双层圆柱的双一阶彩虹频谱结构

宋飞虎 李臻峰

江南大学机械工程学院江苏省食品先进制造装备技术重点实验室,江苏无锡 214122

摘要 均匀介质构成的圆柱被激光照射后,散射光干涉形成一阶彩虹图像,根据彩虹的频谱结构,可以实现圆柱直径 的测量。结合理论及实验对双层圆柱双一阶彩虹的光强分布及频谱特性进行了研究。基于 Debye 理论,通过数值计 算几种干涉结构的频谱,获知双一阶彩虹频谱中4个特征峰的成因。将与均匀圆柱叠加波结构频率成因相似的特征 频率 F₃进行单独分析,发现 F₃与双层柱体的外直径存在线性依赖关系;而且随着圆柱内外层折射率、内直径等参数 的变化,直线斜率发生变化。F₃与内直径无明显的线性依赖关系。通过构建实验系统拍摄了双一阶彩虹,并对其频 谱进行了研究。由于双层圆柱中内直径、外层折射率对彩虹图像影响较大,在这两个参数确定的前提下,由F₃确定 的外直径的相对误差约为2%。

关键词 光谱学; 双一阶彩虹; Debye 理论; 频谱分析; 特征频率 中图分类号 O433.1 文献标识码 A doi: 10.3788/LOP53.043004

Spectra of Twin Primary Rainbows Scattered by a Coated Cylinder

Song Feihu Li Zhenfeng

Jiangsu Provincial Key Laboratory of Advanced Food Manufacturing Equipment and Technology, School of Mechanical Engineering, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, China

Abstract Diameter of a homogeneous cylinder can be determined with the spectrum of the rainbow pattern, formed by the scattering ray interference when the cylinder is illuminated by a laser. As for a coated cylinder, the intensity distribution and spectral characteristics of the twin primary rainbows under different cylinder sizes are investigated via theoretical simulation and experiments. The numerical simulation based on Debye theory is used to obtain the intensity distribution spectra and four characteristic frequency peaks are obtained, and how they are formed is also illustrated. The frequency peak F_3 , with its origin similar to that of the ripple structure formed in a homogeneous cylinder, is then analyzed. The results show that F_3 increases with the outer diameter linearly and the slope is also slightly affected by the internal diameter and refractive index of the coated cylinder. However, there is no obvious relationship between the internal diameter and F_3 . The experimental research is implemented by building a system to capture the rainbow pattern and its spectrum is analyzed. The relative error of outer diameter about 2% can be determined experimentally, when the internal diameter and the coated refractive index are fixed.

Key words spectroscopy; twin primary rainbows; Debye theory; spectrum analysis; characteristic frequency **OCIS codes** 300.6330; 120.5820; 200.4560; 230.0040

1 引 言

光散射测试技术作为光学测量领域的重要分支,长期以来受到广泛关注^[1-5]。其中,彩虹频谱技术已在 近20年来广泛地应用于液滴、圆柱的参数测量^[6-12]。1996年,Van Beeck等^[6]对彩虹特征频率与对象几何尺 寸的关系进行了研究,发现彩虹Airy结构和叠加波结构的频率与对象直径有很好的线性关系。吴正森等^[7] 根据特定角度范围内的光强分布及其频谱结构,实现了均匀液滴、圆柱直径及折射率的测量。而在工业过 程中以圆形截面微通道为例的很多实际对象,可视为由内外两层折射率存在显著差别的介质构成,即双层

收稿日期: 2015-10-12; 收到修改稿日期: 2015-11-13; 网络出版日期: 2016-02-26

基金项目: 国家自然科学基金(51406068)

作者简介:宋飞虎(1986—),男,博士,副教授,主要从事基于光散射的多相流测试技术方面的研究。

E-mail: sssongfh@sina.com

激光与光电子学进展

圆柱理论模型。近年来,双层圆柱产生的双一阶彩虹逐渐被关注。Hiroyuki等^[11]和 Presby等^[12]基于几何光 学理论,研究了几何彩虹角随各层介质折射率、尺寸的变化规律;Lock等^[13]和 Adler等^[14-15]基于 Airy 理论和 Debye 理论对双一阶彩虹主峰散射角与双层圆柱参数的关系进行了研究。

本文基于 Debye 理论,首先通过数值计算研究干涉形成双一阶彩虹的主要散射光线,以及这些光线干 涉构成的散射结构。然后,从中找出对彩虹光强贡献较大的若干散射结构,并对它们进行频谱分析,从而研 究频谱中各特征频率的成因。在此基础上,选择特征频率来研究其与双层圆柱尺寸的关系。最后构建实验 系统,采用激光照射充满去离子水的毛细管,由相应的光学系统拍摄产生的双一阶彩虹,并将特征频率的变 化规律与数值计算结果进行比较。得到的结论为基于双一阶彩虹频谱的测量算法的研究提供了一定参考。

2 双层圆柱散射的 Debye 理论

目前,双层圆柱双一阶彩虹的研究主要基于几何光学理论、Lorenz-Mie 理论、Airy 理论以及 Debye 理论。几何光学理论仅能单独地分析经一次内反射的光线的散射情况,而无法描述各光线之间的干涉作用; Airy 理论无法描述彩虹中的高频分量;Lorenz-Mie 理论可以对散射光强分布进行严格的数学求解^[16]。然而,双层圆柱的二阶彩虹源自多种散射光线的干涉,Lorenz-Mie 理论仅能全局考虑所有光线干涉产生的光强,无法单独分析某种或某几种散射光线干涉的光强分布。Debye 理论能将 Mie 散射系数按需进行分解,得到描述特定光线干涉形成光强分布的散射系数。双层圆柱 Debye 散射系数的数学表达式为^[13]

$$\begin{array}{l} a_n = \\ b_n = \\ \end{array} \frac{1}{2} \left(1 - Q_n^2 \right), \tag{1}$$

式中n为无穷级数的索引,1为描述衍射光的分量, Q_n^2 为描述双层圆柱折射及反射的系数。 Q_n^2 可由均匀圆柱 Debye 级数导出:

$$Q_n^1 = R_n^{212} + \sum_{p_1=1}^{\infty} T_n^{21} (R_n^{121})^{p_1 - 1} T_n^{12} , \qquad (2)$$

$$Q_n^2 = R_n^{323} + \sum_{p_2=1}^{\infty} T_n^{32} Q_n^1 T_n^{23} (R_n^{232} Q_n^1)^{p_2 - 1} , \qquad (3)$$

$$a_n = \frac{1 - Q_n^1}{2} = \frac{1}{2} \left[1 - R_n^{212} - \sum_{p=1}^{\infty} T_n^{21} (R_n^{121})^{p-1} T_n^{12} \right],$$
(4)

$$R_{n}^{k+1,k,k+1} = \frac{\xi_{n}^{(2)'}(m_{k+1}x_{k})\xi_{n}^{(2)}(m_{k}x_{k}) - (m_{k}/m_{k+1})\xi_{n}^{(2)}(m_{k+1}x_{k})\xi_{n}^{(2)'}(m_{k}x_{k})}{D_{n}^{k}},$$
(5)

$$R_{n}^{k,k+1,k} = \frac{\xi_{n}^{(l)'}(m_{k+1}x_{k})\xi_{n}^{(l)}(m_{k}x_{k}) - (m_{k}/m_{k+1})\xi_{n}^{(l)}(m_{k+1}x_{k})\xi_{n}^{(l)'}(m_{k}x_{k})}{D^{k}}, \qquad (6)$$

$$T_n^{k+1,k} = -\frac{m_k}{m_{k+1}} \frac{2\mathbf{i}}{D_n^k} , \qquad (7)$$

$$T_{n}^{k+1,k} = -\frac{2i}{D_{n}^{k}}, \qquad (8)$$

$$D_n^k = -\xi_n^{(0)'}(m_{k+1}x_k)\xi_n^{(2)}(m_kx_k) + (m_k/m_{k+1})\xi_n^{(0)}(m_{k+1}x_k)\xi_n^{(2)'}(m_kx_k) , \qquad (9)$$

$$x_k = 2\pi r_k / \lambda , \qquad (10)$$

式中 Q_n^l 为均匀圆柱散射中描述折射及反射的系数,各项反射、折射系数的定义如图1所示^[14], m_1 、 m_2 分别为内、外层的折射率, r_1 、 r_2 分别为内外层半径, $R_n^{k,l,k}$ 表示光线由介质k经介质k、l交界面反射回介质k, $T_n^{k,l}$ 表示光线由介质k折射进入介质l, $\xi^{(0)}$ 、 $\xi^{(2)}$ 分别为第一类、第二类汉开尔(Hankel)函数。

为了分析不同的散射光线干涉形成的光强分布,可将折射、反射系数进行适当的组合,构建 Debye 散射 系数。图1中的β光线,其光程依次为从环境折射进入外层、从外层折射进入内层、从内层折射进入外层、在 外层经一次内反射、从外层折射进入内层、从内层折射进入外层、从外层折射进入环境,根据这7个步骤依次 列出折射、反射系数,从而得出β光线的 Debye 散射系数

$$a_n = \begin{cases} a_n = \\ b_n = \end{cases} T^{32} T^{21} T^{12} R^{232} T^{21} T^{12} T^{23} .$$
 (11)

若计算α光线和β光线两者干涉形成的光强分布,则Debye散射系数为

$$a_{n} = \begin{cases} T^{32}T^{21}R^{121}T^{12}T^{23} + T^{32}T^{21}T^{12}R^{232}T^{21}T^{12}T^{23} \\ R^{323} \\ T^{32} \\ T^{32} \\ T^{21} \\$$



图1 双层圆柱散射的 Debye 理论模型

Fig.1 Model of Debye theory for scattering in a coated cylinder

3 双一阶彩虹的频谱结构

双层圆柱散射中,散射光线的种类较多,干涉形成的光强分布结构较为复杂。图2所示为双层圆柱散射 光强分布,主要由双一阶彩虹、双二阶彩虹及其他高阶散射结构等叠加而成。与均匀圆柱的一阶彩虹类似, 双层圆柱的一阶彩虹主要由低频的 Airy 结构和高频的叠加波结构叠加而成。双层圆柱的二阶彩虹在某些 情况下会位于一阶彩虹所在散射角域,两者并非总在空间位置上明显分开,这是与均匀圆柱散射的不同之 处^[11]。其中α光线二阶彩虹光强较弱,淹没于β光线一阶彩虹尾部,而β光线二阶彩虹的光强相对较强。

图 3 所示为典型的双一阶彩虹频谱结构,可以看出存在 4 个明显的峰值结构(分别称为 F₁、F₂、F₃和 F₄)。 为了研究这 4 个峰值形成的原因,对不同散射结构干涉的光强进行频谱分析,如图 4 所示。可以看出,F₁主要由 α 光线和 β 光线干涉产生;F₂主要由二阶彩虹和内、外层的外反射光线(R²³²和 T⁶²R²³²T^{e3})干涉产生;F₃主要由 α 光线、β 光线和内、外层外反射光线干涉产生;F₄主要由 α 光线、β 光线和二阶彩虹干涉产生。









图 3 典型的双一阶彩虹频谱结构(m₁=1.333, m₂=1.47, r₁=550 mm, r₂=600 mm) Fig.3 Typical spectrum of twin primary rainbows

 $(m_1=1.333, m_2=1.47, r_1=550 \text{ mm}, r_2=600 \text{ mm})$

从频率峰值产生原因的角度来考虑,F₃与均匀圆柱一阶彩虹频谱中叠加波结构频率的成因类似。由于 叠加波结构频率和均匀圆柱直径之间存在线性关系¹⁶,因此为了探索双一阶彩虹频谱中的类似规律,对F₃随 双层圆柱内外径的变化规律进行了研究。F₃与r₂的关系如图5所示,F₃与r₁的关系如图6所示。从图5可以 看出,随着r₂的增大,F₃均相应地线性增大,这一现象和均匀圆柱频谱中的现象类似¹¹⁵;内外径比R在98.33%~ 80.83%范围内变化时,同一r₂对应的F₃的变化率约为9%;m₁在1.37~1.32范围内变化时,同一r₂对应的F₃的 变化率约为8%;m₂在1.45~1.55范围内变化时,同一r₂对应的F₃的变化率约为3%,由此可见m₁对F₃值的影 响比m₂大。从图6可以看出,r₁与F₃不存在明显的线性关系,且随着r₁的增大F₃不断减小,这两个现象与均 匀圆柱彩虹图像频谱中对应的现象不同。





Fig.4 Frequency spectra of intensity distribution formed by different rays (m_1 =1.333, m_2 =1.47, r_1 =550 mm, r_2 =600 mm). (a) α , β rays; (b) secondary rainbow and reflection rays on internal and external surfaces; (c) α , β and reflection rays on internal and external surfaces; (d) α , β and secondary rainbow rays



图 5 (a) R; (b) m_1 ; (c) m_2 分别取不同值时 F_3 与 r_2 的关系 Fig.5 Relationship between F_3 and r_2 when only (a) R; (b) m_1 or (c) m_2 is different



Fig.6 Relationship between F_3 and r_1

4 实验结果与讨论

对双一阶彩虹的频谱结构进行了实验研究,如图7所示,实验系统主要包括玻璃毛细管、去离子水及水泵、光学平台及支架、光学镜片、激光光源(100 mW,532 nm)和线阵 CCD 相机(Delsa 02k40)。去离子水(折射率为1.333)经水泵作用后流经玻璃毛细管,玻璃毛细管及其中的溶液形成的圆柱分为内外两层。玻璃毛细管所有的材质为高硼硅,折射率为1.47,选用的两种毛细管参数分别为内直径1.1 mm和外直径1.2 mm及内直径1.3 mm和外直径1.6 mm。激光照射毛细管后发出的散射光线经透镜组会聚后形成双一阶彩虹图

像,被CCD相机拍摄后将光强信息传输至计算机进行分析。





Fig.7 Schematic diagram of experimental system

图 8(a)、(b)分别为去离子水流经两种毛细管时,β光线一阶彩虹所在区域的散射光强分布。由于β光线 一阶彩虹中 Airy 结构的光强在这一区域占主导,和其他散射结构的光强叠加后形成了图中所示的彩虹结 构。从两图中均可以看出低频结构和叠加于其上的高频结构。分别选取两图中β光线一阶彩虹的前3个峰 进行分析,可以看出图 8(a)中前2个 Airy 结构峰值对应角度之差为0.75°,而图 8(b)中前2个 Airy 结构峰值对 应角度之差为0.63°,这一结果与均匀圆柱的一阶彩虹现象类似,直径越大则峰的角度间距越小。





(a) r_1 =550 mm, r_2 =600 mm; (b) r_1 =650 mm, r_2 =800 mm

图 9(a)、(b)分别为图 8(a)、(b)中 β 光线一阶彩虹前 3 个 Airy 峰散射光强分布的频谱分析。从中可以明显地看到 4 个峰,这是由于二阶彩虹结构一部分存在于 β 光线一阶彩虹所在区域内,干涉形成第 2 个与第 4 个峰。图 9(a)中 F_3 的值为 25.15(°)⁻¹,图 9(b)中 F_3 的值为 37.39(°)⁻¹,表明随着 r_2 的增大 F_3 也相应增大,这与图 5 所示结论一致。观察图 5(a)可以发现,R=0.9083 对应直线中, $r_2=600$ mm 对应 F_3 为 25.81(°)⁻¹,与图 9(a)中 F_3 示值的相对误差为 2.3%;同样 R=0.8083 对应直线中, $r_2=800$ mm 对应 F_3 为 36.68(°)⁻¹,与图 9(b)中 F_3 示值的相对误差为 1.4%。然而,图 5(b)中 R=0.85、 $m_1=1.36$ 时, $r_2=800$ mm 对应的 F_3 为 33.96(°)⁻¹,与图 9(b)中





Fig.9 Twin primary rainbow spectra corresponding to Fig. 8. (a) r_1 =550 mm, r_2 =600 mm; (b) r_1 =650 mm, r_2 =800 mm

F₃示值的相对误差增大到9.1%。这表明其他参数与真实值越接近,则外径的测量误差越小,否则测量误差 会越大。

5 结 论

基于 Debye 理论对双层圆柱的双一阶彩虹频谱结构进行研究,发现双一阶彩虹频谱主要存在4个特征 峰 F1、F2、F3和 F4。通过对几种主要散射光线的干涉结构进行分析,对各频率特征峰的成因进行了研究。在 此基础上,研究了特征频率F3与双层圆柱直径之间的关系,发现内直径与F3无明显的线性关系,而外直径与 F3存在线性关系,该线性关系的斜率随双层圆柱其他参数的改变发生相应变化。构建了相应的光学系统, 以不同尺寸的含去离子水玻璃毛细管为对象进行实验研究。对拍摄的彩虹图像进行频谱分析,并提取其中 的F3进行分析,发现在双层柱体其他参数已知的前提下,通过频谱可以较为准确地计算得到外直径,相对误 差在2%左右。

参考文献

1 Gong Chunwen, Li Xuebin, Li Jianyu, *et al.*. New method of aerosol extinction measurement[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 31(1): 0101001.

宫纯文,李学彬,李建玉,等.大气气溶胶消光系数测量新方法[J].光学学报,2014,31(1):0101001.

2 Zhang Xusheng, Guo Liang, Huang Yong, *et al.*. Echo characteristic of Gaussian pulse laser in anisotropic scattering medium [J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(8): 0802003.

张旭升,郭 亮,黄 勇,等.各向异性散射介质中高斯脉冲激光的回波特性[J].中国激光,2015,42(8):0802003.

- 3 Gong Lei, Wu Zhensen, Dai Shaoyu, *et al.*. Study on difference field scattering properties between slightly rough optical surface and above redundant particles[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 35(8): 0829001.
- 巩 蕾, 吴振森, 代少玉, 等. 微粗糙光学基片表面与上方冗余粒子的差值场散射特性研究[J]. 光学学报, 2014, 35(8): 0829001.
- 4 Zhu Lili, Li Hui. Imaging by optically scattering objects and absorption objects with ultrasound-modulated optical tomography[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(2): 0204001.

朱莉莉,李 晖.散射体和吸收体的超声调制光学成像[J].中国激光,2015,42(2):0204001.

5 Bu Yichuan, Zhao Yongkai, Chen Zhengyan, *et al.*. Research on real-time aerosol particle shape identification based on scattered light detection[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(4): 0413003.

卜一川,赵永凯,陈正岩,等.基于光散射的实时气溶胶粒子形状识别技术研究[J].中国激光,2015,42(4):0413003.

- 6 X Han, K Ren, Z Wu, *et al.*. Characterization of initial disturbances in a liquid jet by rainbow sizing[J]. Applied Optics, 1998, 37(36): 8498–8503.
- 7 Wu Yingchun, Wu Xuecheng, Sawitree Saengkaewi, *et al.*. Concentration and size measurements of sprays with global rainbow technique[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(9): 090703.

吴迎春,吴学成, Sawitree Saengkaewi,等. 全场彩虹技术测量喷雾浓度及粒径分布[J]. 物理学报, 2013, 62(9): 090703.

8 Song Feihu, Xu Chuanlong, Wang Shimin. Reversion algorithm for liquid column parameters with rainbow refractometry based on Debye theory[J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(12): 1212006.

宋飞虎, 许传龙, 王式民. 基于德拜理论的液柱参数彩虹反演算法研究[J]. 光学学报, 2011, 31(12): 1212006.

- 9 J P A J van Beeck, M L Riethmuller. Rainbow phenomena applied to the measurement of droplet size and velocity and to the detection of nonsphericity[J]. Applied Optics, 1996, 35(13): 2259–2266.
- 10 Wu Zhensen, Guo Lixin, Han Xiang'e, *et al.*. Measurement of infinite cylindrical diameter by angular frequencies of rainbow intensities[J]. Acta Optica Sinica, 2000, 20(11): 1538–1543.

吴振森,郭立新,韩香娥,等.利用彩虹强度角谱分布对圆柱直径的测量[J].光学学报,2000,20(11):1538-1543.

- 11 H Hattori, H Yamanaka, H Kurniawan, *et al.*. Liquid refractometry by the rainbow method[J]. Applied Optics, 1998, 37(19): 4123–4129.
- 12 H M Presby, D Marcuse. Refractive index and diameter determinations of step index optical fibers and performs[J]. Applied Optics, 1974, 13(12): 2882–2885.
- 13 J A Lock, J M Jamison, C-Y Lin. Rainbow scattering by a coated sphere[J]. Applied Optics, 1994, 33(21): 4677-4690.
- 14 C L Adler, J A Lock, J K Nash, *et al.*. Experimental observation of rainbow scattering by a coated cylinder: Twin primary rainbows and thin–film interference[J]. Applied Optics, 2001, 40(9): 1548–1558.

- 15 C L Adler, J A Lock, J K Nash, *et al.*. Twin-rainbow metrology. I. Measurement of the thickness of a thin liquid film draining under gravity[J]. Applied Optics, 2003, 42(33): 6584–6594.
- 16 P Laven. Simulation of rainbows, coronas and glories using Mie theory and the Debye series[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2004, 89(1-4): 257–269.

栏目编辑: 吴秀娟