

差分格式对偏微分方程滤波模型的影响

王琳霖¹ 唐晨² 王亚杰¹

¹沈阳航空航天大学工程训练中心, 辽宁 沈阳 110136

²天津大学理学院应用物理系, 天津 300072

摘要 电子散斑干涉技术(ESPI)中,基于偏微分方程(PDE)的滤波模型是一种重要的滤波方法。偏微分方程滤波模型中的微分算符通常利用差分近似表示。给出了中心差分、九点差分、高阶差分三种不同的差分格式。以典型有效的方向二阶偏微分方程滤波模型为例,分别利用三种不同的差分格式近似滤波模型中的微分算符,通过模拟条纹图、相位图以及实验条纹图进行了分析研究,结果表明,对于密度变化特别大的条纹图,采用高阶差分格式能够更好地平衡高密度区域和稀疏密度区域的滤波效果,九点差分和中心差分格式需要使用均值滤波做进一步的处理,中心差分格式处理速度最快,高阶差分格式次之,九点差分格式则最慢。

关键词 图像处理; 偏微分方程; 差分; 电子散斑干涉技术

中图分类号 O436.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP52.091004

Impact on Partial Differential Equations Filtering Models of Difference Scheme

Wang Linlin¹ Tang Chen² Wang Yajie¹

¹Engineering Training Center, Shenyang Aerospace University, Shenyang, Liaoning 110136, China

²Department of Applied Physics, Science College, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract The partial differential equations (PDE) filtering model is an important filtering method in electronic speckle pattern interferometry (ESPI) technology. The differential operator is often approximated by difference scheme in PDE models. Three kinds of difference scheme such as central difference, nine point difference and higher difference are introduced. The representative orientation second order PDE filtering model is selected and analyzed, approximating differential operator in PDE model with three different difference schemes using simulated fringe image, simulated phase image and experiment fringe image. The result indicates the high density region and sparse density region can be balanced preferably with higher difference for large density change image. Nine point difference and central difference schemes should be deposed with average filtering. The processing rate with central difference scheme is the fastest, the higher difference takes the second place, and the nine point difference is the slowest.

Key words image processing; partial differential equation; difference scheme; electronic speckle pattern interferometry

OCIS codes 100.2000; 120.6150; 120.6160

1 引言

电子散斑干涉技术(ESPI)是一种全场、非接触的光学测试技术,渗透到科学和工程的多个领域^[1-3]。电子散斑干涉技术采用 CCD 或 TV 摄像机和电子存储器记录光强信息,以数字化的形式存入存储介质中,然而电子散斑干涉图伴有很强的颗粒性噪声,条纹的可见性和分辨率受到极大的影响,严重降低了图像的质量,干扰了计算机实现散斑图像的自动判读,给散斑图的信息提取带来了挑战。因而,去除电子散斑干涉条纹图或相位图的噪声、提高对比度是电子散斑干涉亟待解决的关键技术之一。深入研究电子散斑干涉滤波方法,提出有效的新方法、新技术,有着重要的学术意义和工程应用价值。

基于偏微分方程的图像滤波方法自上世纪八十年代开始便成为图像处理领域研究人员的一个研究热

收稿日期: 2015-01-25; 收到修改稿日期: 2015-02-27; 网络出版日期: 2015-08-12

基金项目: 国家自然科学基金(61177007)、辽宁省教育厅科学研究一般项目(L2015411)

作者简介: 王琳霖(1981—),女,博士,工程师,主要从事现代光学测试技术与光信息处理、图像处理等方面的研究。

E-mail: wlin_23@163.com

点^[4]。该滤波模型在电子散斑干涉条纹图或包裹相位图的滤波方法中占据着重要地位,从最早的偏微分方程(PDE)图像滤波模型——各向同性的常系数热传导方程^[5],到第一个具有方向性的偏微分方程滤波模型——P-M模型^[6],进而发展到选择平滑模型^[7]、耦合偏微分方程模型^[8]、退化扩散偏微分方程模型^[9]等等。课题组对ESPI中的几种非方向性滤波模型以及两个方向性偏微分方程滤波模型进行了分析比较^[10]。非方向的PDE滤波模型适合于普通密度的散斑条纹图或相位图,方向PDE滤波模型适合于高密度或变密度的散斑条纹图或相位图。在方向PDE滤波模型中,扩散只沿着条纹的方向进行,因此滤波时条纹的边缘得到了保持。其中的方向二阶退化扩散偏微分方程滤波模型(OSOPDE)是一种具有代表性的滤波模型^[11]。

上述偏微分方程滤波模型中包含有若干个微分算符,在实际的数字图像处理过程中,微分运算通常采用图像的差分来近似,即用相邻两个或者多个数值点的差分取代偏微分方程中导数或者偏导数。采用不同的构造方法可以建立不同的差分格式。差分格式的不同,势必会在求解偏微分方程问题的过程中产生不同的效果。

本文以方向二阶退化扩散偏微分方程滤波模型为基础,研究不同差分格式对滤波结果的影响,同时给出不同差分格式的最大时间步长。

2 OSOPDE 滤波模型及差分格式的构造

2.1 OSOPDE 滤波模型

基于变分法,方向二阶偏微分方程滤波模型可表示为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} \cos^2 \theta + u_{yy} \sin^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta, \quad (1)$$

式中 $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, θ 是条纹方向与 x 轴的夹角。

与控制扩散速度相结合,可得到方向性退化扩散二阶偏微分方程滤波模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla u|)(u_{xx} \cos^2 \theta + u_{yy} \sin^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta), \quad (2)$$

式中函数 $g(\cdot)$ 由拉普拉斯图像确定,并采用如下的形式:

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + (|\nabla u|/k)^2}. \quad (3)$$

该滤波模型适合于高密度或变密度的散斑条纹图或相位图,是一种有效的偏微分方程滤波模型。

2.2 三种差分格式的构造

常用的差分格式有中心差分、九点差分和高阶差分法。

2.2.1 中心差分

对于一幅数字图像 $u(x, y)$, 中心差分格式采用如图1的空间差分。

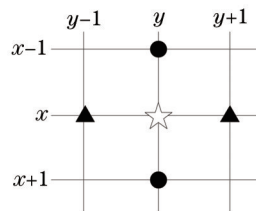


图1 中心差分

Fig.1 Central difference

图1中●标示的点代表 x 向差分,▲标示的点代表 y 向差分。

$$\begin{cases} (u)_x = \frac{u(x+1, y) + u(x-1, y)}{2} \\ (u)_y = \frac{u(x, y+1) + u(x, y-1)}{2} \\ (u)_{xx} = u(x+1, y) + u(x-1, y) - 2u(x, y) \\ (u)_{yy} = u(x, y+1) + u(x, y-1) - 2u(x, y) \\ (u)_{xy} = \frac{u(x+1, y+1) - u(x-1, y+1) - u(x+1, y-1) + u(x-1, y-1)}{4} \end{cases} \quad (4)$$

2.2.2 九点差分

数字图像的九点差分格式^[12]采用如图2的定义。

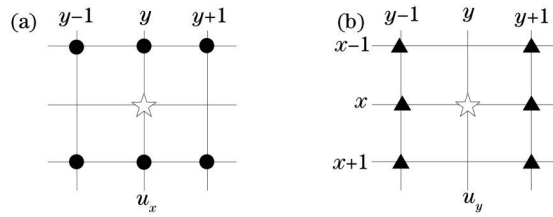


图2 九点差分

Fig.2 Nine point difference

$$\left\{ \begin{array}{l} (u)_x = \frac{2[u(x+1, y) - u(x-1, y)] + u(x+1, y+1) - u(x-1, y+1) + u(x+1, y-1) - u(x-1, y-1)}{4} \\ (u)_y = \frac{2[u(x, y+1) - u(x, y-1)] + u(x+1, y+1) - u(x+1, y-1) + u(x-1, y+1) - u(x-1, y-1)}{4} \\ (u)_{xx} = \frac{2[u_x(x+1, y) - u_x(x-1, y)] + u_x(x+1, y+1) - u_x(x-1, y+1) + u_x(x+1, y-1) - u_x(x-1, y-1)}{4} \\ (u)_{yy} = \frac{2[u_y(x, y+1) - u_y(x, y-1)] + u_y(x+1, y+1) - u_y(x+1, y-1) + u_y(x-1, y+1) - u_y(x-1, y-1)}{4} \\ (u)_{xy} = \frac{2[u_x(x, y+1) - u_x(x, y-1)] + u_x(x+1, y+1) - u_x(x+1, y-1) + u_x(x-1, y+1) - u_x(x-1, y-1)}{4} \end{array} \right. \quad (5)$$

2.2.3 高阶差分

一幅图像 $u(x, y)$ 的高阶差分格式^[13]定义如图3。

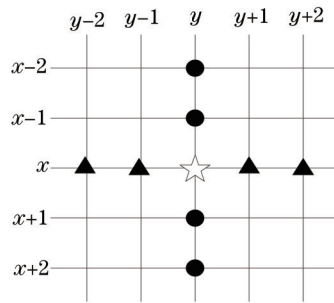


图3 高阶差分

Fig.3 Higher difference

$$\left\{ \begin{array}{l} (u)_x = \frac{u(x-2, y) - 8u(x-1, y) + 8u(x+1, y) - u(x+2, y)}{12} \\ (u)_y = \frac{u(x, y-2) - 8u(x, y-1) + 8u(x, y+1) - u(x, y+2)}{12} \\ (u)_{xx} = \frac{-u(x-2, y) + 16u(x-1, y) - 30u(x, y) + 16u(x+1, y) - u(x+2, y)}{12}, \\ (u)_{yy} = \frac{-u(x, y-2) + 16u(x, y-1) - 30u(x, y) + 16u(x, y+1) - u(x, y+2)}{12} \\ (u)_{xy} = \frac{u_x(x, y-2) - 8u_x(x, y-1) + 8u_x(x, y+1) - u_x(x, y+2)}{12} \end{array} \right. \quad (6)$$

3 不同差分格式的滤波模型在电子散斑干涉图中的应用

方向偏微分方程滤波模型因为考虑了条纹的方向,使扩散沿着条纹方向进行,因此在处理高密度或变密度电子散斑干涉条纹图或相位图时具有一定的优势。二阶方向偏微分方程滤波模型是一个具有代表性的方向滤波模型,对高密度或变密度 ESPI 条纹图和相位图的处理具有独特的优势。下面以二阶方向偏微分方程滤波模型为例,分析中心差分、九点差分和高阶差分格式对滤波结果的影响。其中 $g(\cdot)$ 函数的 $k=0.0001$ 。

图4是一幅计算机模拟的变密度条纹图及相应的滤波结果,(a)是模拟噪声条纹图,(b1)是中心差分滤波结果, $\Delta t=0.1$, $n=400$, (b2)是对应的黑条纹骨架线。(c1)是九点差分滤波结果, $\Delta t=0.5$, $n=100$, (c2)是对应的黑条纹骨架线。(d1)是高阶差分的滤波结果, $\Delta t=0.2$, $n=700$, (d2)是对应的黑条纹骨架线。(e1)是高级差分的滤波结果, $\Delta t=0.35$, $n=400$, (e2)是对应的黑条纹骨架线。

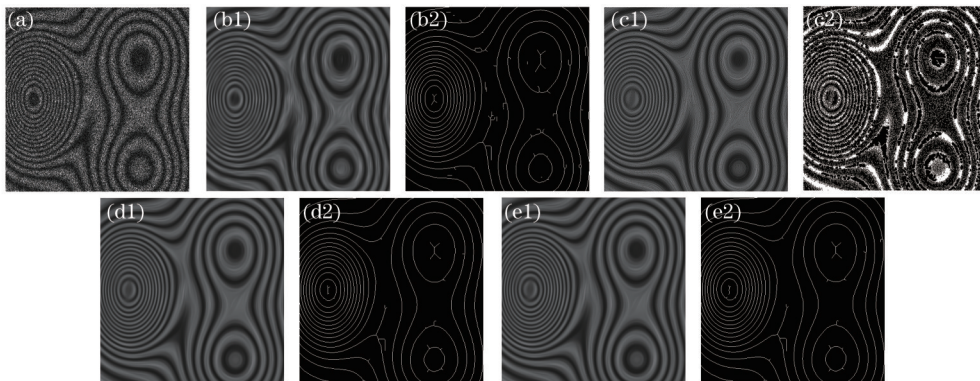


图4 不同差分格式的ESPI条纹图滤波结果

Fig.4 Filtered images with different difference

显然,除高阶差分格式外,中心差分格式的滤波模型在稀疏条纹区域的滤波不是很充分,所提取的骨架线略微带有毛刺,而九点差分格式的滤波模型滤波结果所提取骨架线极不理想,因此需用均值滤波对它们的滤波结果做进一步处理,然后再提取骨架线。图5是分别对图4(b1)和图4(c1)均值滤波2次和3次后的滤波结果及其对应的黑条纹骨架线。

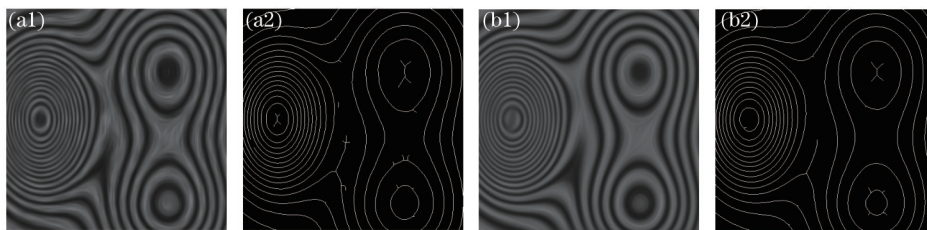


图5 均值滤波再处理的滤波结果。(a1)对图4(b1)均值滤波;(a2)图4(a1)的骨架线;(b1)对图4(c1)均值滤波;(b2)图4(b1)的骨架线

Fig.5 Filtered images with average filtering. (a1) Average filtering of Fig.4 (b1); (a-2) black skeleton of Fig.5 (a1); (b1) average filtering of Fig.4 (c1); (b2) black skeleton of Fig.5 (b1)

图6是一幅计算机模拟的高密度相位图的滤波结果,仍然以方向二阶偏微分方程模型为滤波模型。(a)是模拟噪声相位图,(b)是中心差分的滤波结果, $\Delta t=0.02$, $n=300$, (c)是高级差分的滤波结果, $\Delta t=0.2$, $n=150$, (d1)是九点差分的滤波结果, $\Delta t=0.2$, $n=150$, (d2)是对(d1)均值滤波2次的结果。

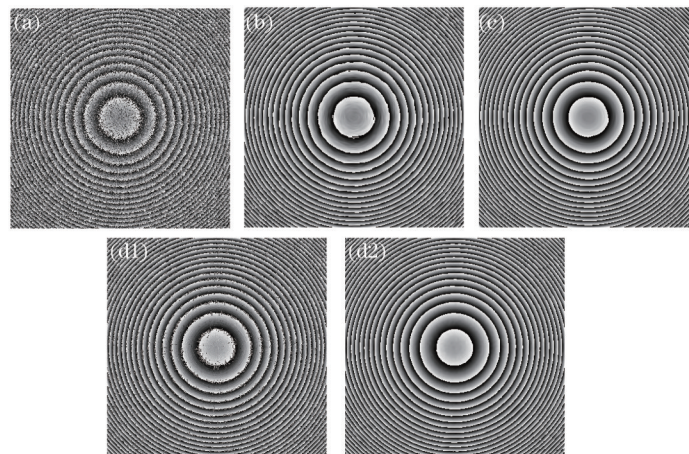


图6 不同差分格式的ESPI相位图滤波

Fig.6 Filtered images with different difference

图7是一幅实验获得的变密度条纹图及相应的滤波结果,(a)是实验条纹图,(b1)是中心差分滤波结果, $\Delta t = 0.5$, $n = 1000$,(b2)是对应的黑条纹骨架线。(b3)是对(b1)均值滤波5次的结果,(b4)是对应的黑条纹骨架线。(c1)是九点差分的滤波结果, $\Delta t = 0.35$, $n = 1000$,(c2)是对应的黑条纹骨架线,(c3)是对(c1)均值滤波5次的结果,(c4)是(c3)对应的黑条纹骨架线,(d1)是九点差分的滤波结果, $\Delta t = 0.35$, $n = 3000$,(d2)是对应的黑条纹骨架线,(e1)中心差分滤波结果, $\Delta t = 0.5$, $n = 3000$,(e2)是对应的黑条纹骨架线。

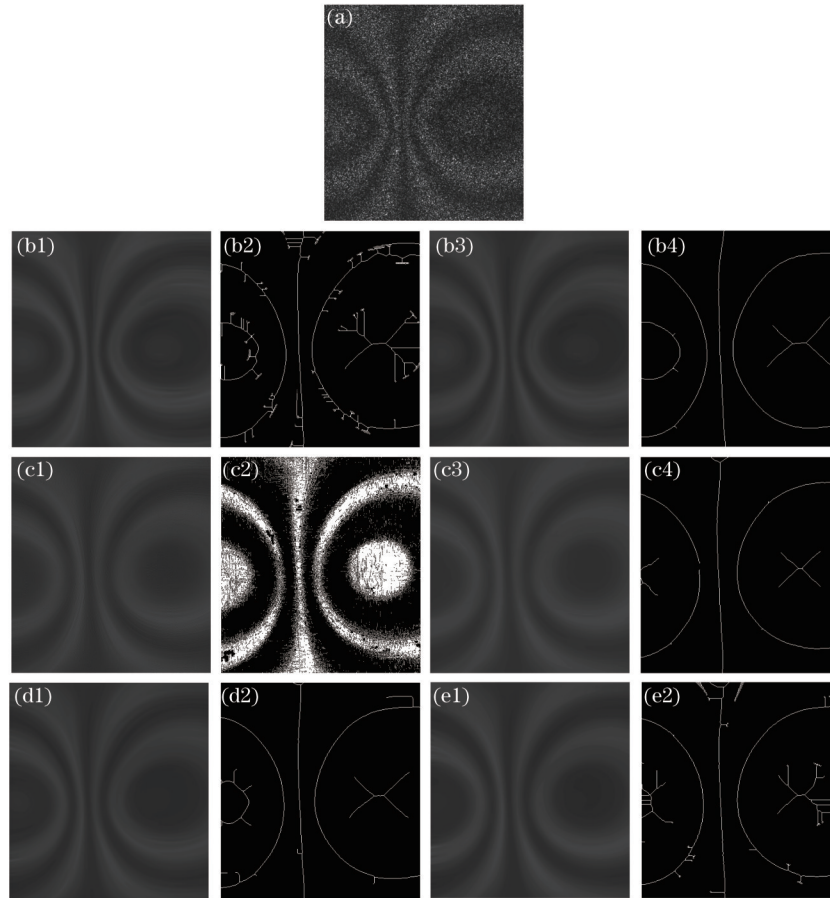


图7 实验条纹图滤波结果

Fig.7 Filtered images of experiment image

由上述实验发现:

1) 对于密度变化较大的条纹图,高阶差分格式能够更好地平衡高密度区域和稀疏密度区域的滤波效果,九点差分格式和中心差分格式在保证高密度条纹区域滤波效果的前提下,需要使用均值滤波做进一步的处理来提高对稀疏条纹密度区域的滤波效果。

2) 九点差分格式虽然也能较好地保持条纹边缘,但不能完全去除噪声,因此也需要使用均值滤波做再处理。

3) 在计算速度上,中心差分格式处理速度最快,高阶差分格式次之,九点差分格式则最慢。

在研究不同差分格式对滤波结果的影响的同时,对离散时间步长也做了分析。对于方向二阶偏微分方程模型来说,中心差分格式的最大时间步长可以达到0.51,九点差分格式为0.51,而高阶差分格式则为0.36。因此,高阶差分格式可以选择允许范围内的较大时间步长但不会模糊细密条纹区域的边缘,中心差分则需要小的迭代步长。

由于时间步长和迭代次数共同决定滤波结果,因此,在处理稀疏密度或密度变化不太大的图像时,中心差分和九点差分可以用大的时间步长和少的迭代次数完成,高阶差分因为允许的最大时间步长较小,所以需要较多的迭代次数。

4 结 论

对用于近似偏微分方程滤波模型中微分算符的差分格式进行了研究,以方向二阶偏微分方程滤波模型为例,分析了中心差分、九点差分和高阶差分对滤波结果的影响,总结了各差分格式的特点。对于一般的变密度 ESPI 条纹图或包裹相位图,通常可以采用简单方便的中心差分格式,而对于密度变化比较大的图像,可采用高阶差分格式。同时给出了方向二阶偏微分方程滤波模型采用三种不同差分格式时的最大时间步长。

参 考 文 献

- 1 Wang Kaifu. Modern Optical Measurement and Image Processing[M]. Beijing: Science Press, 2012: 100-110.
王开福. 现代光测及其图像处理[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 100-110.
- 2 Tong Jingwei, Li Hongqi. Optical Mechanical Principle and Testing Technology[M]. Beijing: Science Press, 2009: 139-150.
佟景伟, 李鸿琦. 光学原理及测试技术[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 139-150.
- 3 Jin Guanchang. Computer Aided Optical Measurement[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 105-126.
金观昌. 计算机辅助光学测量[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 105-126.
- 4 Tang Chen, Ren Hongwei, Chen Xia, *et al.*. Review and trends of image processing method based on partial differential equations for electronic speckle pattern interferometry[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2010, 47(2): 021201.
唐 晨, 任宏伟, 陈 霞, 等. 电子散斑干涉条纹处理偏微分方程方法的回顾与展望[J]. 激光与光电子学进展, 2010, 47(2): 021201.
- 5 A P Witkin. Scale-space filtering[J]. Proceedings of International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1983: 1019-1021.
- 6 P Perona, J Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Trans Pattern Anal Machine Intell, 1990, 12(7): 629-639.
- 7 F Catté, P L Lions, J M Morel, *et al.*. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182-193.
- 8 Y Chen, C A Z Barcelos, B A Mairz. Smoothing and edge detection by time-varying coupled nonlinear diffusion equations [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2001, 82(2): 85-100.
- 9 L Alvarez, P L Lions, J M Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion · II[J]. SIAM J Numer Anal, 1992, 29(3): 845-866.
- 10 Chen Tang, Linlin Wang, Haiqing Yan. Overview of anisotropic filtering methods based on partial differential equations for electronic speckle pattern interferometry[J]. Appl Opt, 2012, 51(20): 4916-4926.
- 11 C Tang, L Han, H Ren, *et al.*. Second-order oriented partial-differential equations for denoising in electronic-speckle-pattern interferometry fringes[J]. Opt Lett, 2008, 33(19): 2179-2181.
- 12 Dhananjay R Panchagade. Damage Prediction of Lead Free Ball Grid Array Packages under Shock and Drop Environment [D]. Alabama: Auburn University, 2007.
- 13 Ta-Hsuan Lin. Assembly Process Development, Reliability and Numerical Assessment of Copper Column Flexible Flip Chip Technology[D]. New York: Binghamton University, 2008.

栏目编辑: 刘丰瑞