

# 方波信号驱动的长螺线管磁场分析

蔡 伟 伍樊成 杨志勇

第二炮兵工程大学兵器发射理论与技术国家重点学科实验室, 陕西 西安 710025

**摘要** 基于方波信号的磁光调制具有优良的特性,但存在信号畸变的问题,从理论上研究了它的机理。将方波信号通过傅里叶级数展开成不同频率正弦信号叠加的形式。在此基础上用麦克斯韦方程组和贝塞尔方程对各个频率正弦信号的长螺线管空间磁场进行求解,再把经过处理的各正弦信号产生的磁场迭代运算,最终从理论上求解出方波信号驱动时的长螺线管磁场。

**关键词** 傅里叶光学;麦克斯韦方程;傅里叶级数;贝塞尔函数;螺线管;磁场

**中图分类号** O441 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP52.092601

## Magnetic Field of Long Solenoid Driven by Square Wave

Cai Wei Wu Fancheng Yang Zhiyong

Laboratory of Armament Launch Theory and Technology Key Discipline of China, The Second Artillery Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710025, China

**Abstract** Magneto-optic modulation based on square wave signal has excellent properties, while it has the disadvantage of signal distortion. Theoretically, its mechanism is studied. Square wave signal is expanded into different frequency sine signal form by Fourier series. Magnetic fields of long solenoid driven by various frequency sinusoidal signals are calculated with Maxwell's equations and Bessel's equation. Various magnetic fields are added together and magnetic field of long solenoid driven by square wave is calculated in theory.

**Key words** Fourier optics; Maxwell's equations; Fourier series; Bessel function; solenoid; magnetic field

**OCIS codes** 260.2110; 260.5430; 230.2240; 160.3820

## 1 引言

在通常的电磁学书籍和文献中,关于螺线管的磁场计算和建模,学者们通常研究的是驱动信号为恒流源时的情况,很少有人研究交流信号驱动时的螺线管磁场建模。在磁光调制技术中往往采用交流信号驱动螺线管,以提供交变的磁场。文献[1-2]采用的是正弦信号驱动螺线管,但是简化了磁场的计算。文献[3-4]介绍了基于方波信号的磁光调制技术,但都是在理想情况下进行理论研究和实验探索,没有考虑到方波信号驱动时螺线管磁场的畸变。文献[5]介绍了方波信号磁光调制技术的优点,同时也提出了存在信号畸变的问题,但没有给出进一步的解释。本文用麦克斯韦方程组对正弦信号驱动时长螺线管的空间磁场进行求解,并将方波信号通过傅里叶级数展开成不同频率正弦信号叠加的形式,考虑到不同频率的正弦信号相互正交,各自产生的磁场互不影响,因此用此种方法处理方波信号是合理的。

## 2 原理

傅里叶级数是由法国数学家傅里叶最早发现的,任何周期函数都可以表示为正弦函数的无穷级数。设周期为  $T$  的函数  $x(t)$ ,它可以表示为无穷级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot \exp\left[ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t\right], \quad (1)$$

式中  $a_k$  表示为

收稿日期: 2015-01-23; 收到修改稿日期: 2015-03-01; 网络出版日期: 2015-08-12

基金项目: 国家自然科学基金(61102170)

作者简介: 蔡 伟(1974—),男,博士,教授,主要从事自动检测与故障诊断方面的研究。E-mail: clwn@163.com

$$a_i = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot \exp\left[-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t\right] dt. \quad (2)$$

方波信号的傅里叶级数表达式为

$$f(t) = \frac{4A_{\max}}{\pi} \left[ \sin(w_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3w_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5w_0 t) + \cdots + \frac{1}{k} \sin(kw_0 t) + \cdots \right]. \quad (3)$$

式中  $k$  为奇数,  $A_{\max}$  为方波信号的幅值,  $w_0$  为方波信号的角频率。

### 3 正弦信号螺线管磁场计算<sup>[6]</sup>

螺线管如图 1 所示, 导线内部涡旋电流会产生沿螺线管轴向的磁场  $B_z$ , 把螺线管看作一根整体的导线, 会有从左至右的电流流过, 相应地产生涡旋磁场  $B_\phi$ 。当驱动电流为交流信号时, 交变的磁场会产生感生电场。则螺线管空间的电磁场为

$$B(r, t) = B_\phi(r, t)\phi + B_z(r, t)z, \quad (4)$$

$$E(r, t) = E_\phi(r, t)\phi + E_z(r, t)z. \quad (5)$$

设长螺线管的半径为  $R$ , 导线密度为  $N$  (单位: 圈/m), 驱动信号为  $I = I_0 \exp(-i\omega t)$ ,  $I_0$  和  $\omega$  分别为电流幅值和频率, 螺线管内外的磁光玻璃介电常数为  $\varepsilon$  和 0, 磁导率为  $\mu$ 。考虑到螺线管的对称性, 电磁场的分布取决于到螺线管轴线的距离  $r$ 。

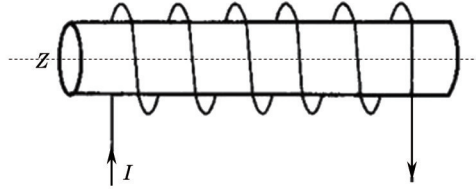


图 1 通电螺线管

Fig.1 Electric solenoid

将驱动信号  $I_0 \exp(-i\omega t)$  带入麦克斯韦方程组, 变为

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = i\omega B_\phi, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) = i\mu \varepsilon \omega E_z, \quad (7)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = i\mu \varepsilon \omega E_\phi, \quad (8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) = i\omega B_z. \quad (9)$$

消去公式中的其他变量, 只留下  $r$ , 并设  $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ 。由于在磁光调制中螺线管内部的轴向磁场对法拉第效应影响较大, 因此只考虑  $B_z$ , 得到零阶贝塞尔函数<sup>[7]</sup>

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + k^2 B_z = 0. \quad (10)$$

对于贝塞尔函数的典型求解为

$$B_{zi}(r, t) = A J_0(k_i r) \sin[-i(\omega t + \phi_i)], \quad (11)$$

式中  $B_{zi}(r, t)$  为螺线管内部轴线磁场强度值,  $A$  为磁场强度的幅值。

边界条件为

$$B_{zi}(k_i R) - B_{zo}(k_o R) = \mu_0 N I, \quad (12)$$

和

$$E_{\phi i}(k_i R) = E_{\phi o}(k_o R), \quad (13)$$

式中  $B_{zi}$ 、 $B_{zo}$  分别代表螺线管内部和外部的轴向磁场,  $E_{\phi i}$ 、 $E_{\phi o}$  分别代表螺线管内部和外部的涡旋电场。最终求得各参数

$$\phi_i = \phi_o - \delta, \quad (14)$$

$$\phi_o = \arctan \left[ \frac{k_i J_0(k_i R) N_1(k_o R) - k_o J_1(k_i R) N_0(k_o R)}{k_i J_0(k_i R) J_1(k_o R) - k_o J_1(k_i R) J_0(k_o R)} \right], \quad (15)$$

$$\delta = \arctan [N_1(k_o R) / J_1(k_o R)], \quad (16)$$

$$A = \frac{\mu_0 N I_0 [J_0(k_o R) \sin \phi_o - N_0(k_o R) \cos \phi_o]}{J_0(k_i R) [J_0(k_o R) \sin \delta - N_0(k_o R) \cos \delta]}, \quad (17)$$

式中  $J_0$ 、 $J_1$  为第一类零阶和一阶贝塞尔函数,  $N_0$ 、 $N_1$  为第二类零阶和一阶贝塞尔函数。 $k_i$ 、 $k_o$  为  $k$  值在螺线管内部和外部的取值。

幅值为  $I_0$  的正弦电流驱动时,螺线管磁场幅值为  $A$ , 衰减系数为  $J_0(k_i r)$ ,  $\phi_i$  为相移。选取磁光玻璃的相对介电常数为 4.1, 对于磁导率而言, 非磁性材料的相对磁导率为 1。则内嵌有磁光玻璃的螺线管内部和外部的介电常数  $\varepsilon$  分别是  $4.1\varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_0$ , 磁导率为  $\mu_0$ 。选取螺线管半径  $R = 0.05$  m,  $r = 0.02$  m。计算机仿真可以得到螺线管内部轴向磁场的幅值衰减和相移随驱动电流频率的变化, 如图 2 所示。仿真结果表明频率较低时, 磁场几乎没有衰减, 这是由于低频感生电场激发的附加磁场很微弱。高频时, 感生电场激发的磁场不能忽略, 被激发的磁场进一步引起感生电场, 总的磁场是螺线管电流的磁场和一系列附加磁场的叠加。

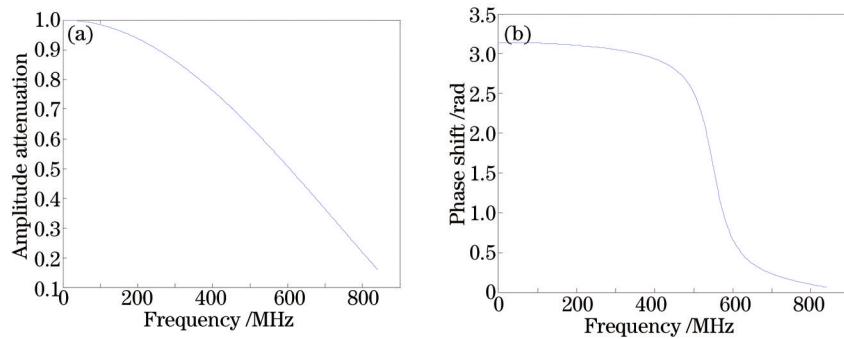


图 2 正弦信号驱动时螺线管磁场随频率的变化。(a)幅值衰减;(b)相移

Fig.2 Change of solenoid's magnetic field driven by sinusoidal signal with frequency.

(a) Amplitude attenuation; (b) phase shift

#### 4 方波信号的螺线管磁场

在傅里叶级数展开时, 选取了基频到  $10^{10}$  倍频的范围。由傅里叶级数展开的方波信号仿真结果如图 3 (a)所示。通过麦克斯韦方程组求出了长螺线管的内部磁场, 在此基础上将各个频率正弦信号产生的磁场叠加, 最后计算出方波信号的长螺线管内部磁场, 如图 3(b) 所示。

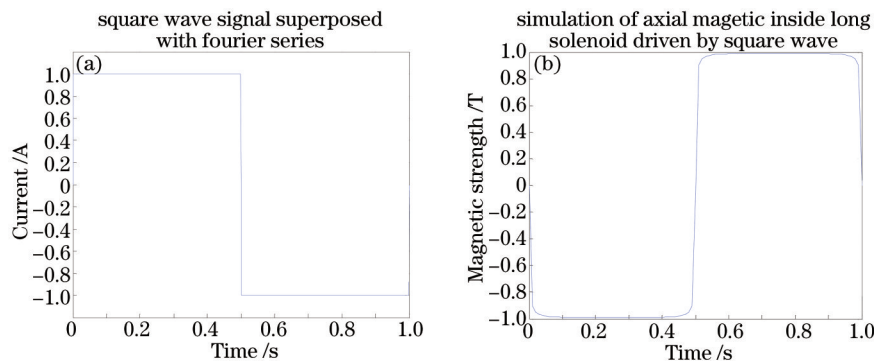


图 3 驱动信号与磁场信号的比较。(a) 傅里叶级数叠加形成的方波信号; (b) 方波信号驱动的长螺线管内部轴向磁场仿真

Fig.3 Comparison between magnetic signal and drive signal. (a) Square wave signal superposed with Fourier series;

(b) simulation of axial magnetic field inside long solenoid driven by square wave signal

通过比较可以发现标准的方波信号加载到长螺线管时, 其内部产生的磁场不再是理论上的方波, 在方波的上升沿和下降沿都会有波形的畸变。由上一节可知随着频率的升高, 正弦信号的螺线管磁场幅值会逐渐衰减, 相位也会变化, 各种频率正弦信号磁场叠加, 最终结果即信号发生畸变。

## 5 结 论

利用麦克斯韦方程建立了螺线管电磁场模型,并通过贝塞尔函数求解交变信号的螺线管磁场,在此基础上用傅里叶级数将不同频率正弦信号的磁场叠加,最终从理论上求解出方波信号驱动时长螺线管内部轴向的磁场。本文简化了磁光材料的介电常数和磁导率,实际上介电常数是和频率密切相关的材料常数,后续将进一步研究介电常数,完善长螺线管的磁场模型,找到影响磁场变化的因素,并探索如何抑制方波信号驱动时磁场的畸变。

### 参 考 文 献

- 1 Dong Xiaona. The Research on Technique of Passing Azimuth Angle Vertically[D]. Xi'an: Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2001.  
董晓娜. 方位垂直传递技术的研究[D]. 西安: 中国科学院西安光学精密机械研究所, 2001.
- 2 Yang Zhiyong, Zhou Zhaofa, Huang Xianxiang, *et al.*. An accurate method of measuring azimuth based on sine wave magneto-optic modulation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(10): 1012001.  
杨志勇, 周召发, 黄先祥, 等. 基于正弦波磁光调制的方位失调角精确测量方法[J]. *光学学报*, 2012, 32(10): 1012001.
- 3 Li Xiaojun, Li Yongan, Wang Yuanyuan, *et al.*. Magneto-optical modulation method for polarization measurement based on rectangular wave signal[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, 28(8): 1533-1537.  
李小俊, 李永安, 汪源源, 等. 基于矩形波信号的磁光调制偏振测量方法[J]. *光学学报*, 2008, 28(8): 1533-1537.
- 4 Yang Zhiyong, Huang Xianxiang, Zhou Zhaofa, *et al.*. Application of square wave magneto-optic modulation to transmitting the azimuth between equipments without mechanical connection[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(12): 1212006.  
杨志勇, 黄先祥, 周召发, 等. 方波磁光调制测量在无机连接的设备间方位传递中的应用[J]. *光学学报*, 2012, 32(12): 1212006.
- 5 Fu Zhaosen. Theory and Experimental Research of Square Wave Magneto-Optical Modulation Screening Method[D]. Xi'an: Northwestern University, 2011.  
符照森. 方波磁光调制检偏方法理论与实验研究[D]. 西安: 西北大学, 2011.
- 6 Ge Songhua. The magnetic and electric field produced by alternating current in a long solenoid[J]. *Physics and Engineering*, 2003, 13(6): 6-8.  
葛松华. 通以交变电流的长直螺线管内部磁场和电场的分布[J]. *物理与工程*, 2003, 13(6): 6-8.
- 7 Yan Zhenjun. *Mathematical Physical Equation*[M]. Hefei: University of Science and Technology Of China Press, 2002: 82-123.  
严镇军. *数学物理方程*[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2002: 82-123.

栏目编辑: 刘丰瑞