

# 基于光场信息的哈特曼相位复原方法

曾文华<sup>1,2,3</sup> 宁禹<sup>1,2,3</sup> 杜少军<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073

<sup>2</sup>高能激光技术湖南省重点实验室, 湖南 长沙 410073

<sup>3</sup>大功率光纤激光协同创新中心, 湖南 长沙 410073

**摘要** 传统波前复原方法利用获取的光强信息计算波前斜率或曲率,从而进行波前重构。基于微透镜阵列结构得到的光强信息包含更多的光场信息。基于微透镜阵列结构,分析了光场的四维参数化表征以及光场中空间-空间频率信息的获取与重构。建立了光场的空间-空间频率联合分布与 Wigner 分布函数的对应关系。提出了基于光场信息的哈特曼相位复原方法,建立了数值计算模型,并进行了仿真。仿真结果表明,基于光强信息的光场空间-空间频率联合分布相位复原方法可有效、快速地对低阶像差进行相位复原,误差较小。该方法在光学成像系统的像差探测补偿中具有广阔的应用前景。

**关键词** 大气光学; 波前复原; 相位复原; 微透镜; 哈特曼传感器; Wigner 分布函数

**中图分类号** TN247 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP53.110101

## Hartmann Phase Retrieval Method Based on Light Field Information

Zeng Wenhua<sup>1,2,3</sup> Ning Yu<sup>1,2,3</sup> Du Shaojun<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> College of Opto-Electric Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China

<sup>2</sup> Hunan Provincial Key Laboratory of High Energy Laser Technology, Changsha, Hunan 410073, China

<sup>3</sup> Collaborative Innovation Center of High Power Fiber Laser, Changsha, Hunan 410073, China

**Abstract** The traditional wavefront retrieval method uses wavefront slope or curvature calculated from the obtained light intensity information to reconstruct wavefront. More light field information is contained in the light intensity information obtained from the structure based on micro lens array. Based on micro lens array structure, the four-dimensional parametric characterization and the space-space frequency information acquisition and reconstruction of light field are analyzed. The corresponding relationship between the joint distribution of the light field space-space frequency and the Wigner distribution function is established. A Hartmann phase retrieval method based on the light field information is proposed. A numerical calculation model is established and a simulation is carried out. The simulation results show that the proposed phase retrieval method, which uses the light field space-space frequency joint distribution based on light intensity information, can reconstruct phase for low-order aberration effectively and quickly, and the error is small. The proposed method has wide application prospect in aberration compensation of optical imaging system.

**Key words** atmospheric optics; wavefront reconstruction; phase retrieval; micro lens; Hartmann sensor; Wigner distribution function

**OCIS codes** 010.1290; 010.7350

## 1 引言

1936年, Gershun<sup>[1]</sup>提出光场的概念,将光场定义为光辐射在空间各个位置各个方向的传播。1991年,

**收稿日期:** 2016-07-21; **收到修改稿日期:** 2016-07-28; **网络出版日期:** 2016-10-27

**基金项目:** 国家自然科学基金(61505257, 61378065)

**作者简介:** 曾文华(1993—),男,硕士研究生,主要从事自适应光学技术方面的研究。E-mail: 15581604692@163.com

**导师简介:** 杜少军(1972—),男,博士,研究员,硕士生导师,主要从事高能激光技术方面的研究。E-mail: d\_sj@tom.com

Adelson 等<sup>[2]</sup>完善了光场的概念,并提出了全光函数。1996 年,Levoy 等<sup>[3]</sup>进一步完善了光场理论,将光场进行参数化,形成了四维光场。目前获取光场的方法主要包括相机阵列、掩模和微透镜阵列等,其中微透镜阵列法是目前最常用的光场采集方法。微透镜阵列体积小、质量轻、造价低、便于集成化,只需对普通成像系统稍作修改便可实现光场信息的采集,在国防装备、航空航天等领域的光学测量以及三维立体成像、重建方面得到了广泛的应用<sup>[4-5]</sup>。

传统波前传感器件只能获取某一点源到达光学瞳面所携带的方向信息;成像器件单纯记录了入射至该点光线的亮度叠加信息,完全丢失了光线的方向信息。只有获取光场的全部信息,才能解算出全视场的波前信息。传统的波前复原算法基于光线的强度信息对波前信息进行重构<sup>[6-10]</sup>,并未完整地利用光场的全部信息。哈特曼波前传感器通过添加微透镜阵列,记录光线的方向信息和强度信息,可以完整地反映入射光场信息。

本文基于微透镜阵列分析了光场中空间-空间频率的信息获取与重构,提出了利用光场的空频分布进行相位复原的算法,通过仿真验证了该算法的可行性。

## 2 计算模型

### 2.1 光场的参数化表征

光场是指光线强度在空间位置和方向上的分布,可以用光线与两个平行平面的交点坐标对光场信息进行参数化表征。假设  $L(u, \nu; x, y)$  为光场的采样,其中  $L$  为光线强度,  $(u, \nu)$  和  $(x, y)$  分别为光线和两个平面的交点坐标。大部分成像系统可以简化为相互平行的两个平面,比如传统成像系统中的微透镜阵列面和探测器像面,因此采用双平面参数表征光场具有实用性。如果用探测器像面的坐标  $(u, \nu)$  表示光线的传播方向,微透镜阵列面中各子透镜的坐标  $(x, y)$  即代表了光线的位置分布。

### 2.2 哈特曼波前传感器的光场获取与 Wigner 分布的关系

利用解析的复振幅函数描述二维相干光场,可得

$$E(r) = A(r)e^{i\varphi(r)}, \quad (1)$$

式中  $E(r)$  为二维相干光场,  $A(r)$  为光场振幅,  $\varphi(r)$  为光场相位。每一个确定的  $r$  点都具有唯一确定的振幅和相位,分别探测该光场的强度分布与相位分布以获得光场的全部信息。 $E(r)$  包含了全光场信息,由于  $E(r)$  为一个复函数,无法直接测量,通常需要转化为光场的空间-空间频率联合分布进行测量,利用传统的哈特曼传感器可获取这种联合分布。如图 1 所示,哈特曼传感器由微透镜阵列和探测器组成,图中  $f$  为子透镜的焦距,  $d$  为子透镜的直径,  $D$  为微透镜的尺寸。哈特曼传感器获取的数据形式为四维矩阵,坐标分为两级:一级坐标为每个微透镜的坐标,二级坐标为每个微透镜对应像素的坐标;一级坐标对应空间,二级坐标对应空间频率。光场的联合分布可表示为

$$E(r) = L(x, y; u, \nu). \quad (2)$$

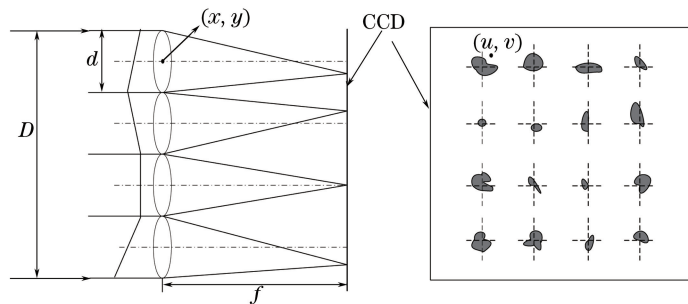


图 1 哈特曼波前传感器获取数据的两级坐标

Fig. 1 Two-level coordinate of data obtained by Hartmann wavefront sensor

根据相空间理论,Wigner 分布为空间-空间频率相空间的实函数<sup>[11-12]</sup>,可以通过探测光场的空间-空间频率联合分布近似获取,Wigner 分布  $W(r, q)$  可表示为

$$W(r, q) = \int \Gamma\left(r + \frac{1}{2}r', r - \frac{1}{2}r'\right) \exp(-i2\pi qr') dr' =$$

$$\int E\left(r + \frac{1}{2}r'\right)E\left(r - \frac{1}{2}r'\right)\exp(-i2\pi qr')dr', \quad (3)$$

式中  $\Gamma$  为自相关函数,  $r$  为空间位置,  $q$  为空间频率。如图 1 所示, 当确保微透镜阵列对应的子区域间互不干涉时, 可获取光场的空间-空间频率联合分布, 该分布实际上为 Wigner 分布的线性近似。已知光场的 Wigner 分布, 可通过 Wigner 分布的反变换得到光场, 即

$$E^*(r) \times E(0) = \iint W\left(\frac{1}{2}r, q\right)\exp(-i2\pi rq)drdq. \quad (4)$$

### 2.3 基于光场信息的相位复原计算模型

传统的哈特曼波前传感器能够保证子区域间互不干涉, 获取了光场空间-空间频率联合分布, 即得到了光场的 Wigner 分布。基本思路为: 哈特曼传感器探测得到的数据组合为 Wigner 分布的形式, 对 Wigner 分布作反变换可复原光场, 再利用最小二乘法拟合得到波前相位。计算模型的流程图如图 2 所示。

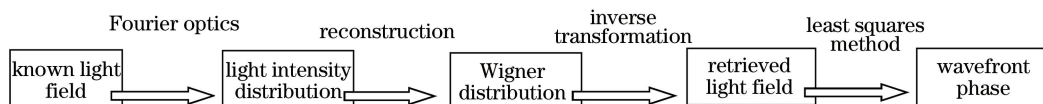


图 2 基于光场信息的哈特曼相位复原计算模型流程图

Fig. 2 Flow chart of calculation model of Hartmann phase retrieval based on light field information

利用傅里叶光学相关知识分析哈特曼波前传感器的成像过程。首先利用微透镜阵列分割波前的复振幅, 然后对分割后的波前复振幅作傅里叶变换, 在电荷耦合器件 (CCD) 靶面上得到光斑。定义  $A(x, y)$  为输入光场的复振幅,  $\varphi(x, y)$  为输入光场的相位,  $f$  为子孔径焦距,  $d$  为子孔径直径,  $\lambda$  为波长,  $f_{m,n}(x, y)$  为微透镜的透射函数 [ $(m, n)$  为微透镜所在的位置坐标]。  $f_{m,n}(x, y)$  可表示为

$$f_{m,n}(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq (d/2)^2 \\ 0, & \text{other} \end{cases}. \quad (5)$$

第  $(m, n)$  个微透镜在 CCD 靶面上产生的远场光斑为

$$I_{m,n}(u, \nu) = |\mathcal{F}\{A_{m,n}(x, y) \times \exp[i\varphi_{m,n}(x, y)] \times f_{m,n}(x, y)\}|^2, \quad (6)$$

式中  $\mathcal{F}$  代表傅里叶变换。探测器记录的强度的二维平面信息需转化为光场的四维联合分布, 利用微透镜的空间位置信息和探测器像元信息排列组合为光场的空间-空间频率联合分布, 即 Wigner 分布, 其表达式为

$$W(m, n; u, \nu) = I_{m,n}(u, \nu). \quad (7)$$

根据相空间理论, 对已知光场的 Wigner 分布作反变换可实现波前复原, 即

$$E^*(m, n) \times E(0, 0) = \iint W\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n; u, \nu\right) \times \exp[-i2\pi(mu + \nu)] du d\nu. \quad (8)$$

利用解析的复振幅函数可将波前复原信息表示为

$$E(m, n) = A(m, n)\exp[i\varphi(m, n)]. \quad (9)$$

Zernike 多项式作为基底函数拟合波前相位的函数系, 拟合形式为

$$\varphi(m, n) = \sum_{k=1}^n a_k Z_k(m, n), \quad (10)$$

式中  $Z_k(m, n)$  为 Zernike 多项式,  $a_k$  为多项式系数。求解  $a_k$  的方法主要有最小二乘法 and Gram-Schimid 正交化方法。由最小二乘法原理可得

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^N a_k Z_k(i, j) - \varphi(i, j) \right]^2, \quad (11)$$

式中  $\Delta^2$  为拟合像差和复原像差的差平方;  $E(i, j)$  为第  $(i, j)$  个采样点值, 即复原的波前相位的值。要求  $\Delta^2$  最小, 需将  $\Delta^2$  对  $a_k$  作偏微分运算, 可得

$$\frac{\partial}{\partial a_k}(\Delta^2) = 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^N a_k Z_k(i, j) Z_l(i, j) \right] - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(i, j) Z_l(i, j) = 0, \quad (12)$$

式中  $N$  为 Zernike 多项式中项数,  $l$  与  $k$  具有相同的含义。

将(12)式展开, 可得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} Z_1(i,j)Z_1(i,j) & Z_2(i,j)Z_1(i,j) & \cdots & Z_k(i,j)Z_1(i,j) \\ Z_1(i,j)Z_2(i,j) & Z_2(i,j)Z_2(i,j) & \cdots & Z_k(i,j)Z_2(i,j) \\ Z_1(i,j)Z_3(i,j) & Z_2(i,j)Z_3(i,j) & \cdots & Z_k(i,j)Z_3(i,j) \\ Z_1(i,j)Z_4(i,j) & Z_2(i,j)Z_4(i,j) & \cdots & Z_k(i,j)Z_4(i,j) \\ Z_1(i,j)Z_5(i,j) & Z_2(i,j)Z_5(i,j) & \cdots & Z_k(i,j)Z_5(i,j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_1(i,j)Z_{l-1}(i,j) & Z_2(i,j)Z_{l-1}(i,j) & \cdots & Z_k(i,j)Z_{l-1}(i,j) \\ Z_1(i,j)Z_l(i,j) & Z_2(i,j)Z_l(i,j) & \cdots & Z_k(i,j)Z_l(i,j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ \vdots \\ a_{l-1} \\ a_l \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \varphi(i,j)Z_1(i,j) \\ \varphi(i,j)Z_2(i,j) \\ \varphi(i,j)Z_3(i,j) \\ \varphi(i,j)Z_4(i,j) \\ \varphi(i,j)Z_5(i,j) \\ \vdots \\ \varphi(i,j)Z_{l-1}(i,j) \\ \varphi(i,j)Z_l(i,j) \end{bmatrix} \circ \quad (13)$$

令  $S_{i,j} = Z_k(i,j)Z_l(i,j)$ ,  $T_{i,j} = \varphi(i,j)Z_l(i,j)$ , 则  $S \times A = T$ 。因此 Zernike 系数矩阵  $A = S^{-1} \times T$ 。

一般地, 使用 Wigner 分布复原方法时, 微透镜阵列数对应空间的采样率同样受到子孔径分辨率的限制。该方法较传统的利用探测器的复原方法得到的数据更全面。

### 3 仿真计算结果和分析

根据上述理论分析, 验证 Wigner 分布相位复原方法复原成像系统中离焦、像散、慧差、三瓣叶和球差的效果。仿真选择哈特曼波前传感器结构, 微透镜阵列数为  $27 \times 27$ , 每个子透镜的焦距  $f = 1$  mm, 单个子孔径直径

直径  $d = 100$  nm, 波长  $\lambda = 1064$  nm, 波前像差采用 Zernike 多项式的形式表示  $[\varphi(x,y) = \sum_{k=3}^{21} a_k z_k(x,y)]$ 。

图 3~7 为像差分别为离焦、像散、慧差、三瓣叶和球差的相位复原。输入不同的像差, 根据焦平面的光强信息组合为四维矩阵, 并表示为空间-空间频率的联合分布; 利用 Wigner 分布函数的反变换进行波前重构。仿真结果表明, 利用 Wigner 分布函数反变换的相位复原方法可有效、快速地复原成像系统中典型各单阶像差, 即离焦、像散、慧差、三瓣叶和球差。

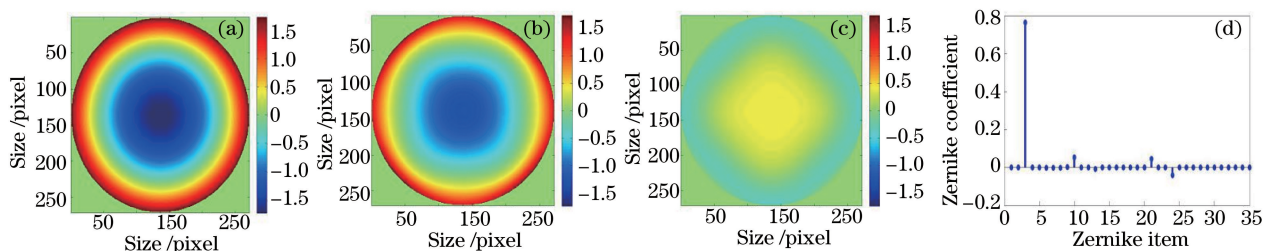


图 3 (a) 输入的离焦像差分布; (b) 复原的像差分布; (c) 残差分布; (d) Zernike 系数

Fig. 3 (a) Defocus aberration distribution of input; (b) recovered aberration distribution; (c) residual distribution; (d) Zernike coefficient

上述结果表明, 输入像差和采用 Wigner 分布相位复原方法复原的波前像差基本相等, 误差较小, 波前复原残差小于  $0.1\lambda$ 。当子孔径数较少时, 空间分辨率低, 利用最小二乘法拟合波前相位时, Zernike 各阶系数耦合性较大, 误差增大。

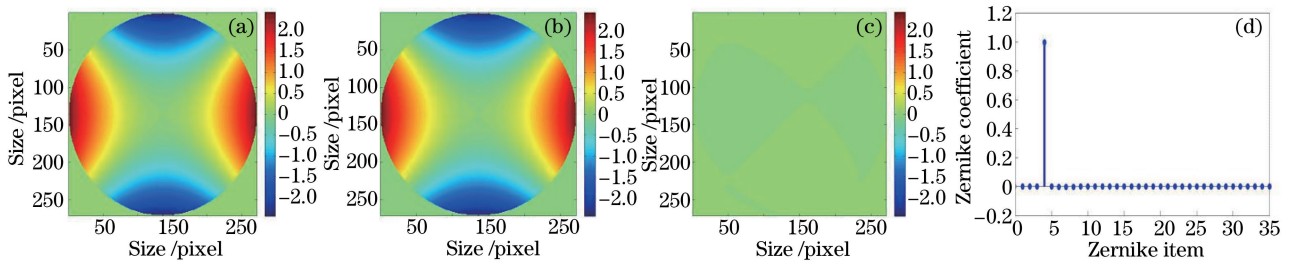


图 4 (a)输入的像散分布;(b)复原的像散分布;(c)残差分布;(d) Zernike 系数

Fig. 4 (a) Astigmatism aberration distribution of input; (b) recovered aberration distribution;  
(c) residual distribution; (d) Zernike coefficient

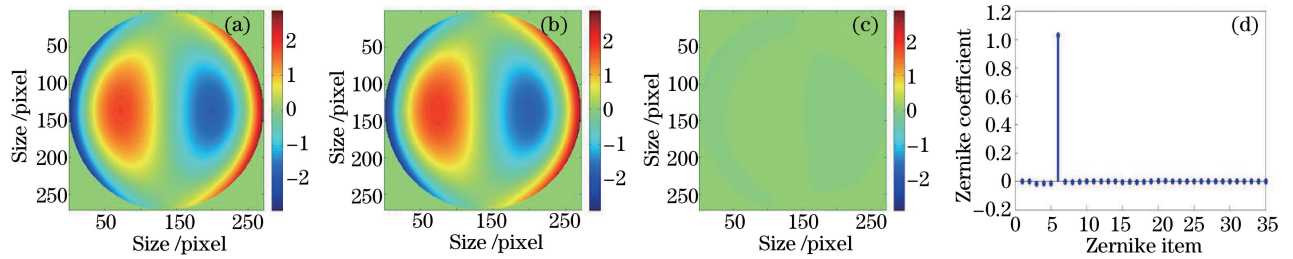


图 5 (a)输入的彗差分布;(b)复原的像散分布;(c)残差分布;(d) Zernike 系数

Fig. 5 (a) Coma aberration distribution of input; (b) recovered aberration distribution;  
(c) residual distribution; (d) Zernike coefficient

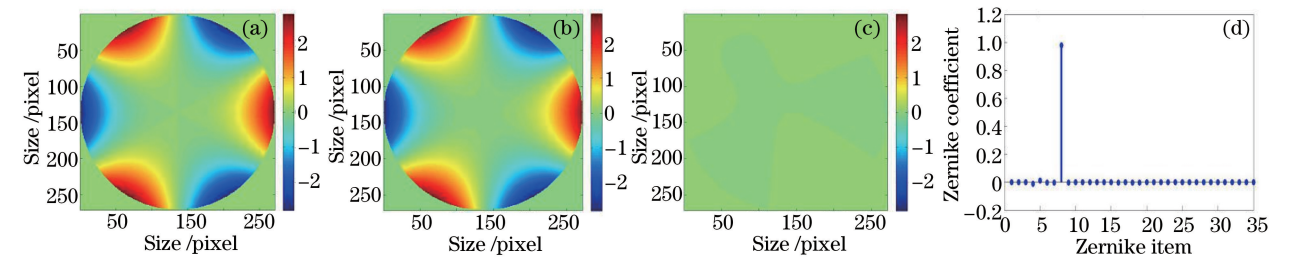


图 6 (a)输入三瓣叶像差分布;(b)复原的像散分布;(c)残差分布;(d) Zernike 系数

Fig. 6 (a) Three disc aberration distribution of input; (b) recovered aberration distribution;  
(c) residual distribution; (d) Zernike coefficient

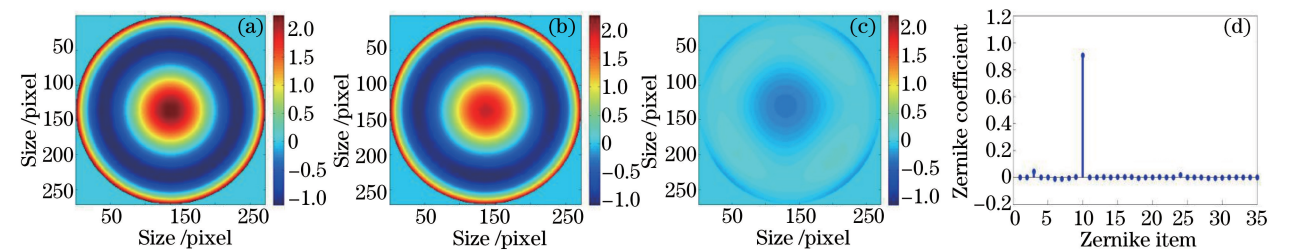


图 7 (a)输入的球差分布;(b)复原的像散分布;(c)残差分布;(d) Zernike 系数

Fig. 7 (a) Spherical aberration distribution of input; (b) recovered aberration distribution;  
(c) residual distribution; (d) Zernike coefficient

将任意一组 Zernike 多项式前 10 项的线性组合像差作为输入像差,验证利用 Wigner 分布函数反变换的相位复原方法恢复的效果,结果如图 8 所示。仿真结果表明,输入组合像差和复原的像差基本相等,误差较小,该方法可有效恢复成像系统中的任意低阶像差组合。

一般地,由于 Wigner 分布相位复原方法受到子孔径分辨率的影响,当子孔径数足够多时,该方法也可分辨更高阶的 Zernike 像差,空间分辨率的提高以及子孔径分辨能力的增强均可有效提高精度。

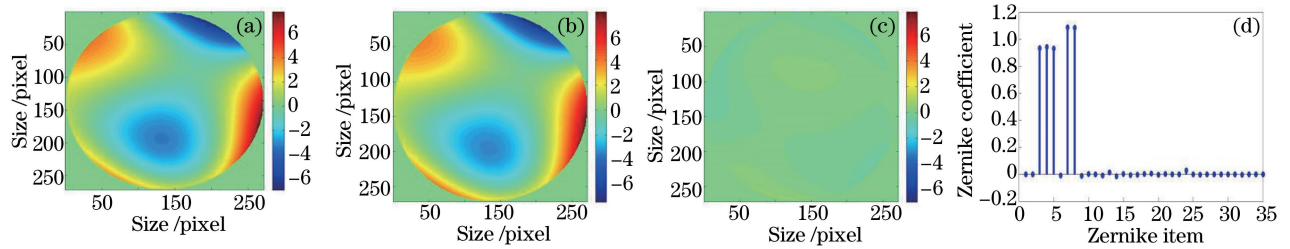


图 8 (a)输入的组合像差分布;(b)复原的像差分布;(c)残差分布;(d) Zernike 系数

Fig. 8 (a) Combined aberration distribution of input; (b) recovered aberration distribution; (c) residual distribution; (d) Zernike coefficient

## 4 结 论

基于微透镜阵列结构,分析了光场的四维参数化表征以及光场的空间-空间频率信息获取与重构;建立了光场的空间-空间频率分布与 Wigner 分布函数关系;提出了哈特曼的新型波前复原方法,即 Wigner 分布相位复原方法;建立了理论模型进行仿真。仿真结果表明,当子孔径足够多时,空间分辨率得到提高,基于光强信息组合的光场空间-空间频率联合分布相位复原方法可有效、快速地对低阶像差进行相位复原,误差较小。在微透镜阵列组成的新型光学成像系统中,应用该相位复原方法可有效、快速地进行校正分析与光学成像。

## 参 考 文 献

- Gershun A. The light field[J]. Journal of Mathematics and Physics, 1939, 18(1-4): 51-151.
- Adelson E H, Bergen J R. The plenoptic function and the elements of early vision[J]. Computational Models of Visual Processing, 1997, 1: 3-20.
- Levoy M, Hanrahan P. Light field rendering [C]. 23<sup>rd</sup> Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1996: 31-42.
- Levoy M, Ng R, Adams A, *et al*. Light field microscopy[J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(3): 924-934.
- Georgiev T G, Lumsdaine A, Goma S. High dynamic range image capture with plenoptic 2.0 camera[C]. Signal Recovery and Synthesis, 2009: SWA7P.
- Irwan R, Lane R G. Analysis of optimal centroid estimation applied to Shack-Hartmann sensing [J]. Applied Optics, 1999, 38(32): 6737-6743.
- Thomas S, Fusco T, Tokovinin A, *et al*. Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2006, 371(1): 323-336.
- Wu Yi, Wang Yingjian. Simulation and error analysis for Hartmann wavefront sensing and deformable mirror wavefront recovery[J]. Acta Optica Sinica, 1995, 15(4): 473-479.  
吴 毅, 王英俭. 哈特曼波前探测及波前校正的仿真与误差分析[J]. 光学学报, 1995, 15(4): 473-479.
- Xu Xiaojun, Lu Qisheng, Liu Zejin. Comparison of wavefront reconstruction by lateral shear interferometer and Hartmann wavefront sensor[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2000, 12(3): 269-272.  
许晓军, 陆启生, 刘泽金. 剪切干涉仪与哈特曼波前传感器的波前复原比较[J]. 强激光与粒子束, 2000, 12(3): 269-272.
- Li Xinyang, Jiang Wenhan. Zernike model wavefront reconstruction error of Hartmann-Shack wavefront sensor[J]. Acta Optica Sinica, 2002, 22(10): 1236-1240.  
李新阳, 姜文汉. 哈特曼-夏克传感器的泽尼克模式波前复原误差[J]. 光学学报, 2002, 22(10): 1236-1240.
- Bartelt H O, Brenner K-H, Lohmann A W. The Wigner distribution function and its optical production [J]. Optics Communications, 1980, 32(1): 32-38.
- Bastiaans M J. Wigner distribution function and its applications to first-order optics[J]. Journal of the Optical Society of America, 1979, 69(12): 1710-1716.