

干涉条纹带宽与波前频谱关系研究

孟晓辰¹ 郝群² 祝连庆¹

¹北京信息科技大学光电测试技术北京市重点实验室, 北京 100101

²北京理工大学光电学院, 北京 100081

摘要 干涉测量法是测量科学中最有效的手段之一,而无论是要增大其动态测量范围还是要检测面形的高频误差,都受限于检测的空间带宽,故干涉条纹带宽与波前频谱的关系就成为关注的重点。针对这一需求,结合傅里叶光学理论对干涉条纹带宽与波前频谱的关系进行了理论分析和仿真实验,得到了干涉条纹带宽与波前频谱的数值对应关系。结果表明,干涉条纹强度分布的空间频谱是波前分布函数的空间频谱基础上的扩展,扩展程度取决于波前分布的幅频积。频谱扩展程度与波前分布的幅频积呈正比,波前分布的幅频积越大,空间频谱扩展越宽。根据 CCD 分辨率确定干涉图的总带宽,可以计算出能测的波前最大空间频率,对后续研究各种干涉方法的频谱特性以及如何进行频谱带宽的优化分配,从而进一步提高可测面形空间频率的测量范围提供了理论依据。

关键词 测量; 条纹带宽; 空间频率; 波前频谱

中图分类号 O436.1; TH741

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP53.011203

Research on Relationship between Fringe Bandwidth and Frequency Spectrum of Wave-Front in Interferometry

Meng Xiaochen¹ Hao Qun² Zhu Lianqing¹

¹Beijing Key Laboratory of Optoelectronic Instrument Technology, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100101, China

²School of Optoelectronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract Interferometry is one of the most effective methods in measurement science, and whether it is to increase the dynamic measurement range or to detect high frequency error of surface, it is limited to spatial bandwidth of detection. So the relationship between bandwidth of interference fringes and frequency spectrum of wave-front is becoming the focus of attention, and it is analyzed and simulated based on the Fourier optics theory. The results indicate that, the spatial spectrum of interference fringes intensity is the expansion of the frequency of wave-front distribution function. And the extent of the expansion is determined by the amplitude frequency product of the wave-front. With the increase of amplitude frequency product of the wave-front, the bandwidth of interference fringes will be greater. According to the CCD resolution, the total bandwidth of interference patterns can be determined, and then the maximum spatial frequency of wave-front can be obtained. That provides a theoretical quantitative basis for the spectral characteristics of the interference methods, the optimal allocation of bandwidth and the increase of dynamic measurement range.

Key words measurement; fringe bandwidth; spatial frequency; frequency spectrum of wave-front

OCIS codes 120.3180; 120.4120; 120.4630; 120.5050

1 引言

光学元件干涉检测技术朝着大口径、高精度、高分辨率、高测量重复性及抗干扰等方向发展。目前存在的主要问题是:高空间分辨率与大口径的矛盾,高精度与可测波前大动态范围的矛盾。这两对矛盾是大口径光学元件干涉检测的难点,也是该领域近期的研究热点。各种测量方法中涉及到要尽可能地增大面形的动态测量范围和关注面形的高频误差检测,而这两方面的问题都受限于空间带宽问题。目前各种测量方法

收稿日期: 2015-07-13; 收到修改稿日期: 2015-08-17; 网络出版日期: 2015-12-28

基金项目: 教育部“长江学者与创新团队”发展计划(IRT1212)、北京市教委科研项目(KM201511232006)

作者简介: 孟晓辰(1985—),女,博士,讲师,主要从事光学精密测量等方面的研究。E-mail: mengxc316@gmail.com

中有关测量带宽、CCD分辨率与带宽的关系以及不同波前空间频率的测量精度的研究都属于空白,均未见有相关文献报道。

干涉测量法是测量科学中最有效的手段之一,它具有非常高的灵敏性,具有其他技术不可替代的特点,被广泛地用于工程和物理学的各个方面。干涉测量法中将待测的物理量最终转化为干涉条纹的特征。如何对干涉条纹进行处理获得图像特征,成为干涉测量法中重要的一个环节。而无论是要增大干涉测量法的动态测量范围还是检测面形的高频误差^[1-5],都受限于检测的空间带宽。理论上测量带宽应无限才能真实反映波前(面形)的频谱,但在实际测量时却很难实现^[6-10],应尽可能扩展测量带宽^[11-12],故干涉条纹带宽与波前频谱的关系就成为关注的重点。本文将对干涉条纹空间频率及其带宽与波前频谱的关系进行理论分析,定量确定干涉条纹带宽与波前频谱的数学关系,为研究不同干涉测量方法的频谱特性提供理论依据。

2 干涉条纹带宽与波前空间频谱的关系

不同的加工方式加工而成的光学元件,在检测时波前畸变的空间周期跨度不同,各频段的影响作用又不同^[13-14],当前面形误差的评价指标不仅仅局限于峰谷(PV)值,均方根(RMS)值,转而更关注各个频段面形误差的起伏。现有检测方法中,为研究不同频率误差对光学系统性能的影响情况,通常将光学元件波面质量分为三个频段来评价:1)高频段,周期小于0.12 mm,相当于微观粗糙度或光洁度;2)中频段,周期在0.12~33 mm之间,相当于波纹度;3)低频段,周期大于33 mm,相当于空间域波面面形。这种频段误差的划分多用于评价面形和指导面形的加工,关注的是光学元件的面形空间频率分布情况,故为了分析具有不同空间频率和不同起伏的波前分布与干涉条纹带宽的关系,可按照傅里叶级数定理,将一个复杂波前分布函数分解为一系列不同空间频率的正弦波的叠加。这里对干涉条纹带宽与按照正弦波分解后的波前空间频谱的关系进行理论分析和仿真验证。

在相位干涉检测系统中,照明光通过被测光学元件透射或反射形成测试光场,与参考光场干涉形成干涉条纹,反映光学元件面形起伏信息。采用随机位相屏的理论模型,即光学元件表面偏差只影响测试光场的波前分布,而不影响其振幅分布。在理想单色准直光的照明下,受光学元件面形偏差的调制,对应的测试光场可表示为

$$E(x) = \exp[jk\phi(x)], \quad (1)$$

式中 $\phi(x)$ 表示被测波前分布, k 为波数。将 $\phi(x)$ 按傅里叶级数分解成各个空间频率的正弦信号

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^N A_n [\sin(2\pi n u_0 x)], \quad (2)$$

式中 u_0 是基频正弦信号的空间频率, A_n 表示 n 阶谐波信号的振幅。如图1(a)所示,一个复杂的波前分布函数 $\phi(x)$ 根据(2)式可将其分解为如图1(b)所示的几个不同空间频率的正弦信号的叠加。

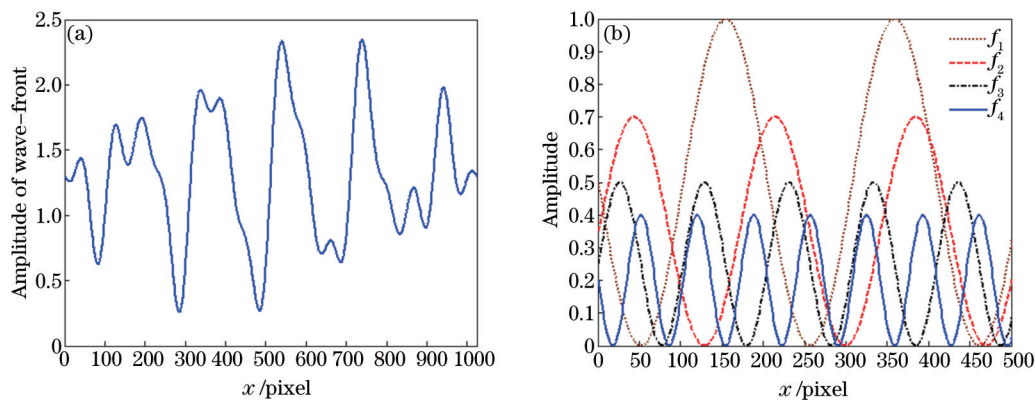


图1 (a)复杂波前分布曲线及(b)其频率分解

Fig.1 (a) Curve of complex wave-front; (b) decomposition of complex wave-front's curve

基频正弦相位信号对应的复振幅函数可表示为

$$E(x) = \exp[jkA_0 \sin(2\pi u_0 x)] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA_0) \exp(j2\pi q u_0 x), \quad (3)$$

式中 J_q 为第一类 q 阶贝塞尔函数。由(3)式可知,光学元件在检测时波前调制到测试光场,其空间位置没有变化,而空间频谱会扩展,即元件波前空间频率为 u_0 ,测试光场有空间频率为 $u_0, 2u_0, \dots, qu_0$ 的分量,其幅度为 $J_q(kA_0)$ 。

设参考波前为平面波 $E_0 = 1$, 频率域为 μ , 则可以得到对应的干涉场强度的频谱分布为

$$\begin{aligned} F_I(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} [E(x) + E_0] \cdot [E^*(x) + E_0^*] \cdot \exp(-j2\pi\mu x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[|E(x)|^2 + |E_0|^2 + E(x) \cdot E_0^* + E^*(x) \cdot E_0 \right] \cdot \exp(-j2\pi\mu x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2 + \exp[jkA_0 \sin(2\pi u_0 x)] + \exp[-jkA_0 \sin(2\pi u_0 x)] \right\} \cdot \exp(-j2\pi\mu x) dx = \\ &= 4\pi\delta(\mu) + \int_{-\infty}^{\infty} \exp[jkA_0 \sin(2\pi u_0 x)] \cdot \exp(-j2\pi\mu x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-jkA_0 \sin(2\pi u_0 x)] \cdot \exp(-j2\pi\mu x) dx = \\ &= 4\pi\delta(\mu) + Q(\mu) + Q^*(\mu) \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $Q(\mu)$ 为波前的空间频谱分布, $Q^*(\mu)$ 为其共轭频谱, 且

$$\begin{aligned} Q(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[jkA_0 \sin(2\pi u_0 x)] \cdot \exp(-j2\pi\mu x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA_\mu) \exp(j2\pi qu_0 x) \cdot \exp(-j2\pi\mu x) dx = \\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA_\mu) \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(2\pi qu_0 x) + j \sin(2\pi qu_0 x)] \cdot \exp(-j2\pi\mu x) dx = \\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA_\mu) \left\{ \frac{1}{2} [\delta(qu_0 + \mu) + \delta(qu_0 - \mu)] - \frac{j}{2} [\delta(qu_0 + \mu) - \delta(qu_0 - \mu)] \right\} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA_\mu) \cdot \delta(qu_0 - \mu), \end{aligned} \quad (5)$$

其共轭频谱 $Q^*(\mu) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA_\mu) \cdot \delta(qu_0 + \mu)$ 。

为避免零频与展宽后的基频产生交叠, 处理中将(4)式的零频去除, 此时干涉条纹的频谱分布可改写为

$$F_I(\mu) = Q(\mu) + Q^*(\mu) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA_\mu) \cdot \delta(qu_0 - \mu) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA_\mu) \cdot \delta(qu_0 + \mu), \quad (6)$$

式中 k 为波数, 在数值上等于空间频率的 2π 倍, A_μ 表示空间频率为 μ 对应的振幅, kA_μ 称为波前分布的幅频积。(6)式表明: 干涉条纹强度分布的空间频谱有一系列空间频率为 $(u_0 - \mu), (2u_0 - \mu), (3u_0 - \mu), \dots$ 的分量, 其振幅为 $J_q(kA_\mu)$, 其频谱带宽会在波前分布函数的空间频谱基础上扩展, 扩展程度取决于波前分布的幅频积 kA_μ ; 若 kA_μ 越大, 则空间频谱扩展越宽。空间频率 μ 较小时, A_μ 虽然较大, 但 $J_q(kA_\mu)$ 随着 q 的增加而迅速减小, 所以空间频谱只会扩展到有限的范围内, 因此波前低频段信息基本不会影响干涉条纹的空间频谱带宽。

3 计算机仿真与结果分析

为验证上述结论, 进行计算机仿真分析。图2(a)和图3(a)为余弦分布波前 $y = \cos(2\pi fx)$ 和 $y' = 2 \cos(2\pi fx)$, 其空间频率相等, 振幅 PV 值分别为 0.16 λ 和 0.32 λ , 其对应干涉图的频谱分布分别如图2(c)和图3(c)所示。可知, 波前分布振幅越大, 干涉条纹的空间频谱扩展越宽。

图4(a)为振幅 PV 值为 0.32 λ , 空间频率是图3(a)所示余弦波前空间频率的 2 倍, 对应干涉图的频谱分布如图4(c)所示, 与图3比较可知, 波前分布空间频率越大, 干涉条纹的空间频谱扩展越宽。

上述仿真结果验证了干涉条纹强度分布的空间频谱是波前分布函数的空间频谱基础上的扩展, 扩展程度取决于波前分布的幅频积。波前分布的幅频积越大, 空间频谱扩展越宽。

另对(2)式求导数, 即为波前的斜率分布, 有

$$\phi'(x) = \sum_{n=0}^N A_n [\sin(2\pi nu_0 x)]' = \sum_{n=0}^N 2\pi nu_0 A_n \cos(2\pi nu_0 x), \quad (7)$$

式中 $nu_0 A_n$ 是波前某一空间频率下对应的幅频积, 可知波前最大斜率也与波前分布的幅频积呈正比。可以得出, 由波前最大斜率与波前最小斜率之差可以估算出干涉条纹总带宽^[9], 若波前分布的幅频积 $nu_0 A_n$ 越大, 则对应某一频率下的波前最大斜率越大, 从而干涉条纹空间频谱扩展越宽, 其带宽也随之增大。则干涉条纹总带宽与幅频积之间的关系可以表示为

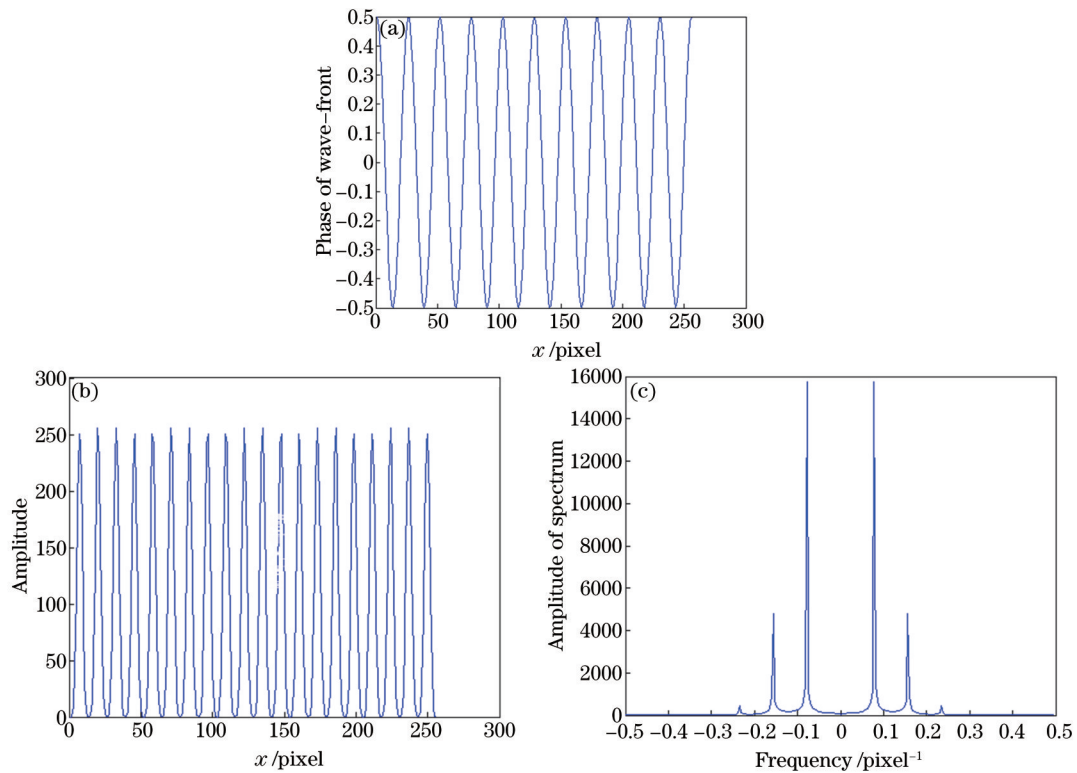


图2 (a)余弦分布波前(振幅PV值为 0.16λ)及其对应干涉图的(b)强度图和(c)频谱图

Fig.2 (a) Wave-front of cosine distribution (amplitude's PV is 0.16λ) and (b) the corresponding interference and (c) frequency spectrum

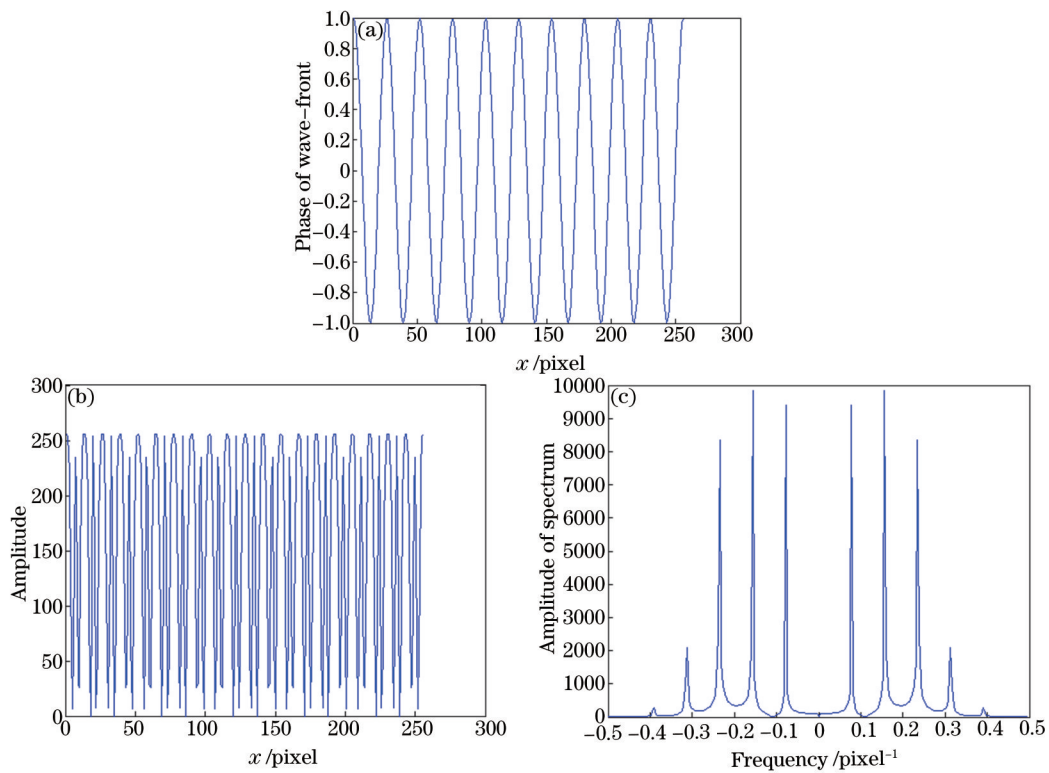


图3 (a)余弦分布波前(振幅PV值为 0.32λ)及其对应干涉图的(b)强度图和(c)频谱图

Fig.3 (a) Wave-front of cosine distribution (amplitude's PV is 0.32λ) and (b) the corresponding interference and (c) frequency spectrum

$$W \propto 2\pi u_0 A_n, \text{ or } W \propto k A_\mu. \quad (8)$$

在实际测量时,干涉条纹总带宽受 CCD 分辨率的限制,不同分辨率的 CCD 对应不同的总带宽,而不同

的带宽会对应一组不同的波前分布的幅频积,其关系曲线如图5所示。

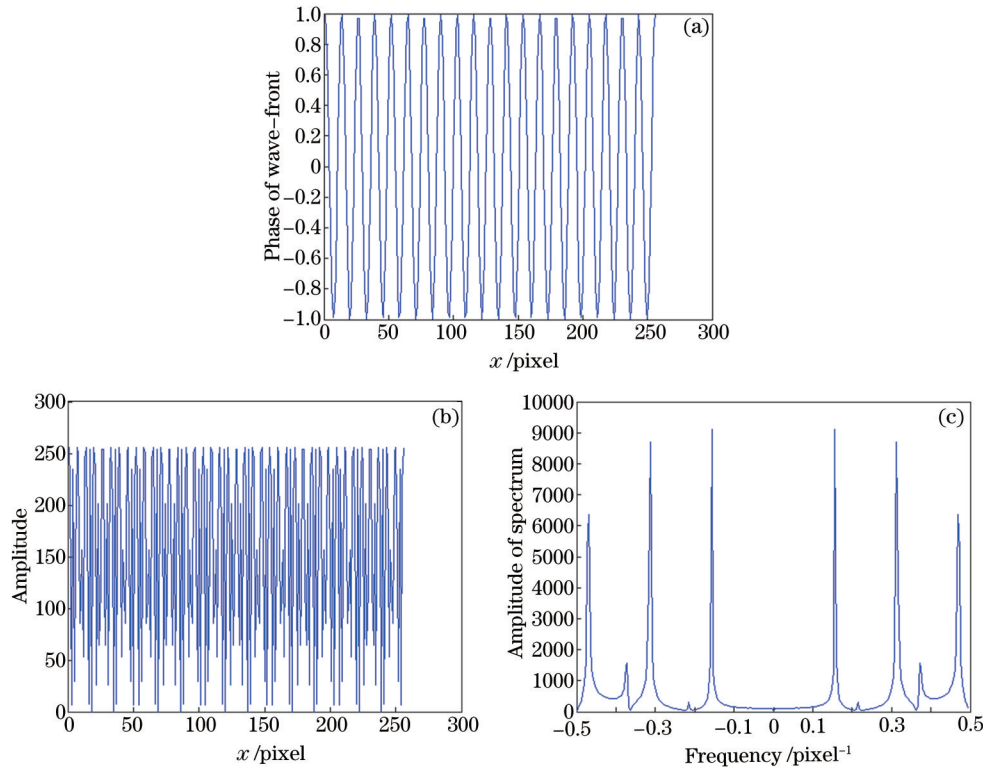


图4 (a)余弦分布波前(振幅PV值为 0.32λ ,频率为 $2f$)及其对应干涉图的(b)强度图和(c)频谱图

Fig.4 (a)Wave-front of cosine distribution (amplitude's PV is 0.32λ , frequency is $2f$) and (b) the corresponding interference and (c) frequency spectrum

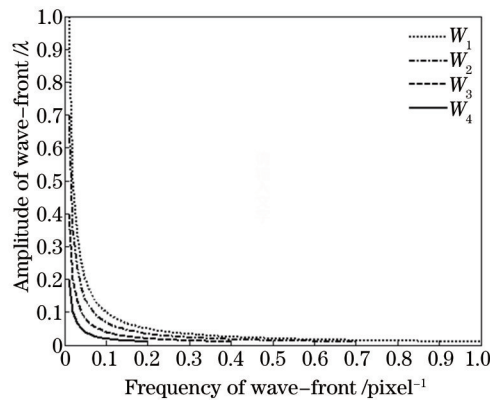


图5 不同带宽时对应可测波前幅频积的关系示意图

Fig.5 Relationship between bandwidth and corresponding amplitude-frequency-product that can be measured

对于不同的测量方法和不同分辨率的CCD,可测的干涉条纹带宽均不同。这对研究不同干涉测量方法的频谱特性以及如何扩展动态测量范围提供了理论依据。

4 结 论

本文从频域角度出发,系统地研究了干涉条纹空间频率以及频谱带宽的关系。首先对干涉条纹带宽与波前空间频谱的关系进行了理论分析,得出了波前分布的频谱带宽会在波前分布函数的空间频谱基础上扩展的结论,扩展程度取决于波前分布的幅频积,频谱扩展程度与波前分布的幅频积呈正比,波前分布的幅频积越大,空间频谱扩展越宽。然后对干涉条纹的带宽与波前频谱的关系进行了仿真验证,得到了干涉条纹带宽与波前空间频谱的数值对应关系曲线,根据CCD分辨率确定干涉图的总带宽,可以计算出能测的波前最大空间频率,对后续研究各种方法的频谱特性以及如何进行频谱带宽的优化分配提供了理论依据。

参考文献

- 1 Guo Yuan, Mao Qi, Chen Xiaotian, *et al.*. Study of a fast windowed Fourier filtering method for interference fringes[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(6): 0612008.
郭媛, 毛琦, 陈小天, 等. 干涉条纹快速加窗傅里叶滤波方法的研究[J]. *光学学报*, 2014, 34(6): 0612008.
- 2 Zhang Min, Tang Feng, Wang Xiangzhao, *et al.*. Phase retrieval errors analysis of interferogram using two dimensional fast fourier transform method[J]. *Chinese J Lasers*, 2013, 40(3): 0308002.
张敏, 唐锋, 王向朝, 等. 二维快速傅里叶变换干涉图相位提取误差分析[J]. *中国激光*, 2013, 40(3): 0308002.
- 3 Xu Qiao, Gu Yuanyuan, Chai Lin, *et al.*. Measurement of wavefront power spectral density of large optical components[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, 21(3): 344-347.
许乔, 顾元元, 柴林, 等. 大口径光学元件波前功率谱密度检测[J]. *光学学报*, 2001, 21(3): 344-347.
- 4 Feng Youjun, Wang Zhong. Influence of different distorted wavefronts on continuous phase plate smoothing focal spot[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(7): 072204.
冯友君, 王忠. 不同波前畸变对连续相位板焦斑的影响[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(7): 072204.
- 5 Li Jie, Wang Yurong, Meng Xiangfeng, *et al.*. Classification and comparison of phase shift extraction algorithms in generalized phase-shifting interferometry[J]. *Chinese J Lasers*, 2013, 40(12): 1208003.
李杰, 王玉荣, 孟祥锋, 等. 广义相移干涉术相移提取算法的分类与评估方法[J]. *中国激光*, 2013, 40(12): 1208003.
- 6 Meng Xiaochen, Hao Qun, Zhu Qiudong, *et al.*. Influence of interference fringe's spatial frequency on the phase measurement accuracy in digital Moiré phase-shifting interferometry[J]. *Chinese J Lasers*, 2011, 38(10): 1008008.
孟晓辰, 郝群, 朱秋东, 等. 干涉条纹空间频率对数字叠栅移相干涉测量精度的影响[J]. *中国激光*, 2011, 38(10): 1008008.
- 7 Mu Jie, Wang Xiao, Jing Feng, *et al.*. Effect of wavefront distortion on coherent beam combination in high-power laser facilities[J]. *Chinese J Lasers*, 2015, 42(6): 0602010.
母杰, 王道, 景峰, 等. 高功率激光装置中波前畸变对相干合成的影响[J]. *中国激光*, 2015, 42(6): 0602010.
- 8 Zhang Rongzhu, Xu Qiao, Gu Yuanyuan, *et al.*. Testing errors and its influence of the large aperture optical elements[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2001, 13(2): 133-136.
张蓉竹, 许乔, 顾元元, 等. 大口径光学元件检测中的主要误差及其影响[J]. *强激光与粒子束*, 2001, 13(2): 133-136.
- 9 Deng Yan, Wang Xiangfeng, Ji Baojian, *et al.*. Measurement of mid-frequency wavefront for large-aperture optics[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2013, 12(25): 3333-3337.
邓燕, 王翔峰, 嵇保健, 等. 大口径光学元件中频波前的检测[J]. *强激光与离子束*, 2013, 12(25): 3333-3337.
- 10 Michael Bray, André Roussel. Using first principles in the specifying of optics for large high power lasers(I)-application to the MégaJoule laser (LMJ), specification, production and testing of optical components and systems[C]. *SPIE*, 1996, 2775: 328-344.
- 11 Meng Xiaochen, Hao Qun, Zhu Lianqing. Study on relationship between fringe bandwidth and wave-front slope in interferometry[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(3): 031201.
孟晓辰, 郝群, 祝连庆. 干涉条纹带宽与波前斜率分布关系研究[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(3): 031201.
- 12 Xie Jinghui, Zhao Dazun, Yan Jixiang. *Physical Optics*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2005.
谢敬辉, 赵达尊, 阎吉祥. *物理光学教程*[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2005.
- 13 Fiona Berryman, Paul Pynsent, James Cubilo. A theoretical comparison of three fringe analysis methods for determining the three-dimensional shape of an object in the presence of noise[J]. *Opt & Lasers in Eng*, 2003, 39(1): 35-50.
- 14 Lisong Yan, Xiaokun Wang, Ligong Zheng, *et al.*. Experimental study on subaperture testing with iterative triangulation algorithm[J]. *Opt Express*, 2013, 21(9): 22628-22644.

栏目编辑: 何卓铭