

# 基于旋磁材料一维光子晶体传输矩阵算法

马荣坤<sup>1</sup> 王纪俊<sup>1</sup> 方云团<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>江苏大学理学院, 江苏 镇江 212013

<sup>2</sup>江苏大学计算机科学与通信工程学院, 江苏 镇江 212013

**摘要** 为了研究基于旋磁材料一维光子晶体的传输属性,在麦克斯韦方程的基础上,利用磁性材料的相对磁导率张量,结合电磁场边界条件,推导出适合旋磁材料一维层状结构的传输矩阵计算公式。该公式没有经过任何理论近似,是一种精确算法,适合任何含旋磁材料一维光子晶体结构。

**关键词** 材料; 一维光子晶体; 传输矩阵; 旋磁材料; 传输; 缺陷模

中图分类号 TN24

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP53.011601

## Transfer Matrix Method of One-Dimensional Photonic Crystal Composed of Gyromagnetic Materials

Ma Rongkun<sup>1</sup> Wang Jijun<sup>1</sup> Fang Yuntuan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China

<sup>2</sup>School of Computer Science and Telecommunication Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China

**Abstract** In order to study the transmission properties of one-dimensional photonic crystal based on gyromagnetic materials, we propose a transfer matrix method. The transfer matrix method is based on the Maxwell's equations, the permeability tensor and boundary conditions of electromagnetic field. All the equations are taken no any approximation and suitable to any structure of one-dimensional photonic crystal composed of gyromagnetic materials.

**Key words** materials; one-dimensional photonic crystal; transfer matrix; gyromagnetic materials; transmission; defect modes

**OCIS codes** 160.3820; 160.5298; 260.2710

## 1 引言

光子晶体是一种能像硅和半导体控制电子一样能控制光束传播的人造晶体。光子晶体的概念是Yablonovitch<sup>[1]</sup>和John<sup>[2]</sup>于1987年分别在讨论如何抑制自发辐射和无序电介质材料中的光子局域时各自独立地提出来的。光子禁带的存在是光子晶体最重要的特征。自光子晶体的概念被提出后,基于光子晶体微结构器件的设计已经得到广泛的研究,被用于制作高性能反射镜、光子晶体波导、光子晶体微腔、光子晶体光纤、光子晶体超棱镜、偏振器等等<sup>[3]</sup>。光子晶体对电磁波的调控主要是通过组成它的材料属性和结构来实现。因此当把一些功能材料和新的结构设计结合在一起,就可能有一些意想不到的发现。虽然对光子晶体的研究已经经历相当长的时间,但由于材料性质的多样性,特别是当把某些功能材料作为组成光子晶体的结构单元时,光子晶体会表现从未有过的性质,从而不断激发新的研究热点。磁性材料就是典型的功能材料,磁性材料分为旋电材料和旋磁材料两种类型。已经有大量的研究利用旋电材料和一维光子晶体结构实现非互易传输,进而设计出光学隔离器<sup>[4-9]</sup>。目前的一维光子晶体结构均集中于旋电材料,它的优越性是在近红外波段吸收较小,可应用于光通信系统,但由于磁光效应较弱,结构设计比较复杂,非互易性不太明显。旋磁材料在微波段吸收较小,磁光效应比旋电材料强很多,因此如果不考虑工作波段,旋磁材料比旋电材料更有特别的优越性。一维光子晶体常用的研究方法是传输矩阵法,目前针对旋电材料一维光子晶体的

收稿日期: 2015-07-20; 收到修改稿日期: 2015-08-11; 网络出版日期: 2015-12-18

基金项目: 江苏大学高级专业人才科研启动项目(13JGD003)

作者简介: 马荣坤(1963—),男,讲师,主要从事大学物理教学和光电子器件方面的研究。E-mail: 2831373336@qq.com

\*通信联系人。E-mail: fang\_yt1965@sina.com

传输矩阵法已经有推导和应用<sup>[4-9]</sup>,这里面有磁场方向与光传播方向垂直的 voigt 磁光效应<sup>[4-8]</sup>和磁场方向与光传播方向相同的法拉第磁光效应<sup>[9]</sup>。文献[9]研究基于法拉第磁光效应的传输,由于横电波和横磁波存在耦合,需要建立 4×4 矩阵。但针对旋磁材料一维光子晶体结构,目前还没有相应的计算方法。由于旋磁材料相对磁导率是张量形式,普通的传输矩阵方法无法计算含旋磁材料结构的传输属性。为了推广基于旋磁材料一维光子晶体的应用研究,本文基于麦克斯韦方程和磁性材料的物理性质推导出对应的传输矩阵算法公式。

## 2 模型和理论公式

如图 1 所示,一维层状结构材料沿  $z$  轴放置,理想情况下材料性质与坐标  $x, y$  无关。当外磁场沿  $y$  轴方向,旋磁材料相对磁导率表示为<sup>[10]</sup>

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & -i\Delta \\ 0 & \mu & 0 \\ i\Delta & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (1)$$

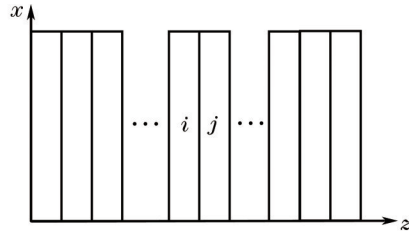


图 1 一维层状结构模型

Fig.1 Schematic of one-dimensional layered structure

对非旋磁材料,可令  $\Delta = 0$ 。因此下面所有公式同样适合非磁性材料。对横电 (TE) 模式,入射面为  $xoz$ 。在任一介质层中,行波电磁场表示为

$$\mathbf{E}(x, z) = E_{y_0} \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] \mathbf{e}_y, \quad (2)$$

$$\mathbf{H}(x, z) = H_{x_0} \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] \mathbf{e}_x + H_{z_0} \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] \mathbf{e}_z = H_x \mathbf{e}_x + H_z \mathbf{e}_z. \quad (3)$$

由  $\mathbf{B} = \mu_0 \tilde{\mu} \mathbf{H}$  得

$$\begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu & 0 & -i\Delta \\ 0 & \mu & 0 \\ i\Delta & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中  $B_x = \mu_0(\mu H_x - i\Delta H_z)$ ,  $B_z = \mu_0(i\Delta H_x + \mu H_z)$ 。根据麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega(B_x \mathbf{e}_x + B_z \mathbf{e}_z), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega\right), \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial z} E_y \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} E_y \mathbf{e}_z = -\frac{\partial}{\partial z} E_y \mathbf{e}_x + ik_x E_y \mathbf{e}_z, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} = ik_x\right). \quad (6)$$

根据对应分量相等得

$$-\frac{\partial}{\partial z} E_y = i\omega\mu_0(\mu H_x - i\Delta H_z), \quad (7)$$

$$ik_x E_y = i\omega\mu_0(i\Delta H_x + \mu H_z), \quad (8)$$

由(7)、(8)式解得:

$$H_x = \frac{1}{\mu^2 - \Delta^2} \left( \frac{i\mu}{\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_y + \frac{i\Delta k_x}{\omega\mu_0} E_y \right), \quad (9)$$

$$H_z = \frac{1}{\mu^2 - \Delta^2} \left( \frac{\mu k_x}{\omega\mu_0} E_y + \frac{\Delta}{\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_y \right), \quad (10)$$

因为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & H_z \end{vmatrix} = \left( -ik_x H_z + \frac{\partial}{\partial z} H_x \right) \mathbf{e}_y, \quad (11)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_y \mathbf{e}_y, \quad (12)$$

由  $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial D}{\partial t}$  得

$$i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_y = ik_x H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_x. \quad (13)$$

将(9)、(10)式代入(13)式得

$$i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_y = ik_x H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_x = ik_x \frac{1}{\mu^2 - \Delta^2} \left( \frac{\Delta}{\omega \mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_y + \frac{\mu k_x}{\omega \mu_0} E_y \right) - \frac{1}{\mu^2 - \Delta^2} \left( \frac{i\mu}{\omega \mu_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y + \frac{i\Delta k_x}{\omega \mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_y \right) - \frac{1}{\mu^2 - \Delta^2} \left( \frac{i\mu k_x^2}{\omega \mu_0} E_y - \frac{i\mu}{\omega \mu_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y \right), \quad (14)$$

(14)式化简得

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y + \left[ \frac{\mu^2 - \Delta^2}{\mu} \varepsilon \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 \right] E_y = 0, \quad (15)$$

令  $\frac{\mu^2 - \Delta^2}{\mu} = \mu'$ ,  $\varepsilon \mu' = n'^2$ ,  $n'$  为等效折射率。于是

$$\frac{\mu^2 - \Delta^2}{\mu} \varepsilon \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 = (n' k_0)^2 = k^2, \quad k^2 - k_x^2 = k_z^2, \quad k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2}, \quad (16)$$

(16)式化为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y + k_z^2 E_y = 0, \quad (17)$$

(17)式解为:

$$E_y = E_{y_0}^+ \exp(ik_z z) + E_{y_0}^- \exp(-ik_z z), \quad (18)$$

(18)式表示  $+z$  和  $-z$  两个方向平面波的叠加。由(18)式得到任一介质层中电场是传输波和反射波的叠加,表示为:

$$E_y(x, z) = E_{y_0}^+ \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] + E_{y_0}^- \exp[i(k_x x - k_z z - \omega t)] = E_y^+ + E_y^-. \quad (19)$$

由(19)和(9)式得:

$$H_x(x, z) = (M - N)E_y^+ + (M + N)E_y^-, \quad (20)$$

其中  $M = \frac{i\Delta k_x}{\omega \mu' \mu \mu_0}$ ,  $N = \frac{k_z}{\omega \mu' \mu_0}$ 。

在第  $i$  层和  $j$  层的介质面上,电磁波满足切向分量连续的条件

$$E_{y_i}^+ + E_{y_i}^- = E_{y_j}^+ + E_{y_j}^-, \quad (21)$$

$$H_{x_i} = H_{x_j}, \quad (22)$$

(20)式可以写成

$$(M_i - N_i)E_{y_i}^+ + (M_i + N_i)E_{y_i}^- = (M_j - N_j)E_{y_j}^+ + (M_j + N_j)E_{y_j}^-. \quad (23)$$

(21)和(22)式可写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ M_i - N_i & M_i + N_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y_i}^+ \\ E_{y_i}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ M_j - N_j & M_j + N_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y_j}^+ \\ E_{y_j}^- \end{pmatrix}. \quad (24)$$

令  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ M - N & M + N \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{pmatrix} E_{y_i}^+ \\ E_{y_i}^- \end{pmatrix} = T_i^{-1} T_j \begin{pmatrix} E_{y_j}^+ \\ E_{y_j}^- \end{pmatrix} = M_{ij} \begin{pmatrix} E_{y_j}^+ \\ E_{y_j}^- \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$M_{ij} = T_i^{-1} T_j = \begin{pmatrix} \frac{N_i + M_i}{2N_i} & -\frac{1}{2N_i} \\ \frac{N_i - M_i}{2N_i} & \frac{1}{2N_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ M_j - N_j & M_j + N_j \end{pmatrix} = \frac{1}{2N_i} \begin{bmatrix} (N_i + M_i) + (N_j - M_j) & (N_i + M_i) - (N_j + M_j) \\ (N_i - M_i) - (N_j - M_j) & (N_i - M_i) + (N_j + M_j) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

(25)式为电磁波从一种介质到另一种介质界面的过渡矩阵。对 $n$ 层介质处于空气背景中,用序数表示第几层介质,空气表示为0,其输入和输出界面的电磁场关系可以用连乘的矩阵来表示:

$$\begin{pmatrix} E_{in}^+ \\ E_{in}^- \end{pmatrix} = M_{01} P_1 M_{12} P_2 \dots P_i M_{ij} P_j \dots P_n M_{n0} \begin{pmatrix} E_{out}^+ \\ E_{out}^- \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{out}^+ \\ E_{out}^- \end{pmatrix}, \quad (27)$$

其中  $P_j = \begin{bmatrix} \exp(-ik_j d_j) & 0 \\ 0 & \exp(ik_j d_j) \end{bmatrix}$  描述第 $j$ 层介质内传输波和反射波相位的变化<sup>[11]</sup>。整个结构的传输系数 $T$ 和反射系数 $R$ 可用如下公式计算<sup>[11]</sup>

$$T = \left| \frac{E_{out}^+}{E_{in}^+} \right| = \frac{1}{|M(1,1)|}, \quad (28)$$

$$R = \left| \frac{E_{in}^-}{E_{in}^+} \right| = \left| \frac{M(2,1)}{M(1,1)} \right|. \quad (29)$$

### 3 一个算例

以中心缺陷一维光子晶体为例,结构由A和B两种介质层组成,中间插入旋磁材料层D(YIG),构成中心缺陷层,整个结构表示为 $(AB)^n D (BA)^n$ , $n$ 为周期数目。A、B层折射率和厚度分别为 $n_A=1.5$ 、 $d_A=3.48$  mm、 $n_B=3.48$ 、 $d_B=1.5$  mm。两介质层光学厚度相等。选取基频 $\omega_0 = \frac{c\pi}{n_A d_A + n_B d_B}$ ,相对基频波,每层介质均为 $1/4$ 波片,结构满足布拉格反射条件。在无外加磁场的情况下,D层 $\mu=1$ , $\Delta=0$ , $n_D=\sqrt{15}$ 。D层厚度取为 $d_D=(n_A d_A + n_B d_B)/\sqrt{15}$ 。在假定施加特定外加磁场的条件下, $\mu=14$ , $\Delta=12.4$ <sup>[12]</sup>。根据上面推导的公式,计算出该结构在正入射( $k_x=0$ )条件下 $n=4$ 的透射谱,结果如图2所示。从图中可以看出无外加磁场时,D层为常规介质,缺陷模出现在基频的奇数倍处,与普通传输矩阵法计算结果一致<sup>[13-14]</sup>。当施加磁场后, $\omega/\omega_0=1$ 处的缺陷模向高频移动。由此可以推断,当逐渐改变外加磁场大小时,可以连续调节缺陷模的位置,从而实现可调光子晶体的目的。

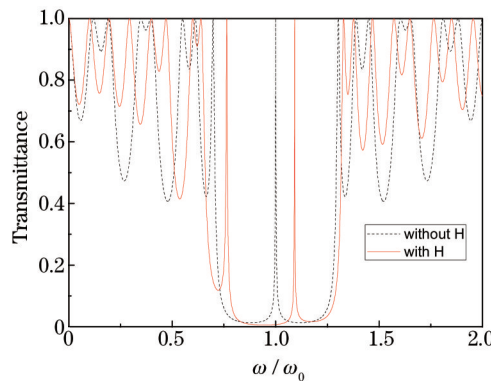


图2 施加磁场和不施加磁场两种条件下一维光子晶体透射谱

Fig.2 Transmission spectra of one-dimensional photonic crystal with and without magnetic field

### 4 结 论

从麦克斯韦方程和磁性材料的相对磁导率张量出发,结合电磁场边界条件,推导出适合旋磁材料一维光子晶体的传输矩阵计算公式,并给出一个算例。该公式将为研究旋磁材料一维光子晶体提供了有力的工具。

#### 参 考 文 献

- 1 Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics[J]. Phys Rev Lett, 1987, 58(20): 2059-2062.

- 2 John S. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices[J]. *Phys Rev Lett*, 1987, 58(23): 2486–2489.
- 3 Joannopoulos John D, Johnson Steven G, Winn Joshua N, *et al.*. *Photonic Crystals: Moding the Flow of Light*[M]. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- 4 Dong H Y, Wang J, Cui T J. One-way Tamm plasmon-polaritons on the interface of magnetophotonic crystals and conducting metal oxides[J]. *Phys Rev B*, 2013, 87(4): 045406–045409.
- 5 Khanikaev A B, Baryshev A V, Inoue M, *et al.*. One-way electromagnetic Tamm states in magnetophotonic structures[J]. *Appl Phys Lett*, 2009, 95(1): 011101.
- 6 Fang Y T, Yue-xin Ni, Hang-qing He, *et al.*. Effect of hybrid state of surface plasmon-polaritons, magnetic defect mode and optical Tamm state on nonreciprocal propagation[J]. *Opt Commun*, 2014, 320: 99–104.
- 7 Fang Y T, Lin-kun Chen, Jing Zheng, *et al.*. Nonreciprocal channels of light through the coupling of two nonsymmetric tamm magnetoplasmon polaritons[J]. *IEEE Photonics Journal*, 2014, 6(4): 4801611.
- 8 Tang Yueming, Fang Yuntuan, Lü Cuihong, *et al.*. Nonreciprocal transmission based on nonsymmetriccoupling of magnetic microcavity in photonic crystal[J]. *Chinese J Lasers*, 2015, 42(6): 0606003.  
汤月明, 方云团, 吕翠红, 等. 光子晶体磁性微腔非对称耦合的非互易传输[J]. *中国激光*, 2015, 42(6): 0606003.
- 9 Wen Xiaowen, Li Guojun, Qiu Gaoxin, *et al.*. One-dimensional magneto optical multi-layer film isolator with multi-defect [J]. *Acta Phys Sin*, 2004, 53(10): 3571–3576.  
温晓文, 李国俊, 仇高新, 等. 多缺陷结构的一维磁光多层膜隔离器[J]. *物理学报*, 2004, 53(10): 3571–3576.
- 10 D M Pozar. *Microwave Engineering*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- 11 Yeh P. *Optical Waves in Layered Media*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- 12 Wang, Z, Chong, Y D, Joannopoulos, *et al.*. Reflection-free one-way edge modes in a gyromagnetic photonic crystal[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, 100(1): 013905.
- 13 Wang Hui, Li Yongping. An eigen matrix method for obtaining the band structure of photonic crystals[J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(11): 2172–2178.  
王 辉, 李永平. 用特征矩阵法计算光子晶体的带隙结构[J]. *物理学报*, 2001, 50(11): 2172–2178.
- 14 Fang Yuntuan, Shen Tinggen, Tan Xinlin. Study on one-dimensional photonic crystal with impurity defects[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, 24(11): 1557–1560.  
方云团, 沈廷根, 谭锡林. 一维光子晶体掺杂缺陷模研究[J]. *光学学报*, 2004, 24(11): 1557–1560.

栏目编辑: 韩 峰