

# 光诱导自聚焦类方晶格非格点激励一阶涡旋光演化

覃亚丽 杨斌 余文慷 薛林林 施朝霞 任宏亮

浙江工业大学信息工程学院光纤通信与信息工程研究所, 浙江 杭州 310023

**摘要** 光诱导光子晶格是一种周期光学系统,其对光束传输的控制在全光交换、光开关等方面具有潜在应用。运用优化的交替隐式差分波传输法对非线性薛定谔方程进行数值仿真,研究了涡旋光束在光诱导自聚焦类方晶格中的传播特性、光子晶格对光束传输的影响以及形成涡旋孤子的条件。研究发现,不存在晶格时,涡旋光束会由于自聚焦效应而分裂成基态孤子;存在晶格时,离散涡旋孤子的稳定传输与外加电场、晶格深度、输入光强有关,非格点激励的一阶涡旋光束在合适的条件下能形成稳定传输的离散涡旋孤子。

**关键词** 非线性光学; 涡旋孤子; 光子晶格; 光折变效应; 非线性薛定谔方程

**中图分类号** O436 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP53.071901

## Evolution of Off-Site First-Order Optical Vortices in Optically Induced Self-Focusing Square-Like Photonic Lattices

Qin Yali Yang Bin Yu Wensu Xue Linlin Shi Zhaoxia Ren Hongliang

*Institute of Fiber Optic Communication and Information Engineering, College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, Zhejiang 310023, China*

**Abstract** Optically induced photonic lattices are periodic optical structures that can control the beam propagation, which has potential applications in all-optical exchange and optical switch *etc.* An optimized alternative implicit differential wave propagation method is adopted to numerically simulate the nonlinear Schrödinger equation. The propagation characteristics of a vortex beam in optically induced self-focusing square-like lattices, the influence of the lattices on the beam propagation, and the conditions under which vortex solitons are formed are studied. The results show that the vortices will decay into the fundamental solitons due to self-focusing when there is no lattice. When the lattice exists, the stable propagation of the discrete vortex solitons is related to the applied electric field, the lattice depth and the input light intensity. Off-site single-charged first-order vortices can form discrete vortex solitons that propagate stably under appropriate conditions.

**Key words** nonlinear optics; vortex soliton; photonic lattice; photorefractive effect; nonlinear Schrödinger equation

**OCIS codes** 190.5330; 190.4360; 190.4400

## 1 引言

涡旋光束能在自散焦非线性介质中形成稳定传输的涡旋孤子<sup>[1]</sup>,并能导波其他光束。但在自聚焦非线性介质中,由于方位角调制的不稳定性<sup>[2]</sup>,涡旋光束的涡旋相位不能保持,在传输过程中会逐步分裂,最终演化成一些沿切线方向分离的基态孤子<sup>[3-4]</sup>,这将极大地限制涡旋光束在非线性介质中的应用。现已研究出多种方法来稳定涡旋孤子在介质中的传输,如运用竞争非线性介质<sup>[5]</sup>、光子晶格<sup>[6-8]</sup>以及非线性非局域介质<sup>[9-12]</sup>等。由于周期结构对光束传输的特殊控制作用,光波在周期结构中的传输行为一直是诸多学者的研究对象。早期关于光束在光子晶格中传输的研究主要集中在一维波导阵列中,二维甚至更高维的波导阵列

**收稿日期:** 2016-02-03; **收到修改稿日期:** 2016-03-03; **网络出版日期:** 2016-06-24

**基金项目:** 国家自然科学基金(61275124,61405178,61306090)

**作者简介:** 覃亚丽(1963—),女,博士,教授,主要从事光孤子及非线性光学、微波通信及电磁计算、信号处理等方面的研究。

E-mail: ylqin@zjut.edu.cn

的制作难度导致该领域的研究遇到瓶颈。2002年, Efremidis等<sup>[11]</sup>提出通过光诱导的方法在光折变晶体中制作光子晶格, 这为光波在周期结构中的演化提供了新的实验手段。光诱导光子晶格是利用输入光强的空间调制在光折变晶体中感生出的光子晶格。光束在光子晶格中传输时会出现许多不同于在连续介质中传输的现象, 利用这些现象可以有效控制光束的传输, 其间形成的非线性晶格孤子可以应用于全光交换<sup>[13]</sup>、光开关<sup>[14]</sup>、光信号计算和逻辑处理等方面。涡旋光束在光子晶格中的传输是离散效应、轨道角动量和非线性相互作用的结果, 调整晶格与涡旋光的参数不仅能有效地产生稳定传输的涡旋孤子, 还能激发许多有趣的现象, 如拓扑翻转<sup>[15]</sup>、非对称涡旋孤子<sup>[16]</sup>和涡旋变形<sup>[17]</sup>等, 为涡旋光束的研究开辟了新的领域。

关于涡旋光在光子晶格中传输的研究可追溯到2001年<sup>[18]</sup>。2004年, Neshev等<sup>[19]</sup>和 Fleischar等<sup>[20]</sup>都尝试运用非线性光子晶格来抑制涡旋光束在自聚焦介质中受到的方位角调制不稳定, 实现了涡旋光束在自聚焦介质中的稳定传输。同年, 有学者开始讨论周期对称的晶格上非对称的涡旋孤子, 并运用能量平衡关系来分析非线性局域结构所描述的基本环流。随后, Alexander等<sup>[21]</sup>讨论了涡旋孤子在三角光晶格中的传输情况。2010年, Terhalle等<sup>[15]</sup>讨论了涡旋光在光诱导的六边形晶格中的传输情况, 并研究了光折变介质各向异性导致的涡旋翻转现象, 发现适当调整晶格参数可以抑制这种现象的发生<sup>[15]</sup>。近年来, 研究涡旋光在周期介质中的传输特性时不再局限于光诱导的类方晶格, 而发展到了贝塞尔晶格<sup>[22-24]</sup>、光子晶体光纤等周期介质中。2012年, Lobanov等<sup>[25]</sup>在光子晶体光纤的空隙中填充非均匀的散焦非线性介质, 使涡旋孤子在其中稳定地传输。讨论涡旋光在介质中的传输特性时也不再局限于二维涡旋孤子, 开始向三维时空涡旋孤子发展<sup>[26]</sup>。凌振芳等<sup>[27]</sup>从理论上证实了调整适当的参数可以克服光生伏打光折变晶体的各向异性, 产生对称的环形涡旋光。方桂娟等<sup>[28]</sup>和 Sakaguchi等<sup>[29]</sup>研究了涡旋光束的产生、干涉以及轨道角动量的测量等问题。

由于光折变介质中弱光场的非线性效应, 研究涡旋光在光折变介质诱导的光子晶格中的稳定传输、涡旋光传输的各种现象以及涡旋光的应用在光信息领域具有潜在的价值。本文研究非格点激励的一阶涡旋光束在光诱导的自聚焦类方光子晶格中的传输演化特性。

## 2 数学模型

### 2.1 光子晶格中孤子的传输模型

采用铌酸锶钡(SBN)晶体的数据计算, 对于光折变晶体, 晶体中非线性折射率变化的大小与输入光束的强度和偏振方向有关。当沿着晶轴  $c$  方向施加电场后, 光折变的屏蔽效应占主导地位, 此时非寻常光( $e$ 光)的非线性折射率将改变,  $\Delta n_e = (n_e^3 \gamma_{33} E_0 / 2) (1 + H)^{-1}$ , 而寻常光( $o$ 光)的非线性折射率改变量  $\Delta n_o = (n_o^3 \gamma_{13} E_0 / 2) (1 + H)^{-1}$ 。其中  $\gamma_{13}$  为  $o$  光遵循的电光系数,  $\gamma_{33}$  为  $e$  光遵循的电光系数, 光折变晶体中  $\gamma_{33}$  约为  $\gamma_{13}$  的 10 倍;  $n_o$  为  $o$  光的折射率,  $n_e$  为  $e$  光的折射率, 两个值基本相同, 所以在相同的条件下  $\Delta n_e$  约为  $\Delta n_o$  的 10 倍。进行实验时, 一般运用偏振分光棱镜将输入光束分成偏振状态相互垂直的两束光, 其中  $o$  光作为阵列光,  $e$  光作为探测光。与探测光相比, 诱导产生光子晶格的  $o$  光自身引起的非线性折射率变化基本可以忽略, 可认为  $o$  光是线性传播的。

光束在光折变晶体中传输时所遵循的非线性薛定谔方程为

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0^2 x_0^2 n_e^4 \gamma_{33} E_0}{2(1+H)} u = 0, \quad (1)$$

式中  $u$  为光束的慢变包络;  $k_0$  为波数;  $x_0$  为任意空间宽度, 一般取光束宽度;  $E_0$  为外加电场的强度, 一般光折变晶体对外表现出自聚焦还是自散焦非线性取决于电场的方向, 当外加电场与晶体的  $c$  轴同向时, 晶体呈现自聚焦非线性, 当外加电场与晶体的  $c$  轴反向时, 晶体呈现自散焦非线性;  $H$  为输入光束与背景光归一化之后的强度, 一般包括形成光子晶格的阵列光强度  $I_g$  和作为探测光的涡旋光束强度  $|u|^2$ 。对于晶格分布的数学描述可采用多种曲线, 例如矩形、双曲正割、高斯型等。仿真计算中采用类高斯曲线, 这是因为四方二维晶格由两对相干光束相互干涉而形成, 每个格点的能量分布类似于高斯分布, 选择类高斯曲线不仅易于数学描述且更加符合实际情况。用正弦函数的平方来描述晶格的能量分布<sup>[25]</sup>:

$$I_g(x, y) = I_0 \sin^2(\pi x/d) \sin^2(\pi y/d), \quad (2)$$

式中  $I_0$  为晶格强度的最大值, 也可称为晶格深度;  $d$  为晶格周期。当晶格深度  $I_0 = 1$ 、晶格周期  $d = 2$  时, 晶

格横截面上的能量分布如图 1 所示。从图 1(a)可以看出晶格格点的分布呈正方形,从图 1(b)可以看出每个格点中间能量高且向周围逐渐降低,能量分布类似于高斯分布。对于(1)式,令  $V_0 = k_0^2 n_c^4 \gamma_{33} x_0^2 E_0 / 2$ , 则光束在光诱导光子晶格中传输时满足的归一化非线性薛定谔方程可写为

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{V_0 u}{1 + I_g(x, y) + |u|^2} = 0. \quad (3)$$

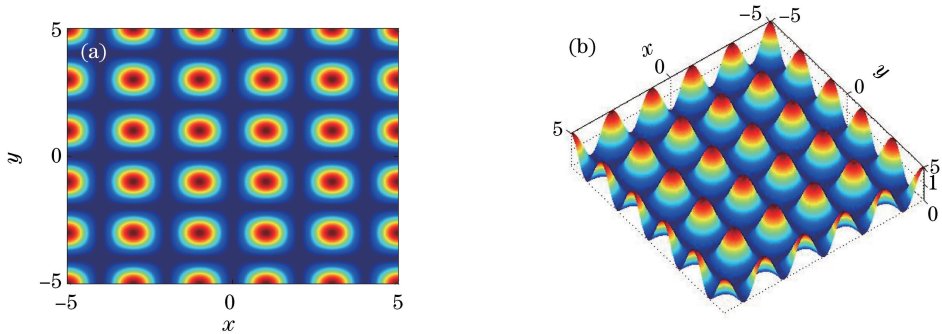


图 1 晶格的能量分布。(a) 二维视角; (b) 三维视角

Fig. 1 Lattice energy distribution. (a) Two-dimensional; (b) three-dimensional

## 2.2 一阶涡旋孤子

为研究一阶涡旋孤子在光诱导光子晶格中的传输,使用交替隐式差分波传输法对(3)式进行数值求解。输入涡旋光束的数学模型描述为

$$u(r, \theta) = Ar^m \exp(-r^2/\omega^2 + im\theta), \quad (4)$$

式中  $(r, \theta)$  为极坐标,  $A$  为光束振幅,  $\omega$  为光束宽度,  $m$  为拓扑电荷数。对于一阶涡旋光束,拓扑电荷数  $m=1$ ,其强度分布与相位分布如图 2(a)、(b)所示。

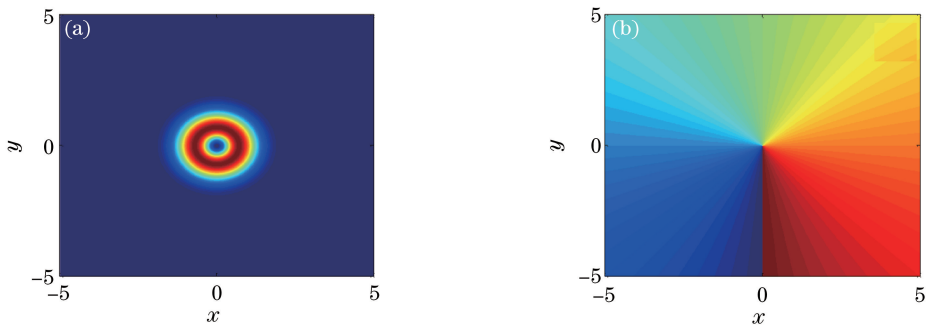


图 2 输入一阶涡旋光束的(a)强度分布与(b)相位分布

Fig. 2 (a) Intensity distribution and (b) phase distribution for input vortex beam

图 2(a)为光束宽度  $\omega=1$  且  $m=1$  的涡旋光束强度分布,可以看出涡旋光束的强度呈环形分布,光束中心的奇点处强度为零。图 2(b)为  $m=1$  时涡旋光束的相位分布,可以看出绕奇点旋转一周后光束的相位变化值为  $2\pi$ 。

## 3 数值仿真结果与讨论

### 3.1 无晶格情况

考虑涡旋光束在不存在晶格的自聚焦介质中的传输。介质中空间孤子的形成是光束衍射效应与非线性效应相互作用的结果。光束在光折变介质中传输时,如果外加电场消失则非线性效应也随之减弱甚至消失,此时涡旋光束传输一段距离之后会因衍射效应的存在而出现展宽,如图 3(a)所示,取光束振幅  $A=4$ ,光束宽度  $\omega=1$ 。加入非线性效应之后,由于涡旋光束的相位波前呈螺旋状分布,存在角动量,环状的涡旋光束会受到方位角调制不稳定而分裂成一些沿着切线方向分离的基态孤子,如图 3(b)所示,取光束振幅  $A=4$ ,归一化的外加电场强度  $V_0=50$ 。数值仿真发现,当其他条件一定时,增加外加电场强度可以加速环状涡旋

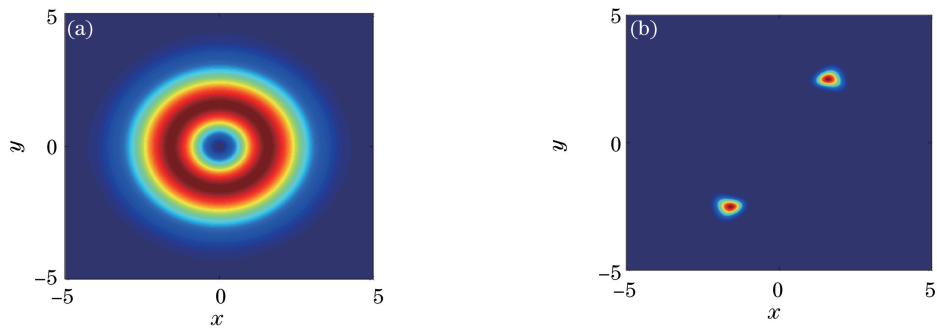


图3 涡旋光束在无晶格的自聚焦光折变介质中传输后的强度分布。

(a)  $z=1$  处线性衍射的强度分布; (b)  $z=3.2$  处非线性传输后的强度分布

Fig. 3 Vortex beam intensity distribution after propagation in the self-focusing photorefractive medium without lattices.

(a) Intensity distribution with linear diffraction for  $z=1$ ; (b) intensity distribution after nonlinear transmission for  $z=3.2$

孤子的分裂。另外,分裂的基态孤子个数通常与拓扑电荷数  $m$  有关,一般等于  $2m$ ,例如一阶涡旋孤子最终分裂成两个基态孤子,而二阶涡旋孤子分裂成四个基态孤子。

### 3.2 非格点激发的涡旋孤子

考虑涡旋光束在自聚焦光子晶格中传输的情况。介质中存在晶格时,环状的涡旋光束在其中传输时会形成离散的涡旋孤子。最早由 Kevrekidis 从离散模型以及 Yang 从连续模型中通过理论研究预言过离散涡旋孤子的存在。但直到光诱导光子晶格方法的提出及实现之后才得到实验验证。离散涡旋孤子根据激发方式的不同一般可分为两种,一种是光涡旋在格点上的格点激发涡旋孤子,另外一种是非格点激发涡旋孤子。考虑非格点激发的涡旋孤子,涡旋光束的输入位置如图 4 中的白圈所示。

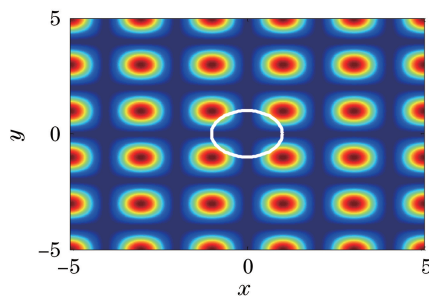


图4 非格点激发方式涡旋光束的输入位置

Fig. 4 Position of input vortex beam with off-site excitation

当自聚焦介质中嵌入光诱导光子晶格后,晶格折射率的周期分布可以很好地抑制涡旋光束所受到的方位角调制不稳定,一定条件下能形成稳定传输的涡旋孤子。图 5 描述了光束振幅  $A=4$ 、晶格深度  $I_0=10$ 、归一化的外加电场强度  $V_0=20$  时,涡旋光束在光子晶格中传输了 6.4 个单位长度后孤子的强度分布和相位分布。从图 5(a)可以看出离散涡旋孤子的强度分布由四个基本孤子组成,它们分别聚焦在初始入射的四个

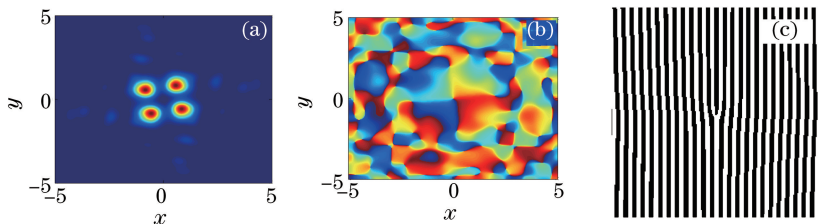


图5 非格点激发涡旋光束传输  $z=6.4$  后的结果。(a) 涡旋孤子的强度分布;

(b) 涡旋孤子的相位分布; (c) 涡旋孤子与平面波干涉图

Fig. 5 Evolution of off-site excited vortex beam at  $z=6.4$ . (a) Intensity distribution of the vortex soliton;

(b) phase distribution of the vortex soliton; (c) interference pattern of vortex solitons with plane wave

格点上。由于一阶涡旋围绕其中心奇点一周后相位变化了  $2\pi$ ，所以相邻两个格点之间的相位差为  $\pi/2$ ，如图 5(b) 所示。图 5(c) 表明输出的是一阶离散涡旋孤子而不是四个相互不耦合的基态孤子。

由以上分析可得，在一定条件下光诱导光子晶格中可以存在稳定传输的离散涡旋孤子。但离散涡旋孤子的稳定传输与外加电场、晶格深度、输入光强有关，且随着这三个参数的变化会出现一些有趣的现象，以下分别讨论。

### 3.2.1 外加电场强度对涡旋孤子传输的影响

外加电场过低时，光束受到的衍射效应大于其受到的非线性自聚焦效应，光束能量会耦合到相邻格点上从而出现离散衍射，如图 6(a)、(b) 第 1 行所示。随着外加电场强度的增加，涡旋光束在光子晶格中受到的非线性效应影响越来越大，光束的自聚焦现象也更加明显，光束的能量向涡旋中心聚集的程度更高，如图 6(a)、(b) 第 2 行所示。可以看出离散衍射的情况下含有能量的相邻格点之间相位差也为  $\pi/2$ 。当外加电场强度增加到适当大小时，涡旋光束的能量被很好地束缚在格点上，此时光子晶格中形成了稳定传输的离散涡旋孤子。这样的离散涡旋孤子在稳定传输过程中将受到由瞬时呼吸模式引起的非线性微扰，如图 5(a) 所示，孤子发生了轻微的旋转振荡。但当外加电场强度过大时，产生的自聚焦效应过大，离散涡旋孤子的四瓣能量越来越集中，会出现塌陷现象，如图 6(a)、(b) 第 3 行所示。可见，要得到稳定传输的离散涡旋孤子，应该选择适合的外加电场强度。

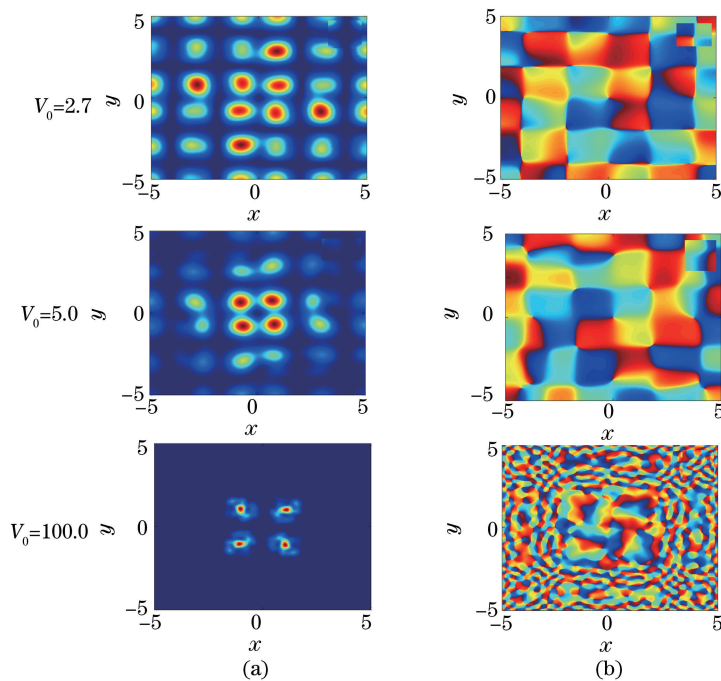


图 6 不同非线性条件下涡旋光束传输  $z=3.2$  后的 (a) 强度分布和 (b) 相位分布 ( $A=4, I_0=10$ )

Fig. 6 (a) Intensity distribution and (b) phase distribution of the vortex beam after propagation of  $z=3.2$  under different nonlinearity ( $A=4, I_0=10$ )

### 3.2.2 晶格深度对涡旋孤子传输的影响

涡旋光束在连续自聚焦介质中传输时会受到方位角调制不稳定影响而分裂为一些基态孤子，如图 3(b) 所示。加入光诱导光子晶格后，晶格深度  $I_0$  也会对孤子的传输产生一定影响。

图 7(a)、(b) 第 1 行为晶格深度  $I_0=0.1$  时，涡旋光束在晶格中的传输情况。此时晶格的深度非常小，晶格对孤子能量的束缚力不足以完全抑制孤子受到的方位角调制不稳定，传输一段距离之后环状的涡旋孤子仍然分裂成一些基态孤子并沿着分裂的方向分离。当晶格不存在时，一阶涡旋光束会分裂成两个基态孤子，而此时由于类方晶格的存在，一阶涡旋光束在初始时就被分裂成四个基态孤子。通过观察光束的相位分布可以发现这四瓣基态孤子之间已经不存在涡旋。随着晶格深度的增加，晶格对能量的束缚力也逐渐增加，被晶格分裂的四瓣基态孤子被很好地束缚在初始输入的四格点上。如果选用之前的外加电场强度而将晶格深度增加到  $I_0=50$ ，此时晶格深度的增大使得晶格格点之间的耦合力也随之增加，传输过程中耦合至格点

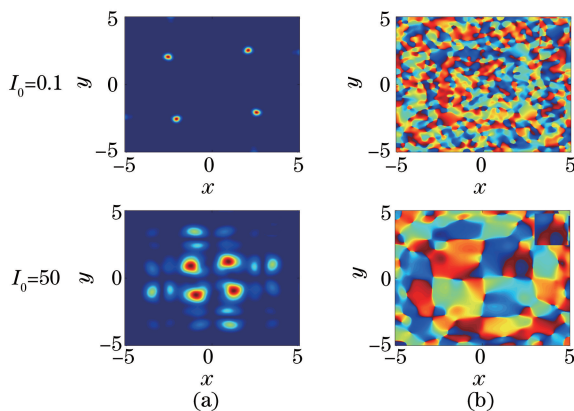


图 7 不同晶格深度下涡旋光束传输  $z=3.2$  后的(a)强度分布和(b)相位分布( $A=4, V_0=20$ )

Fig. 7 (a) Intensity distribution and (b) phase distribution of the vortex beam after propagation of  $z=3.2$  with different lattice depth ( $A=4, V_0=20$ )

上的孤子能量很容易耦合到相邻格点上而出现类似离散衍射的现象,如图 7(a)、(b)第 2 行所示。因此,要得到稳定传输的离散涡旋孤子应该选择合适的晶格深度。

### 3.2.3 输入光强对涡旋孤子传输的影响

涡旋孤子在光子晶格中的传输不仅受外加电场强度  $V_0$ 、晶格深度  $I_0$  的影响,还与输入光束的强度有关。之前普遍认为,输入光束的强度越低,受到的聚焦效应应该越大,但事实并非如此。如图 8(a)、(b)第 1 行所示,外加电场强度  $V_0=20$ 、晶格深度  $I_0=10$ 、输入光束的振幅  $A=0.2$  时,光束传输了 3.2 个单位后出现了离散衍射现象。这是由于低光强的输入光束在光折变晶体中传输时,尽管外加电场强度较大,但光束自身引起的非线性效应却基本可以忽略,而光束同时受到了介质的衍射效应影响,当衍射效应大于非线性效应时,光束的能量耦合到相邻的格点上。由此可知光束受到的聚焦非线性效应主要由光束自身产生,外界条件只能相对地影响其大小。当输入光束的强度过大时,现有的晶格深度不能很好地束缚各自格点上的能量,部分能量溢出到格点之间折射率较小的位置,此时涡旋光束不再是上文所描述的离散涡旋孤子而类似环状,如

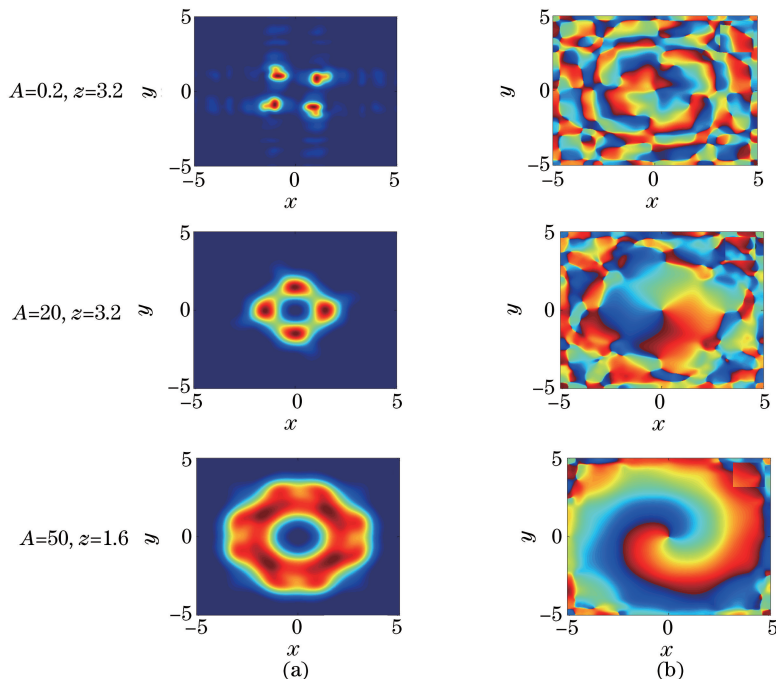


图 8 不同输入光强下涡旋光束传输后的(a)强度分布和(b)相位分布( $I_0=10, V_0=20$ )

Fig. 8 (a) Intensity distribution and (b) phase distribution of the vortex beam after propagation with different input light intensity ( $I_0=10, V_0=20$ )

图 8(a)、(b)第 2 行所示,从相位分布图中可以看出此时围绕涡旋中心的相位不再是相邻格点间相差  $\pi/2$  的离散分布而呈现连续分布。继续增大输入光束的强度,由于外加电场的强度不够大,光束自身产生的非线性效应不足以抵抗受到的衍射效应,传输过程中将会出现展宽,如图 8(a)、(b)第 3 行所示。

## 4 结 论

通过优化的交替隐式差分法数值求解非线性薛定谔方程,仿真结果表明要使光诱导的自聚焦类方晶格中非格点激励的一阶涡旋光得到稳定传输的离散涡旋孤子,需要选择适当的外加电场强度  $V_0$ 、晶格深度  $I_0$  以及输入光束振幅  $A$ ,某一个参数过大或过小都无法保持离散涡旋孤子的稳定传输,即要求光的非线性效应、晶格对光的束缚、涡旋光的角度调制不稳定性三者之间要相互匹配。仿真结果表明在较宽的参数范围内都可以得到稳定传输的离散涡旋孤子,不足之处是未得到三个参数的确定关系,还需要研究格点激励下离散涡旋孤子以及高阶涡旋孤子的传输演化。

## 参 考 文 献

- Swartzlander J G A, Law C T. Optical vortex solitons observed in Kerr nonlinear media[J]. Physical Review Letters, 1992, 69(17): 2503-2506.
- Tikhonenko V, Christou J, Luther-Daves B. Spiraling bright spatial solitons forms by the breakup of an optical vortex in a saturable self-focusing medium[J]. Journal of the Optical Society of America B, 1995, 12(11): 2046-2052.
- Chen Z G, Shih M F, Segev M, *et al.*. Steady-state vortex-screening solitons formed in biased photorefractive media[J]. Optics Letters, 1997, 22(23): 1751-1753.
- Firth W J, Skryabin D V. Optical solitons carrying orbital angular momentum[J]. Physical Review Letters, 1997, 79(13): 2450-2453.
- Quiroga-Teixeiro M, Michinel H. Stable azimuthal stationary state in quintic nonlinear optical media[J]. Journal of the Optical Society of America B, 1997, 14(8): 2004-2009.
- Yang J K. Stability of vortex solitons in a 2D photorefractive optical lattice[C]. Nonlinear Guided Waves and Their Applications, Toronto, 2004: TuC10.
- Rosberg C R, Neshev D N, Sukhorukov A A, *et al.*. Observation of nonlinear self-trapping in triangular photonic lattices[J]. Optics Letters, 2007, 32(4): 397-399.
- Wang J D, Yang J K. Families of vortex solitons in periodic media[J]. Physical Review A, 2008, 77(3): 033834.
- Shen M, Zheng J J, Kong Q, *et al.*. Stabilization of counter-rotating vortex pairs in nonlocal media[J]. Physical Review A, 2012, 86(1): 013827.
- Desyatnikov A S, Mihalache D, Mazilu D, *et al.*. Stable counter-rotating vortex pairs in saturable media[J]. Physics Letters A, 2007, 364(3): 231-234.
- Efremidis N K, Sears S, Christodoulides D N, *et al.*. Discrete solitons in photorefractive optically induced photonic lattices[J]. Physical Review E, 2002, 66(4): 046602.
- Chen C R, Yeh C H, Shih M F. Propagation of a topologically half-charge vortex light beam in a self-focusing photorefractive medium[J]. Optics Express, 2014, 22(3): 3180-3185.
- Shih M F, Chen Z G, Mitchell M, *et al.*. Waveguides induced by photorefractive screening solitons[J]. Journal of the Optical Society of America B, 1997, 14(11): 3091-3101.
- Wesner M, Herden C, Pankrath R, *et al.*. Temporal development of photorefractive solitons up to the telecommunication wavelengths in strontium-barium niobate waveguides[J]. Physical Review E, 2001, 64(3): 036613.
- Terhalle B, Göries D, Richter T, *et al.*. Anisotropy-controlled topological stability of discrete vortex solitons in optically induced photonic lattices[J]. Optics Letters, 2010, 35(4): 604-606.
- Alexander T J, Sukhorukov A A, Kivshar Y S. Asymmetric vortex solitons in nonlinear periodic lattices[J]. Physical Review Letters, 2004, 93(6): 063901.
- Ferrando A, Zacarés M, García-March M Á, *et al.*. Vortex transmutation[J]. Physical Review Letters, 2005, 95(12): 123901.
- Malomed B A, Kevrekidis P G. Discrete vortex solitons[J]. Physical Review E, 2001, 64(2): 026601.

- 19 Neshev D N, Alexander T J, Ostrovskaya E A, *et al.*. Observation of discrete vortex solitons in optically induced photonic lattices[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(12): 123903.
- 20 Fleischar J W, Bartal G, Cohen O, *et al.*. Observation of vortex-ring "discrete" solitons in 2D photonic lattices[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(12): 123904.
- 21 Alexander T J, Desyatnikov A S, Kivshar Y S. Multivortex solitons in triangular photonic lattices[J]. *Optics Letters*, 2007, 32(10): 1293-1295.
- 22 Liang J, Xu B, Cai Z. Internal oscillation of necklace solitons in Bessel photonic lattice imprinted in defocusing and focusing materials[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2011, 28(1): 93-99.
- 23 Yu Wensu, Qin Yali, Ren Hongliang, *et al.*. Research on ring-like vortex solitons in Bessel lattices[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(7): 0719001.  
余文榛, 覃亚丽, 任宏亮, 等. 贝塞尔晶格中环状涡旋孤子的研究[J]. *光学学报*, 2014, 34(7): 0719001.
- 24 Yan Man, Qin Yali, Ren Hongliang, *et al.*. Propagation of the Gaussian beam in Bessel optical lattice[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(2): 021901.  
鄢曼, 覃亚丽, 任宏亮, 等. 贝塞尔晶格中高斯光束的传输[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(2): 021901.
- 25 Lobanov V E, Borovkova O V, Kartashov Y V, *et al.*. Stable bright and vortex solitons in photonic crystal fibers with inhomogeneous defocusing nonlinearity[J]. *Optics Letters*, 2012, 37(11): 1799-1801.
- 26 Efremidis N K, Hizanidis K, Malomed B A, *et al.*. Three-dimensional vortex solitons in self-defocusing media[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(11): 113901.
- 27 Ling Zhenfang, Guo Ru, Liu Simin, *et al.*. Optical vortex solitons in photovoltaic-photorefractive medium[J]. *Acta Physica Sinica*, 1999, 49(3): 455-459.  
凌振芳, 郭儒, 刘思敏, 等. 光生伏打-光折变介质中光学涡旋孤子[J]. *物理学报*, 1999, 49(3): 455-459.
- 28 Fang Guijuan, Lin Huichuan, Pu Jixiong. Generation and propagation of Besinc-correlated partially coherent vortex beam[J]. *Chinese J Lasers*, 2015, 42(7): 0713001.  
方桂娟, 林惠川, 蒲继雄. Besinc 相干涡旋光束的产生与传输[J]. *中国激光*, 2015, 42(7): 0713001.
- 29 Sakaguchi H, Malomed B A. Higher-order vortex solitons, multipoles, and supervortices on a square optical lattice[J]. *Europhysics Letters*, 2005, 72(5): 698-704.