $\theta = \arctan(\rho_y/\rho_x)$  为围绕涡旋轴的方位角,  $l$  为拓扑荷数。

平面波的场分布可简单表示为

$$E_{\text{plane}} = E_2 \exp(-\rho^2/\omega_0^2) \exp(-ikx), \quad (5)$$

式中  $E_2$  为平面波振幅,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数。

平面波与涡旋光束干涉后的干涉强度为

$$\begin{aligned} I_1 &= |E_{\text{vortex}} + E_{\text{plane}}|^2 = (E_{\text{vortex}} + E_{\text{plane}})(E_{\text{vortex}}^* + E_{\text{plane}}^*) = \\ &E_1^2 + E_2^2 + E_1 E_2 \exp[i(l\theta + kx)] + E_1 E_2 \exp[-i(l\theta + kx)] \exp(-2\rho^2/\omega_0^2) = \\ &[E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(l\theta + kx)] \exp(-2\rho^2/\omega_0^2). \end{aligned} \quad (6)$$

基于(6)式,可以模拟出平面波与涡旋光束的干涉光强模拟图,计算参数为  $E_1 = E_2 = 1$ ,  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 1 \text{ mm}$ ,  $l = 1, 2, 3, -1, -2, -3$ 。如图 3 所示,拓扑荷的符号和数值大小决定着干涉条纹中叉形条纹的方向和数量,反之亦然,通过干涉条纹分叉方向和分叉数同样可以推断出发生干涉的涡旋光束的拓扑荷。当拓扑荷符号为正即  $l > 0$  时,干涉条纹向上分叉;当拓扑荷符号为负即  $l < 0$  时,干涉条纹向下分叉。当拓扑荷数值  $|l| = 1, 2, 3$  时,干涉条纹的分叉数分别为 2, 3, 4, 即拓扑荷数值  $|l| = N - 1$ , 其中  $N$  为分叉数。

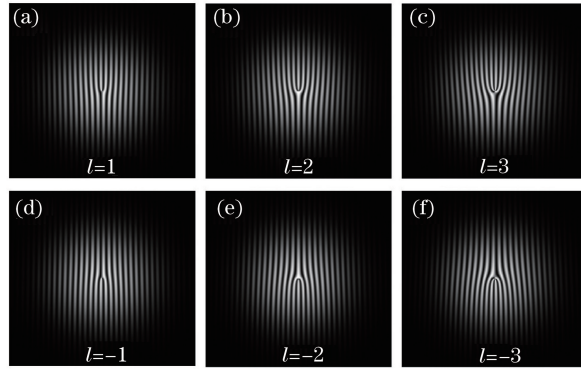


图 3 平面波与涡旋光束干涉强度理论图

Fig. 3 Theoretical interference intensity of vortex beams with plane wave

## 2.3 球面波干涉法

球面波干涉法就是将球面波与被测涡旋光束进行干涉,通过产生的螺旋干涉条纹的条数和旋转方向来确定被测光束拓扑荷的方法。球面波的场分布简单表示为

$$E_{\text{sphere}} = E_3 \exp(-\rho^2/\omega_0^2) \exp(-ikr), \quad (7)$$

式中  $E_3$  为球面波振幅,  $r = \sqrt{d^2 + \rho^2}$ ,  $d$  为球面波光源到干涉屏的距离,其他参量同上。

球面波与涡旋光束干涉后的干涉条纹强度为

$$\begin{aligned} I_2 &= |E_{\text{vortex}} + E_{\text{sphere}}|^2 = (E_{\text{vortex}} + E_{\text{sphere}})(E_{\text{vortex}}^* + E_{\text{sphere}}^*) = \\ &E_1^2 + E_3^2 + E_1 E_3 \exp[i(l\theta + kr)] + E_1 E_3 \exp[-i(l\theta + kr)] \exp(-2\rho^2/\omega_0^2) = \\ &[E_1^2 + E_3^2 + 2E_1 E_3 \cos(l\theta + kr)] \exp(-2\rho^2/\omega_0^2). \end{aligned} \quad (8)$$

基于(8)式,可以模拟出球面波与涡旋光束的干涉强度模拟图,如图 4 所示,计算参数为  $E_3 = 1$ ,其他参数同图 3。由图 4 可知,拓扑荷的符号和数值大小决定着干涉条纹的旋转方向和条数,反之亦然,通过干涉条纹旋转方向和条数同样可以推断出发生干涉的涡旋光束的拓扑荷。干涉强度图都是螺旋状环形干涉条纹,当拓扑荷  $l > 0$  时,干涉条纹沿顺时针方向旋转;当拓扑荷  $l < 0$  时,干涉条纹沿逆时针方向旋转。当拓扑荷数值

$|l|=1,2,3$  时,干涉条纹的条数分别为 1,2,3 条,即拓扑荷数值  $|l|=M$ ,其中  $M$  为螺旋条纹条数。

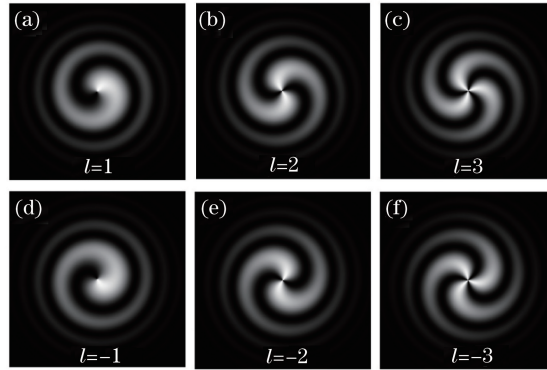


图 4 球面波与涡旋光束干涉强度理论图

Fig. 4 Theoretical interference intensity of vortex beams with spherical wave

### 3 实验分析

#### 3.1 实验装置及原理

图 5 给出了平面波干涉法测量拓扑荷的实验装置图,透镜  $L_1$  和  $L_2$  组成光路的扩束系统并使得由激光器发出的激光平行传输;偏振分光棱镜(PBS)能将光路分为两束,其中透射光为水平偏振光,反射光为垂直偏振光,光束通过  $PBS_1$  后变为水平方向的线偏振光(平面波),然后通过  $PBS_2$  后分为两束光,透射光(光束 1)经平面镜  $M_1$  补偿光程差后作为参考光束(平面波)保持传输,反射光(光束 2)通过涡旋相位板(VPP)的相位调制后变为涡旋光束(被测光束),再经  $M_2$  补偿光程差后在  $PBS_3$  处与光束 1 合为一束,其中参考光经过  $PBS_3$  后是水平偏振光,而被测涡旋光束经过  $PBS_3$  后是垂直偏振光,最后利用  $PBS_4$  将垂直偏振方向的被测光束变为水平偏振从而使得两束光偏振方向一致并发生干涉,干涉图样由 CCD 接收和观察;半波片(HWP)是为了调节经过 PBS 后的透射光和反射光的相对强度。图中虚线框表示当进行球面波干涉法测定拓扑荷数时用透镜  $L_3$  将平面波(光束 1)转变为球面波。

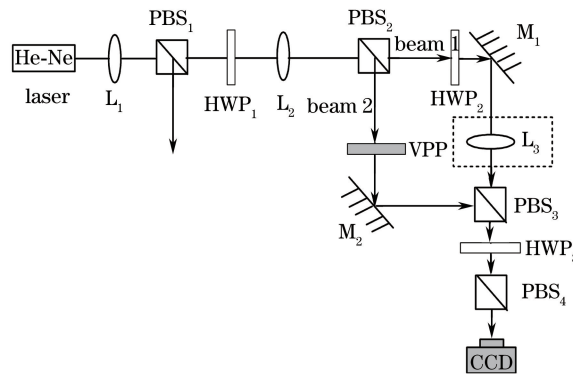


图 5 平面波干涉法测定拓扑荷数的实验装置图

Fig. 5 Experimental setup of measuring topological charge using plane wave interferometry

#### 3.2 涡旋光束的产生

图 6(a)~(c)为携带不同拓扑荷的涡旋光束的强度理论图,图 6(d)~(f)为利用螺旋相位板法得到携带不同拓扑荷的涡旋光束强度实验图。由图 6 可知,涡旋光束光强基本呈圆对称分布,且具有暗中空结构,随着拓扑荷数的增加,涡旋光束的亮环半径变大,同时空心区域面积变大,涡旋特性表现得越为明显,且实验图和理论图吻合的相当好,变化趋势也保持一致,故螺旋相位板法是科研人员所普遍认可的一种产生涡旋光束的方法,但由于螺旋相位板制作工艺的高精度要求,再加上制作完成的螺旋相位板只能改变固定的相位值,所以它对拓扑荷的调控显得不够灵活。

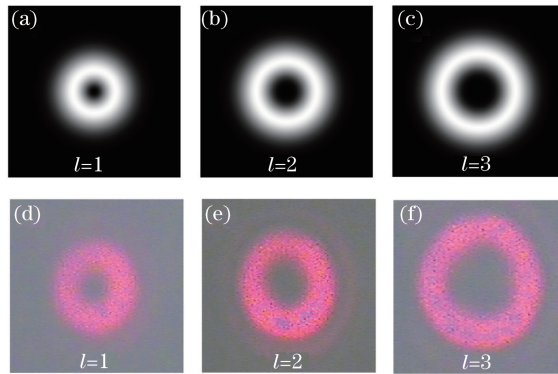


图 6 涡旋光束强度图。(a)(d) $l=1$ ;(b)(e) $l=2$ ;(c)(f) $l=3$

Fig. 6 Intensity diagram of vortex beams. (a)(d)  $l=1$ ; (b)(e)  $l=2$ ; (c)(f)  $l=3$

### 3.3 平面波干涉法实验结果

图 7 给出了按照上述装置得到的平面波与涡旋光束干涉强度实验图。实验参数为  $\lambda=632.8\text{ nm}$ ,  $f_{L1}=50\text{ mm}$ ,  $f_{L2}=300\text{ mm}$ , VPP 相位改变范围为  $0\sim 6\pi$ , 改变步幅为  $2\pi$ 。由图 7 和图 3 可知, 实验所得结果与理论模拟结果基本一致, 其干涉条纹都是叉形条纹, 且叉形干涉条纹的分叉方向和分叉数会随着拓扑荷数的变化而变化, 反之亦然, 通过干涉条纹的分叉方向和分叉数同样可以推断出发生干涉的涡旋光束的拓扑荷。当光路对准 VPP 有效面的相位结构分别为逆时针增加  $2\pi, 4\pi, 6\pi$  时, 根据符号法则<sup>[21]</sup>可知通过此 VPP 后生成的涡旋光束携带的拓扑荷  $l=1, 2, 3$ , 此时对应的干涉强度图如图 7(a)~(c)所示, 图中干涉条纹分叉方向均朝上, 分叉数分别为 2, 3, 4, 这与理论图 3(a)~(c)分别相对应, 即当涡旋光束携带的拓扑荷符号为正时, 干涉条纹分叉方向朝上, 且干涉条纹的分叉数比拓扑荷数多 1 个; 当光路对准 VPP 有效面的相位结构分别为顺时针增加  $2\pi, 4\pi, 6\pi$  时, 根据符号法则可知通过此 VPP 后生成的涡旋光束携带的拓扑荷  $l=-1, -2, -3$ , 此时对应的干涉强度图为图 7(d)~(f), 图中干涉条纹分叉方向均朝下, 分叉数分别为 2, 3, 4, 这与图 3(d)~(f)分别相对应, 即当涡旋光束携带的拓扑荷符号为负时, 干涉条纹分叉方向朝下, 且干涉条纹的分叉数比拓扑荷数多 1 个。

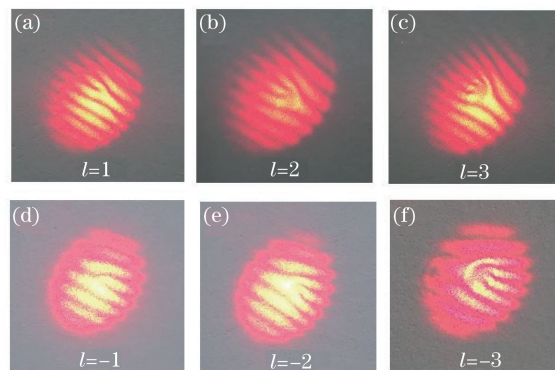


图 7 平面波与涡旋光束干涉强度实验图

Fig. 7 Experimental interference intensity of vortex beams with plane wave

### 3.4 球面波干涉法实验结果

图 8 给出了球面波与涡旋光束干涉强度实验图。实验参数为  $f_{L3}=150\text{ mm}$ , 其他参数同图 7。由图 8 和图 4 可知, 实验所得结果与理论模拟结果也基本一致, 其干涉条纹不再是整体平行的分叉型条纹, 而是螺旋环绕型条纹, 且干涉条纹的环绕方向和条数会随着拓扑荷数的不同而不同。当球面波与携带拓扑荷  $l=1, 2, 3$  的涡旋光束分别进行干涉时, 其干涉强度图分别对应图 8(a)~(c), 图中的干涉条纹都是按顺时针方向环绕旋转, 条纹数分别为 1, 2, 3 条, 这与理论图 4(a)~(c)分别相对应, 即当涡旋光束携带的拓扑荷符号为正时, 干涉条纹按顺时针方向旋转, 且干涉条纹的条纹数等于拓扑荷数。当球面波与携带拓扑荷  $l=-1, -2, -3$  的涡旋光束分别进行干涉时, 其干涉强度图分别对应图 8(d)~(f), 图中的干涉条纹则是按逆时针

方向环绕旋转,条纹数分别为1,2,3条,这与理论图4(d)~(f)分别相对应,即当涡旋光束携带的拓扑荷符号为负时,干涉条纹按逆时针方向旋转,且干涉条纹的条纹数等于拓扑荷数。

对实验结果进行分析可知,平面波干涉法中的分叉数和分叉方向清晰可见,球面波干涉法中也能较容易地获取螺旋环绕型条纹旋转方向和条数,以此为依据可得出涡旋光束拓扑荷数和干涉条纹之间的关系,且实验结果与理论模拟结果保持一致,因此该实验方法比较可靠。由于实验条件的约束,在 CCD 处发生干涉的两束光所形成的平面与实验平台无法保持严格平行,从而导致实验图与模拟图的整体方位有个角度的旋转,但是对结果的分析不会造成影响。

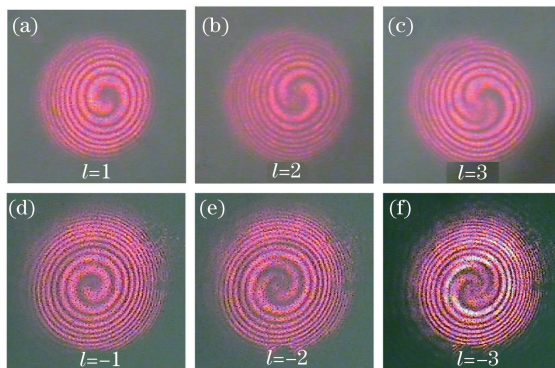


图8 球面波与涡旋光束干涉强度实验图

Fig. 8 Experimental interference intensity of vortex beams with spherical wave

## 4 结 论

阐述了利用螺旋相位板产生涡旋光束的机理,推导了平面波以及球面波与涡旋光束的干涉强度表达式,并用以研究涡旋光束的干涉现象,得到了拓扑荷与干涉条纹的对应关系,并用实验加以验证,且实验结果与理论结果保持一致。研究表明,携带不同拓扑荷的涡旋光束对应着唯一的干涉条纹,平面波与涡旋光束干涉得到的是叉形条纹,拓扑荷为正(或负)时,干涉条纹向上(或下)分叉,分叉数比拓扑荷数多1个。球面波与涡旋光束干涉得到的是螺旋环绕型条纹,拓扑荷为正(或负)时,干涉条纹按顺时针(或逆时针)方向环绕旋转,螺旋条纹数与拓扑荷数相等。因此,可以通过干涉条纹直观地判断出涡旋光束的拓扑荷数。涡旋光束拓扑荷的测定对光镊技术以及量子通信技术的发展具有重要的促进作用。

## 参 考 文 献

- Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J, *et al.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. *Phys Rev A*, 1992, 45(11): 8185-8189.
- Liu Man. Novel method to detect the orbital angular momentum in optical vortex beams[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(3): 0326002.  
刘曼. 探测涡旋光束轨道角动量的新方法[J]. *光学学报*, 2013, 33(3): 0326002.
- Soskin M S, Vasnetsov M V. Singular optics[J]. *Progress in Optics*, 2001, 42: 219-276.
- Ge Xiaolu, Wang Benyi, Guo Chengshan. Beam broadening of vortex beams propagating in turbulent atmosphere[J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(3): 0301002.  
葛筱璐, 王本义, 国承山. 涡旋光束在湍流大气中的光束扩展[J]. *光学学报*, 2016, 36(3): 0301002.
- Simpson N B, Dholakia K, Allen L, *et al.* Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: An optical spanner[J]. *Opt Lett*, 1997, 22(1): 52-54.
- Luo Wei, Cheng Shubo, Yuan Zhanzhong, *et al.* Power-exponent-phase vortices for manipulating particles[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(11): 1109001.  
罗伟, 程书博, 袁战忠, 等. 幂指数相位涡旋光束用于微粒操控[J]. *光学学报*, 2014, 34(11): 1109001.
- Molina-Terriza G, Torres J P, Torner L. Management of the angular momentum of light: Preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum[J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 88(1): 013601.

- 8 Liu Yidong, Gao Chunqing, Gao Mingwei, *et al.* Realizing high density optical data storage by using orbital angular momentum of light beam[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56(2): 854-858.  
刘义东, 高春清, 高明伟, 等. 利用光束的轨道角动量实现高密度数据存储的机理研究[J]. *物理学报*, 2007, 56(2): 854-858.
- 9 Guo C S, Lu L L, Wang H T. Characterizing topological charge of optical vortices by using an annular aperture[J]. *Opt Lett*, 2009, 34(23): 3686-3688.
- 10 Hickmann J M, Fonseca E J, Soares W C, *et al.* Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105(5): 053904.
- 11 Liu Y, Pu J. Measuring the orbital angular momentum of elliptical vortex beams by using a slit hexagon aperture[J]. *Opt Commun*, 2011, 284(10-11): 2424-2429.
- 12 Liao Kunshan, Chen Ziyang, Pu Jixiong. Measuring the topological charge of vortex beams with young's double-slit interference experiment[J]. *Journal of Huaqiao University (Natural Science)*, 2009, 30(6): 623-627.  
廖坤山, 陈子阳, 蒲继雄. 利用杨氏双缝干涉实验检测涡旋光束的拓扑荷数[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2009, 30(6): 623-627.
- 13 Wang Lin, Yuan Caojin, Nie Shouping, *et al.* Measuring topology charge of vortex beam using digital holography[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(24): 244202.  
王 林, 袁操今, 聂守平, 等. 数字全息术测定涡旋光束拓扑电荷数[J]. *物理学报*, 2014, 63(24): 244202.
- 14 Bryngdahl O, Lee W H. Shearing interferometry in polar coordinates[J]. *J Opt Soc Am*, 1974, 64(12): 1606-1615.
- 15 Beijersbergen M W, Allen L, van der Veen H E L O, *et al.* Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum[J]. *Opt Commun*, 1993, 96(1-3): 123-132.
- 16 Arlt J, Dholakia K. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon[J]. *Opt Commun*, 2000, 177(1-6): 297-301.
- 17 Chen J, Kuang D F, Gui M, *et al.* Generation of optical vortex using a spiral phase plate fabricated in quartz by direct laser writing and inductively coupled plasma etching[J]. *Chin Phys Lett*, 2009, 26(1): 014202.
- 18 Curtis J E, Grier D G. Modulated optical vortices[J]. *Opt Lett*, 2003, 28(11): 872-874.
- 19 Curtis J E, Grier D G. Structure of optical vortices[J]. *Phys Rev Lett*, 2003, 90(13): 133901.
- 20 Lu Xuanhui, Huang Huiqin, Zhao Chengliang, *et al.* Optical vortex beams and optical vortices [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2008, 45(1): 50-56.  
陆璇辉, 黄慧琴, 赵承良, 等. 涡旋光束和光学涡旋[J]. *激光与光电子学进展*, 2008, 45(1): 50-56.
- 21 Freund I I, Shvartsman N. Wave-field phase singularities: The sign principle[J]. *Phys Rev A*, 1994, 50(6): 5164-5172.