

改进的基于全变分最小去噪的路径无关相位解包算法

张辉钦 郭仁慧 蒋超 朱文华 周翔

南京理工大学电子工程与光电技术学院, 江苏 南京 210094

摘要 相位解包算法主要分为路径相关算法和路径无关算法,广泛应用于光学测量领域。针对残差相位中含有噪声的问题,提出了改进的基于全变分最小去噪的路径无关相位解包算法。首先在包裹相位图中求出相位梯度,然后用全变分最小方法对相位梯度图去噪,通过积分获得近似的相位解包图,并进一步去除了残差相位图中的噪声,经多次迭代获得最终的相位解包图。通过仿真和实验对比了去除噪声前后解包相位与原始相位的误差。结果表明,残差相位去噪后得到解包相位的峰谷值、均方根值误差均小于未去噪的情况。

关键词 测量; 相位测量; 相位解包; 路径无关解包; 相位梯度; 全变分最小去噪

中图分类号 TN247 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP53.121202

Improved Path-Independent Phase Unwrapping Algorithm Based on Total-Variation Minimum Denoising

Zhang Huiqin Guo Renhui Jiang Chao Zhu Wenhua Zhou Xiang

*School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology,
Nanjing, Jiangsu 210094, China*

Abstract The phase unwrapping algorithms are divided into the path-dependent type and the path-independent type, and can be widely used in the field of optical measurements. An improved path-independent phase unwrapping algorithm based on total-variation minimum denoising is proposed to wipe off the remained noise in the residual phase. Firstly, the phase gradient is determined from the wrapped phase map and subsequently denoised by the total-variation minimization based method. Thus, an approximate phase unwrapped map can be obtained by integrating the denoised phase gradient, and the residual phase map is denoised. The final phase unwrapped map is subsequently determined by adding the first few modes of the unwrapped phase. Error values of unwrapped phase before and after denoising are compared with the original phase by simulations and experiments. The results show that the values of peak-valley and root-mean-square of unwrapped phase with residual phase denoised are lower than those of unwrapped phase with residual phase not denoised.

Key words measurement; phase measurement; phase unwrapping; path-independent unwrapping; phase gradient; total-variation minimum denoising

OCIS codes 120.3180; 100.5088; 260.3160; 200.4560

1 引言

移相干涉术以其高精度、实时快速、自动化测试的优点,广泛应用于高精密光学元件和系统的检测中。移相算法得到的相位数据被反正切函数压缩在 $[-\pi, \pi]$ 之间,必须通过相位解包裹得到真实的相位,重构被测件的三维形貌。理想状况下,包裹图不含有噪声,可以沿着任意路径对整个包裹相位进行遍历,并识别和校正相邻像素点之间 2π 的相位跃变,完成相位解包。然而,包裹相位图中不可避免地包含噪声或者不连续

收稿日期: 2016-08-25; **收到修改稿日期:** 2016-09-05; **网络出版日期:** 2016-11-23

基金项目: 国家自然科学基金(6140030594)

作者简介: 张辉钦(1991—),男,硕士研究生,主要从事光干涉测量方面的研究。E-mail: 1522405463@qq.com

导师简介: 郭仁慧(1979—),女,博士,副教授,硕士生导师,主要从事光学计量测试与算法等方面的研究。

E-mail: grhjj@163.com(通信联系人)

相位,导致极点的存在,不同的解包路径会产生不同的解包结果。

研究人员提出了不同的相位解包算法,大致可以分为两大类^[1-4]。1) 路径相关方法,也称为局部法,包括枝切法、质量图引导法、种子点法、可靠性排序法等。这类方法通过定义合适的解包路径,防止解包过程中噪声带来的误差传递。枝切法^[5-6]是在包裹相位中识别正极点和负极点,生成枝切,连接这些极点,使正负极点达到平衡,设置解包路径不经过枝切即可避免噪声带来的误差传递。质量图引导法^[7]以相位梯度、二阶导数或调制度等数值为依据生成质量导引图,设置解包路径由高质量区域经过低质量区域,将噪声带来的误差传递控制在最小。2) 路径无关方法,也称为全局法^[8-9]。这类方法首先计算包裹相位的梯度并消除其中的跳跃值,再通过梯度相位的重构得到解包相位,其中梯度相位的重构可通过离散余弦变换(DCT)算法^[10-11]和预处理共轭梯度(PCG)算法^[12]实现。路径无关法在大多数情况下能有效避开噪声传递误差,然而在实际应用中选择的解包路径并不总是最合适的,尤其是在噪声统计未知的情况下。

噪声存在于相位包裹图中,给解包带来了困难,如果能提出一种有效的去噪方法,先过滤掉噪声点,再使用路径相关或者路径无关方法进行相位解包,就能得到真实的解包相位^[13-14]。全变分最小图像去噪是由Rudin等^[15]提出的,根据变分法确定图像的能量函数,通过最小化图像能量函数达到对图像平滑去噪的目的。Huang等^[16]将全变分最小图像去噪模型应用于解包裹,首先在含有噪声的包裹相位图中计算相位梯度,然后在全变分最小模型的求导过程中放大噪声,去掉相位图中的噪声。通过简单的积分得到近似的解包相位图,再经多次迭代最终获得真实的解包相位。

本文在原有算法的基础上,分析了相位残差中包含噪声的原因,进一步对相位残差中的噪声进行处理,并通过仿真和实验对比了去除噪声前后解包相位与真实相位的误差。结果表明,改进方法得到的解包相位与真实相位的误差小于未去噪的情况。

2 原理与算法

2.1 相位梯度的计算

首先需计算解包相位的梯度值,由于包裹相位与解包相位只存在 2π 的倍数关系,所以求解解包相位的梯度值等效于求解包裹相位的梯度值,并取其主值将其值域限制在 $[-\pi, \pi]$ 范围内,

$$\varphi'_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = W \left\{ \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} \right\}, \quad (1)$$

$$\varphi'_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = W \left\{ \frac{\partial \varphi_w}{\partial y} \right\}, \quad (2)$$

式中 φ'_x 、 φ'_y 为解包相位在 x 方向和 y 方向的梯度值, φ 为解包后的相位, φ_w 为包裹相位; $W\{\cdot\}$ 为求主值运算,即获取数据在 $[-\pi, \pi]$ 内的主值,

$$W\{\varphi\} = \begin{cases} 2\arctan\left(\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}\right) & \cos \varphi \neq -1 \\ \pi & \cos \varphi = -1 \end{cases}. \quad (3)$$

求得的解包梯度相位具有两个优点:1) 求导过程中噪声在原始图像中像素的变化加剧,有利于后面的算法去除噪声;2) 求主值方程 $W\{\varphi\}$ 去除了包裹相位中的 2π 跃变。

2.2 全变分最小去噪模型

通常情况下,将噪声放大会使去噪的难度变大。然而,对于全变分最小去噪方法^[17],放大噪声有利于去噪,下面将做详细的说明。

通过对原始包裹相位图求导,得到了含有噪声的相位梯度函数,

$$\varphi_x(x, y) = \hat{\varphi}_x(x, y) + n(x, y), \quad (4)$$

式中 $\varphi_x(x, y)$ 为原始包裹相位 x 方向上的相位梯度; $\hat{\varphi}_x(x, y)$ 为去噪后的去噪估计,即目标函数; $n(x, y)$ 为噪声分量。

利用梯度幅度,得到去噪后的去噪估计(即建立目标函数)为

$$\hat{\varphi}_x(x, y) = \arg_{\varphi_x} \min \{ \|\hat{\varphi}_x - \varphi_x\|^2 / (2\mu) + f_{TV}(\hat{\varphi}_x) \}, \quad (5)$$

式中 $\|\cdot\|$ 为欧几里德范数, μ 为常数, $f_{TV}(\cdot)$ 为全变分函数,

$$f_{TV}(\varphi) = \sum \|\nabla\varphi\|, \quad (6)$$

即所有像素点的梯度幅度值的总和。文献[18]已经证明

$$\varphi_x = \varphi_x - \pi_\mu(\varphi_x), \quad (7)$$

式中 $\pi_\mu(\varphi_x)$ 为 φ_x 的非线性投影。非线性投影 $\pi_\mu(\varphi_x)$ 可以等效于

$$\arg\min_p \{ \|\mu \nabla \cdot \mathbf{p} - \varphi_x\|^2 : |\mathbf{p}|^2 \leq 1 \}, \quad (8)$$

于是

$$\pi_\mu(\varphi_x) = \mu \nabla \cdot \mathbf{p}. \quad (9)$$

Chambolle^[18] 提出一种半隐式梯度下降算法, 定义 \mathbf{p} 为向量序列 \mathbf{p}^n 的收敛值,

$$\mathbf{p}^{n+1} = \frac{\mathbf{p}^n + \tau [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{p}^n - \varphi_x/\mu)]}{1 + \tau \|\nabla(\nabla \cdot \mathbf{p}^n - \varphi_x/\mu)\|}, \quad (10)$$

式中 τ 为参数, 用来定义迭代公式。详细的推导过程文中不再叙述, 关键算式如下。

设 X 为欧几里德空间 $R^{N \times N}$, 如果 $\alpha \in X$, 则梯度函数 $\nabla\alpha$ 为向量序列空间 $Y = X \times X$ 中的一个向量:

$$(\nabla\alpha)_{i,j} = [(\nabla\alpha)_{i,j}^1, (\nabla\alpha)_{i,j}^2], \quad (11)$$

$$(\nabla\alpha)_{i,j}^1 = \begin{cases} \alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j} & i < N \\ 0 & i = N \end{cases}, \quad (12)$$

$$(\nabla\alpha)_{i,j}^2 = \begin{cases} \alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j} & j < N \\ 0 & j = N \end{cases}; \quad (13)$$

如果 $\mathbf{p} \in Y$, 对于向量序列 $\mathbf{p} = (p^1, p^2)$ 上任意一点, \mathbf{p} 的散度定义为

$$(\nabla \cdot \mathbf{p})_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & 1 < i < N \\ p_{i,j}^1 & i = 1 \\ -p_{i-1,j}^1 & i = N \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & 1 < j < N \\ p_{i,j}^2 & j = 1 \\ -p_{i,j-1}^2 & j = N \end{cases}, \quad (14)$$

迭代的初始值 $\mathbf{p} = (0, 0)$, 参数 $\tau = 0.25$ 。

在提出的全变分最小算法中, 需设置常数 μ 以及迭代截止条件, 经仿真研究, μ 的取值为 $[0.5, 5]$, 当 $\mu = 2$ 时迭代算式的截止条件为 $\|\nabla \cdot \mathbf{p}^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{p}^n\|_\infty < 0.002$ ^[16]。

2.3 相位梯度的积分

得到去噪的相位梯度 φ_x, φ_y 之后, 只要沿着 x, y 任意一个方向积分, 就能得到近似的解包相位。值得注意的是, 积分需要一个初始值, 可以设置积分路径的第一行(或第一列)与包裹相位的值相同, 然后从上到下(或从左到右)积分, 获得近似的解包相位图。

2.4 误差度量

上述积分得到的只是近似的解包相位图, 为了量化第一次近似解包相位图与真实的解包相位图的差异, 定义残差包裹相位图为

$$\varphi_r = W\{\varphi - \hat{\varphi}\} = W\{\varphi_w - \hat{\varphi}\}, \quad (15)$$

式中 φ 为真实的解包相位图, $\hat{\varphi}$ 为近似解包相位图, φ_w 为包裹的相位图。如果 φ 与 $\hat{\varphi}$ 在每一个像素点的差值都小于 2π , 可以认为残差包裹相位图 φ_r 只包含相位残差中的相位跃变。如果 φ 与 $\hat{\varphi}$ 在某些区域的差值大于 2π , 则 2π 相位跃变会在 φ_r 中形成圆环。将残差包裹图 φ_r 中有 2π 相位跃变的像素点数目定义为 N , 如果 $N \leq N_c$ (默认 N_c 为总像素点总数的 0.1%), 可以认为近似的解包相位图是正确的, 不需要进一步处理; 如果 $N > N_c$, 可以认为残差包裹相位图中依然包含 2π 相位跃变引起的圆环, 必须进一步去除, 要将得到的残差包裹相位图作为新的包裹图, 再次进行迭代。

2.5 最终残差包裹相位图去噪

当 $N > N_c$ 时, 残差包裹图中会出现明显的 2π 跃变形成的圆环, 需要反复进行 2.2~2.4 节中的步骤, 将第一次得到的近似解包相位图记为 $\hat{\varphi}_1$, 第一次的残差包裹图记为 φ_{r1} , 由于原始的包裹相位 φ_w 是含有噪声的, 而 $\hat{\varphi}_1$ 不含噪声, 由(15)式可知 φ_{r1} 中含有噪声。将第一次得到的残差包裹图 φ_{r1} 作为新的包裹图, 重复

2.2~2.4节的步骤,依次得到 $\varphi_2, \varphi_3, \dots$,直到满足 $N \leq N_c$,得到最终的残差相位图 φ_{rf} 。在迭代过程中,原始包裹相位图中的噪声一直包含在残差包裹相位图中,因此 φ_{rf} 包含两部分,原始相位中的残差相位以及噪声信息。

最终的解包相位为^[16]

$$\varphi = \sum_{k=1,2,\dots} \varphi_k + \varphi_{rf}. \quad (16)$$

(16)式由两个部分组成,不含有噪声的所有近似解包相位的叠加 $\sum_{k=1,2,\dots} \varphi_k$ 以及含有噪声的最终残差相位 φ_{rf} 。 φ_{rf} 包含原始相位信息,同时也包含了原始包裹相位图中的噪声信息。文献[16]并未进一步对最终残差相位进行处理,导致最终的解包相位图由于加入了含有噪声信息的最终残差相位而依旧含有噪声。因此,在获得最终的残差相位图后,仍然需要对其进行去噪。

由于原始包裹相位图中的噪声信息集中在 φ_{rf} 中,而 φ_{rf} 中的残差相位幅值很小,使残差相位信息容易淹没在噪声信息中,增加了去噪的难度以及误差。重复一次2.1~2.3节的过程,最终获得去噪后的近似残差相位图,记为 φ_{rf} 。

2.6 算法流程

结合2.1~2.5节,得到的算法流程如图1所示。

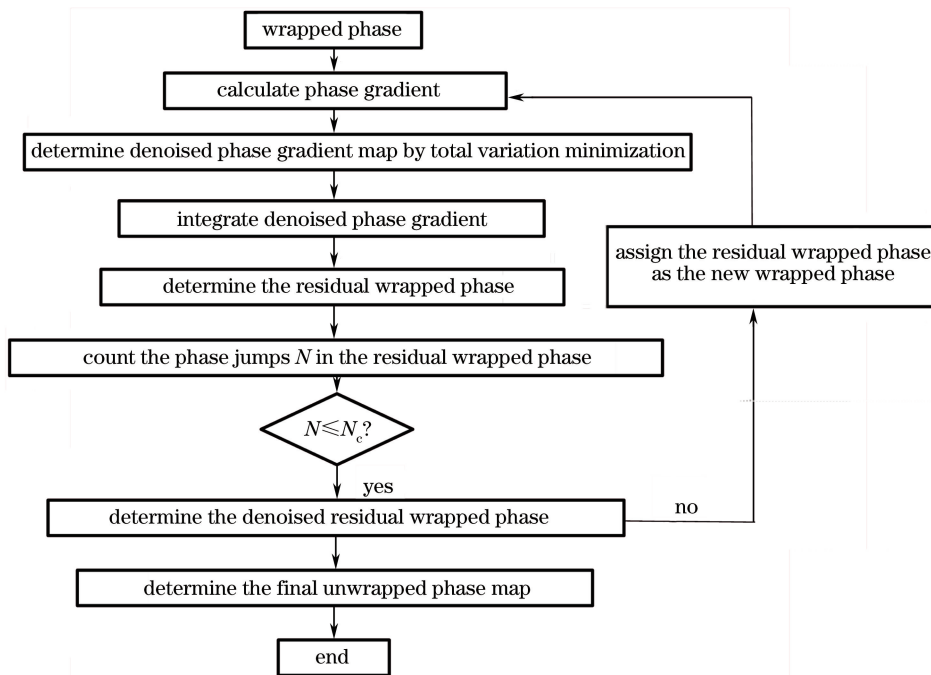


图1 算法流程图

Fig. 1 Flow chart of algorithm

3 仿真结果

用 Matlab 生成 200×200 的原始相位图,相位函数为

$$\phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \phi_0 x \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right), \quad (17)$$

式中 ϕ_0 为相位幅值, a 为相位图分布系数。设 $\phi_0 = 20, x \in [-1, 0], y \in [-1, 1], a = 0.3$,波长 $\lambda = 1 \mu\text{m}$ 。

使用四步移相法得到干涉图像的光强为

$$I_i(x, y) = 1 + \cos[\phi(x, y) + \delta_i] + \text{noise}(x, y), \quad (18)$$

式中 $i = 1, 2, 3, 4, \delta_i = (i-1)\pi/2$ 表示移相量, $\text{noise}(x, y) \sim N(0, \sigma^2)$ 表示均值为0,方差为 σ^2 的高斯噪声,则包裹相位为

$$\phi_w = \arctan\left(\frac{I_4 - I_2}{I_3 - I_1}\right). \quad (19)$$

将信噪比定义为干涉图中的平均强度 \bar{I} 与添加的高斯噪声的平均差 σ 之比,单位为 dB,计算公式为

$$R_{SN} = \frac{\bar{I}}{\sigma}. \quad (20)$$

算法仿真图像如图 2 所示,图 2(a)为原始的包裹相位图,图 2(b)为包裹相位在 x 方向上的梯度,可见其包含严重的噪声,经过全变分模型去噪后,得到图 2(c)中平滑的相位梯度图,经过积分后得到图 2(d)的近似解包相位。图 2(e)为最终的残差相位图,可见其中仍包含噪声。图 2(f)为最终的解包相位,由于加上了含有噪声的残差相位,因而仍含有噪声。

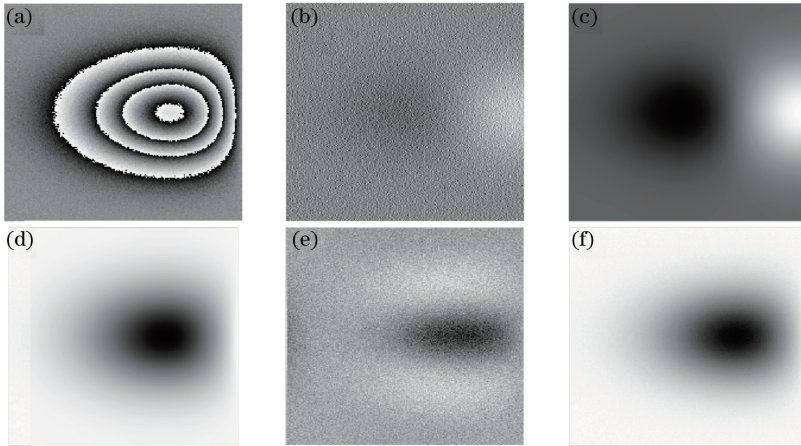


图 2 算法仿真图像($R_{SN}=15$ dB)。(a)原始包裹相位图;(b) x 方向的相位梯度图;(c)去噪后的相位梯度图;(d)近似的解包相位图;(e)最终的残差相位图;(f)最终的解包相位图

Fig. 2 Algorithm simulation images when R_{SN} is 15 dB. (a) Original wrapped phase; (b) phase gradient in x -direction; (c) denoised phase gradient; (d) approximation of unwrapped phase; (e) final residual phase; (f) final unwrapped phase

由图 2 可知,全变分最小去噪模型能很好地去除噪声,得到平滑的无噪声相位梯度图,通过积分可以得到平滑的、不含噪声的近似解包相位图。最终的解包相位图由于加上了含有噪声的残差相位,因而含有噪声,证明了 2.5 节中的分析是正确的。

为了更好地分析含有噪声的最终残差相位对真实相位引入的误差,在(17)式中,设置 $\phi_0 = 2$,使原始相位峰谷值 $d_{pv} < 0.25\lambda$,更加接近真实的光学元件相位波面。

仿真结果三维图如图 3 所示,图 3(a)为未去噪的残差相位,由于原始包裹相位图中的噪声全部集中在最终残差相位图中,使最终残差相位图严重失真,图 3(b)为去噪后的残差相位。由图 3(c)可知,当最终的解包相位加入含有噪声的最终残差相位后,其三维图有严重的毛刺。记加入含有噪声的最终残差相位的解包相位为 ϕ_1 ,加入去噪后的残差相位的解包相位为 ϕ_2 。 ϕ_1 、 ϕ_2 和原始波面的 d_{pv} 值、均方根(X_{RMS})值如表 1 所示。

表 1 不同解包相位的 d_{pv} 和 X_{RMS} ($R_{SN} = 15$ dB)

Table 1 d_{pv} and X_{RMS} of different unwrapped phases ($R_{SN} = 15$ dB)

| Unwrapped phase | d_{pv} | X_{RMS} |
|--|------------------|------------------|
| Unwrapped phase with residual phase not denoised | 0.2586 λ | 0.0576 λ |
| Unwrapped phase with residual phase denoised | 0.1679 λ | 0.0550 λ |
| Original unwrapped phase | 0.1820 λ | 0.0564 λ |

由表 1 可知,当 $R_{SN} = 15$ dB 时, ϕ_1 的 d_{pv} 与原始相位的 d_{pv} 差值较大,达到了 0.0766λ ,而 ϕ_2 的 d_{pv} 值与原始相位的 d_{pv} 差值小得多,只有 0.0141λ 。 ϕ_1 的 X_{RMS} 与原始相位 X_{RMS} 的差值为 0.0012λ , ϕ_2 的 X_{RMS} 与原始相位 X_{RMS} 的差值为 0.0014λ ,两者都与原始相位数据吻合。

为了更全面地分析 ϕ_1 、 ϕ_2 与原始相位之间的误差,对不同 R_{SN} 的情况进行仿真,并分别对比 ϕ_1 、 ϕ_2 与原始相位的 d_{pv} 差值和 X_{RMS} 差值。仿真结果如图 4 所示。

从图 4(a)可以看出, $R_{SN} < 15$ dB 时, ϕ_1 的 d_{pv} 误差远大于 ϕ_2 的 d_{pv} 误差;当 $R_{SN} > 40$ dB 时, ϕ_1 的 d_{pv} 值误差逐渐趋于 0, ϕ_2 的 d_{pv} 值误差保持在 0.05λ 内。在图 4(b)中,随着 R_{SN} 的增加, ϕ_1 的 X_{RMS} 误差逐渐减小并趋于 0; ϕ_2 的 X_{RMS} 与原始相位的 X_{RMS} 的差距逐渐增大,最终趋于 0.007λ 左右,两种情况下 X_{RMS} 误差都保

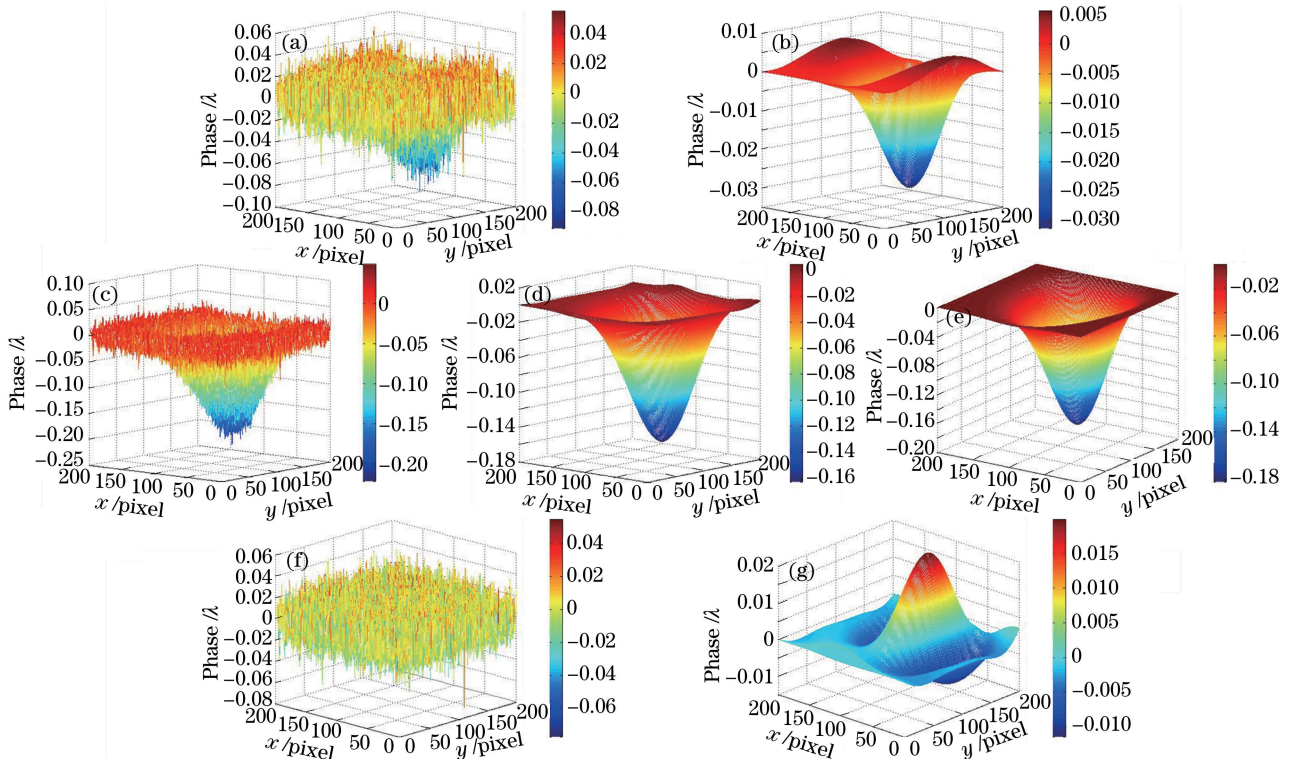


图3 仿真结果三维图。(a)未去噪的最终残差相位;(b)去噪后的最终残差相位;(c)残差相位未去噪的解包相位;(d)残差相位去噪后的解包相位;(e)原始解包相位;(f)残差相位未去噪的解包相位与原始相位差值;(g)残差相位去噪后的解包相位与原始相位差值

Fig. 3 Three-dimensional images of simulation results. (a) Final residual phase with noise; (b) denoised residual phase; (c) unwrapped phase with residual phase not denoised; (d) unwrapped phase with residual phase denoised; (e) original unwrapped phase; (f) difference between unwrapped phase with residual phase not denoised and original phase; (g) difference between unwrapped phase with residual phase denoised and original phase

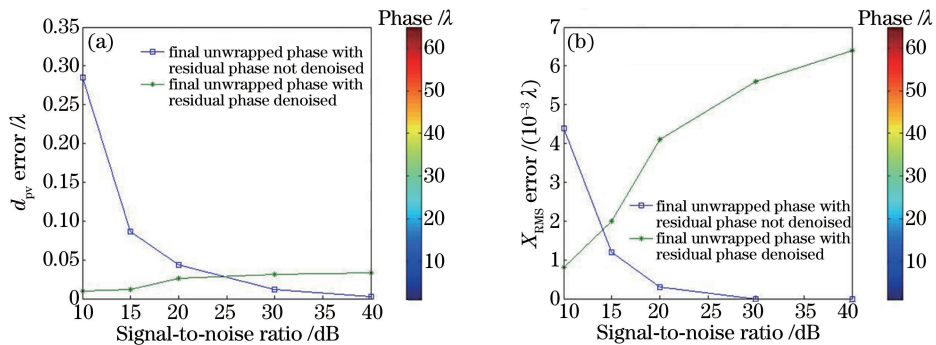


图4 仿真结果误差对比图。(a)不同信噪比情况下 ϕ_1 、 ϕ_2 与原始波面的 d_{pv} 误差;(b)不同信噪比情况下 ϕ_1 、 ϕ_2 和原始波面的 X_{RMS} 误差

Fig. 4 Error comparison of simulation results. (a) d_{pv} errors of ϕ_1 and ϕ_2 compared with original phase at different R_{SN} ; (b) X_{RMS} errors of ϕ_1 and ϕ_2 compared with original phase at different R_{SN} .

持在 0.007λ 内,与真实相位吻合。

4 实验结果

采用 Zygo GPI 干涉仪对 ϕ_{100} 的被测件进行测试,得到真实的解包相位,测得 d_{pv} 为 1.6225λ , X_{RMS} 为 0.2212λ 。采用四步移相法,由(18)式得到 4 幅移相图,并加入倾斜误差,在每幅移相图中添加高斯噪声。由(19)式重新包裹真实相位,作为待解包的相位。

实验结果如图 5 所示,图 5(a)、(c)分别为未去噪的最终残差相位以及相对应的解包相位,可见都包含了极其严重的噪声;图 5(b)、(d)分别为去噪后的最终残差相位以及相对应的解包相位;图 5(e)为原始波面。

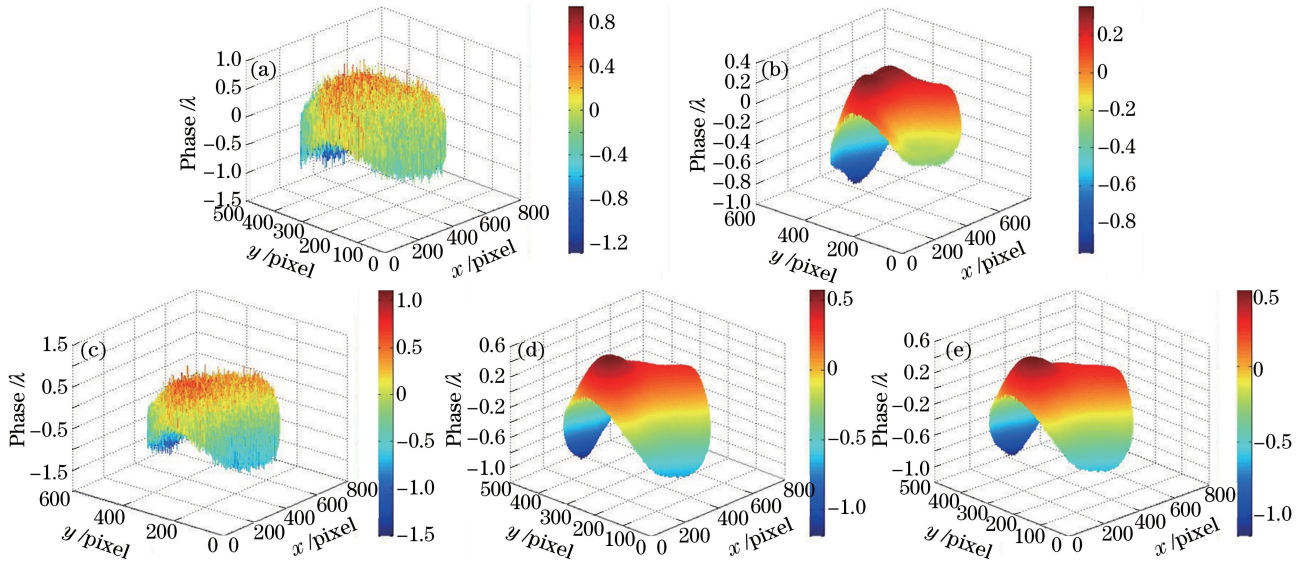


图 5 实验结果($R_{SN}=15$ dB)。(a)未去噪的最终残差相位;(b)去噪后的最终残差相位;
(c)未去噪残差相位的解包相位;(d)去噪后残差相位的解包相位;(e)原始解包相位

Fig. 5 Experimental results when R_{SN} is 15 dB. (a) Final residual phase not denoised; (b) denoised final residual phase;
(c) unwrapped phase with residual phase not denoised; (d) unwrapped phase with residual phase denoised;
(e) original unwrapped phase

在移相图中添加不同信噪比的高斯噪声,对比残差相位去噪前后得到的解包相位与原始波面的 d_{pv} 、 X_{RMS} 误差,仍记加入含有噪声的最终残差相位的解包相位为 ϕ_1 ,加入去噪后的残差相位的解包相位为 ϕ_2 ,计算结果如图 6 所示。

从图 6 可以看出, $R_{SN} < 10$ dB 时, ϕ_1 的 d_{pv} 误差、 X_{RMS} 误差都比较大,且远大于 ϕ_2 的相应数值,随着 R_{SN} 的增大, ϕ_1 的 d_{pv} 误差、 X_{RMS} 误差最终都趋于 0;而 ϕ_2 的 d_{pv} 误差一直稳定在 0.2λ 内, X_{RMS} 误差一直稳定在 0.03λ 内,并在 $R_{SN} > 40$ dB 后均趋于 0,均在合理的误差范围内。可以表明,对残差相位去噪后得到的解包相位误差小于未去噪的情况。

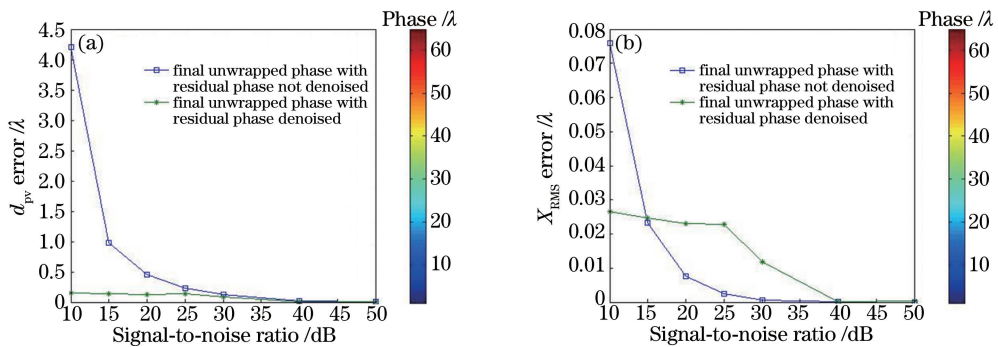


图 6 计算结果误差对比。(a)不同信噪比情况下 ϕ_1 、 ϕ_2 和原始波面的 d_{pv} 误差;
(b)不同信噪比情况下 ϕ_1 、 ϕ_2 和原始波面的 X_{RMS} 误差

Fig. 6 Error comparison of calculation results. (a) d_{pv} errors of ϕ_1 and ϕ_2 compared with original phase at different R_{SN} ;
(b) X_{RMS} errors of ϕ_1 and ϕ_2 compared with original phase at different R_{SN}

5 结 论

针对已有算法中残差相位含有噪声的问题,提出了一种改进的基于全变分最小去噪的路径无关相位解

包算法,进一步去除了残差相位中的噪声。通过仿真与实验,对比了残差相位去噪前后得到的解包相位的 d_{pv} 误差和 X_{RMS} 误差,验证了该算法的正确性,且得到的解包相位误差小于未去噪的情况。

参 考 文 献

- 1 Pritt M D. Phase unwrapping by means of multigrid techniques for interferometric SAR [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1996, 34(3): 728-738.
- 2 Liu Ke, Li Yanqiu. Phase unwrapping of interferogram with obscurations in phase-shifting interferometry [J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(7): 1812-1817.
刘 克, 李艳秋. 移相干涉术中有关分割遮挡干涉图的相位展开 [J]. 光学学报, 2009, 29(7): 1812-1817.
- 3 Herráez M A, Burton D R, Lalor M J, *et al.* Fast two-dimensional phase-unwrapping algorithm based on sorting by reliability following a noncontinuous path [J]. Applied Optics, 2002, 41(35): 7437-7444.
- 4 Guo Yuan, Chen Xiaotian. Study of improved phase unwrapping algorithm based on least squares [J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(5): 0508005.
郭 媛, 陈小天. 基于最小二乘相位解包裹改进算法的研究 [J]. 中国激光, 2014, 41(5): 0508005.
- 5 Goldstein R M, Zebker H A, Werner C L. Satellite radar interferometry-two-dimensional phase unwrapping [J]. Radio Science, 1988, 23(4): 713-720.
- 6 Cusack R, Huntley J M, Goldrein H T. Improved noise-immune phase-unwrapping algorithm [J]. Applied Optics, 1995, 34(5): 781-789.
- 7 Lu Y G, Zhao W C, Zhang X P, *et al.* Weighted-phase-gradient-based quality maps for two-dimensional quality-guided phase unwrapping [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2012, 50(10): 1397-1404.
- 8 Ghiglia D C, Romero L A. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1994, 11(1): 107-117.
- 9 Pritt M D. Phase unwrapping by means of multigrid techniques for interferometric SAR [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1996, 34(3): 728-738.
- 10 Guo Renhui, Li Jianxin, Zhu Rihong. Seed point unwrapping algorithm based on DCT algorithm [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(2): 0212006.
郭仁慧, 李建欣, 朱日宏. 基于 DCT 算法的种子点相位解包裹算法 [J]. 光学学报, 2012, 32(2): 0212006.
- 11 Wu Jie, Zhou Hao, Wu Dan, *et al.* Study of phase unwrapping algorithm from the undersampled phase [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53(5): 051003.
吴 杰, 周 皓, 吴 丹, 等. 欠采样条件下相位解包裹算法的研究 [J]. 激光与光电子学进展, 2016, 53(5): 051003.
- 12 Wang Huaying, Liu Zuoqiang, Liao Wei, *et al.* Comparison of four phases unwrapping algorithm based on method of minimum norm [J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(2): 0209016.
王华英, 刘佐强, 廖 薇, 等. 基于最小范数的四种相位解包裹算法比较 [J]. 中国激光, 2014, 41(2): 0209016.
- 13 Weng J F, Lo Y L. Integration of robust filters and phase unwrapping algorithms for image reconstruction of objects containing height discontinuities [J]. Optics Express, 2012, 20(10): 10896-10920.
- 14 Navarro M A, Estrada J C, Servin M, *et al.* Fast two-dimensional simultaneous phase unwrapping and low-pass filtering [J]. Optics Express, 2012, 20(3): 2556-2561.
- 15 Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1-4): 259-268.
- 16 Huang H Y H, Tian L, Zhang Z, *et al.* Path-independent phase unwrapping using phase gradient and total-variation (TV) denoising [J]. Optics Express, 2012, 20(13): 14075-14089.
- 17 Tomioka S, Heshmat S, Miyamoto N, *et al.* Phase unwrapping for noisy phase maps using rotational compensator with virtual singular points [J]. Applied Optics, 2010, 49(25): 4735-4745.
- 18 Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1-2): 89-97.