

视觉标定中圆心投影点精确定位

刘子腾 白瑞林 王秀平

江南大学轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122

摘要 根据射影变换中的交比不变性原理以及几何约束条件提出一种能够独立从单个圆的投影图像中精确定位圆心投影点的方法。任取圆上的割线,由调和共轭和交比不变的性质得到割线中点与无穷远点在图像中对应的投影点之间的关系。根据几何约束建立包含割线中点参量的方程组求解割线中点,进而得到圆心投影点的位置。相比在图像中直接将投影椭圆中心作为圆心投影点,该方法不存在投影误差。仿真实验结果表明该方法的精度与稳定性均优于椭圆中心法。实际实验结果表明该方法提取的圆心位置与利用多个圆之间关系提取的圆心位置一致,最大位置误差不超过 0.8 pixel。该方法能够独立定位单个投影圆的圆心,适用范围更加广泛。

关键词 图像处理; 圆心投影点; 射影几何; 相机标定

中图分类号 TP317.4

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP52.091001

Accurate Location of Projected Circular Center in Visual Calibration

Liu Ziteng Bai Ruilin Wang Xiuping

Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, China

Abstract A method to accurately locate projected center point from single circle image is proposed based on cross-ratio invariance principle and geometric constraint conditions in projective transformation. Take arbitrary circle secants, the relationship between the secant midpoint and the point at infinity is clear according to the harmonic conjugates and cross-ratio invariance. The equations which contain parameters of secant midpoints are established for solving secant midpoints based on the geometric constraints. Then the position of projected circular center is calculated. Compared with taking the center of projected ellipse as the center point directly, the proposed method does not have projection error. Simulation experiment results show that the accuracy and stability of the method is superior to the method of extracting ellipse's center. The results of actual experiment show that the circular center positions are consistent with the positions extracted from the relationship among multiple circles, and the maximum position error does not exceed 0.8 pixel. The proposed method can locate the center of a single projected circle independently, which is suitable for wider applications.

Key words image processing; projected circular center; projective geometry; camera calibration

OCIS codes 100.2000; 100.2960; 100.4995

1 引言

圆形图案广泛应用于相机标定以及其他视觉系统的标定^[1,2],圆心通常是重要的特征点。与提取棋盘格图案的角点相比,圆心提取具有稳定性高的特点,能够适用于干扰噪声大、图像模糊的场合。但是,很难从投影图像中精确定位圆心投影位置,而特征点定位精度将直接影响最终的标定精度。靶标上的圆在相机成像平面上的投影一般为椭圆,并将椭圆中心通常作为圆心的投影点^[3]。实际由于不对称投影,圆心投影点与投影椭圆中心并不重合,上述方法存在投影误差^[4]。文献[5]从一对同心圆内的任一点出发,逐步迭代收敛至圆心投影点。文献[6]根据对称性构造几何约束确定同心圆的圆心投影点。文献[7-8]将圆心投影点提取与相机标定结合,反复迭代提高圆心投影点定位精度,但是计算量较大。文献[9-10]根据相邻圆点之间的关系

收稿日期: 2015-03-02; 收到修改稿日期: 2015-04-23; 网络出版日期: 2015-08-18

基金项目: 江苏省产学研前瞻性联合研究项目(BY2012056)、江苏高校优势学科建设工程资助项目(PAPD)

作者简介: 刘子腾(1989—),男,硕士研究生,主要从事计算机视觉方面的研究。E-mail: lzt.89@163.com

导师简介: 白瑞林(1955—),男,教授,博士生导师,主要从事图像处理与机器人方面的研究。

E-mail: bairuilin@hotmail.com

确定连接圆心投影点的直线,取连线交点作为圆心投影点的位置,但是该方法需要至少三个不在同一直线上的圆,而在某些自标定方法中^[11],靶标图案只是单个圆形。

根据射影变换中的不变量关系以及几何约束条件提出一种能够独立从单个圆的投影图像中精确定位圆心投影点的方法。该方法既可以定位多个圆的圆心,又可以定位单个圆的圆心,具有更好的适用性。

2 数学模型

2.1 圆在相机成像平面的投影模型

将圆形图案所在的平面作为世界坐标系的 $X-Y$ 平面,令世界坐标系的 Z 轴垂直于该平面,将圆心作为世界坐标系的原点。则圆在世界坐标系 $X-Y$ 平面的方程为 $x^2 + y^2 = r^2$, 其中 r 为半径。写成矩阵 C 为

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (1)$$

设相机内参数矩阵为 m , 外参数矩阵为 M 。 m 与 M 的乘积称为单应性矩阵, 记为 H 。根据射影几何理论, 圆在相机成像平面 (u, v) 的投影椭圆方程的矩阵表示为 E ^[12]:

$$\begin{cases} m \cdot M = H \\ E = H^{-T} C H^{-1} \\ \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}. \quad (2)$$

2.2 射影几何有关知识

2.2.1 射影不变量

世界坐标系平面中共线的 4 个点 p_1, p_2, p_3, p_4 形成的交比 $(p_1, p_2; p_3, p_4)$ 是射影变换的不变量, 即这 4 点的投影点 p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 形成的交比 $(p'_1, p'_2; p'_3, p'_4)$ 等于 $(p_1, p_2; p_3, p_4)$ 。另外, 直线的投影依旧是直线。特别是, 圆的切线在成像平面的投影依然与投影椭圆相切^[6]。

2.2.2 调和共轭

当 $(p_1, p_2; p_3, p_4) = -1$ 时, 称 p_1, p_2 与 p_3, p_4 成调和共轭。若 p_3 为 p_1, p_2 的中点, p_4 为 p_1, p_2 所在直线方向上的无穷远点, 则 p_1, p_2, p_3, p_4 成调和共轭。可以将 p_3, p_4 分别表示为

$$\begin{cases} p_3 = p_1 + \lambda_1 p_2 \\ p_4 = p_1 + \lambda_2 p_2 \end{cases}, \quad (3)$$

根据交比的计算公式 $(p_1, p_2; p_3, p_4) = \lambda_1 / \lambda_2$ 。因此, 若 p_1, p_2, p_3, p_4 成调和共轭, 则有 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 。

2.2.3 无穷远直线投影方程

世界坐标系内圆所在平面的无穷远直线方程为 $l_\infty = [0, 0, 1]^T$, 其在成像平面上的投影直线方程为 $l'_\infty = H^{-T} l_\infty = H^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。圆心 O 在成像平面的投影点为 $O' = HO$ 。根据(2)式, 投影椭圆方程 E 与圆心投影点 O'

的乘积为

$$EO' = H^{-T} C H^{-1} H O = H^{-T} C O = H^{-T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = H^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

EO' 与 l'_∞ 在相差一个比例因子的前提下相等, 所以无穷远直线的投影方程可以由投影椭圆方程与圆心投影点的乘积计算得到。

3 圆心投影点定位算法

3.1 投影椭圆方程拟合

对相机拍摄的灰度图像, 首先用大津法得到二值分割阈值, 将图像二值化。由于靶标图案通常是白底黑圆, 为了方便起见, 将二值图像倒转, 属于投影椭圆区域内的像素标记为 1。提取连通域后执行 Moore 边界跟踪算法^[13], 得到图像中投影椭圆的边界点集合。

根据提取的边界点集合,采用文献[14]中的方法拟合椭圆方程,得到一般形式的椭圆方程 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 。写成矩阵形式 E 为

$$E = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}. \quad (5)$$

3.2 几何约束关系

在图像中取投影椭圆边界上3个点 A, B, C 如图1所示,它们之间的连线是靶标平面上的圆的弦在成像平面的投影。设 M_1, M_2, M_3 分别是对应弦的中点在成像平面的投影点。作投影椭圆在 A, B, C 三点的切线,它们的交点分别为 T_1, T_2, T_3 。根据对称性,圆切线的交点与对应弦的中点的连线通过圆心。投影过程不改变这一性质。因此,切线交点 T_1, T_2, T_3 与对应中点投影 M_1, M_2, M_3 的连线必然交于一点,该点就是圆心在成像平面的投影点。为了使以 T_1, T_2, T_3 为顶点的三角形能够成为投影椭圆的外切三角形,可以在椭圆的边界上等间隔地选取 A, B, C 三点。

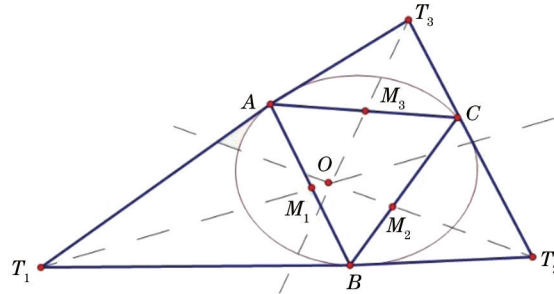


图1 几何约束关系

Fig.1 Geometric constraint relation

因为直线的投影依然是直线,所以圆所在平面的无穷远直线在成像平面的投影是一条有限直线。所有无穷远点都在无穷远直线上,因此,这三条弦所在直线方向上的无穷远点在成像平面的投影点共线,且在无穷远直线的投影直线上。

3.3 计算圆心投影点

设 A, B, C 在图像中的齐次坐标分别为 $(x_1, y_1, 1), (x_2, y_2, 1), (x_3, y_3, 1)$, 令 M_1, M_2, M_3 的齐次坐标为

$$\begin{cases} M_1: A + aB = (x_1 + ax_2, y_1 + ay_2, 1 + a) \\ M_2: B + bC = (x_2 + bx_3, y_2 + by_3, 1 + b), \\ M_3: C + cA = (x_3 + cx_1, y_3 + cy_1, 1 + c) \end{cases} \quad (6)$$

式中 a, b, c 为未知参量。根据2.2.2节可知,各割线方向的无穷远点在成像平面的投影点坐标为

$$\begin{cases} p_\infty^1: A - aB = (x_1 - ax_2, y_1 - ay_2, 1 - a) \\ p_\infty^2: B - bC = (x_2 - bx_3, y_2 - by_3, 1 - b). \\ p_\infty^3: C - cA = (x_3 - cx_1, y_3 - cy_1, 1 - c) \end{cases} \quad (7)$$

在射影平面中两点连线方程的系数向量为这两点的齐次坐标向量的叉积,两条直线交点的齐次坐标为直线方程系数向量的叉积。投影椭圆切线交点的齐次坐标 T_1, T_2, T_3 均为已知量,它们与各对应割线中点连线方程的系数向量为

$$\begin{cases} l_1 = T_1 \times M_1 \\ l_2 = T_2 \times M_2, \\ l_3 = T_3 \times M_3 \end{cases} \quad (8)$$

由几何约束条件, l_1, l_2, l_3 三线共点,则:

$$l_2^T [l_1 \times l_3] = 0, \quad (9)$$

又因为各无穷远点的投影点共线,则:

$$p_\infty^2 [p_\infty^1 \times p_\infty^3] = 0, \quad (10)$$

l_1, l_2 的交点即为圆心投影点 O' , $O' = l_1 \times l_2$ 。由(4)式可知,无穷远直线投影方程为

$$l'_z = EO' = E \cdot [l_1 \times l_2], \quad (11)$$

因为 p_z^3 在 l'_z 上, 可得:

$$l'_z \cdot p_z^3 = 0. \quad (12)$$

将(9),(10),(12)式联立得到包含 a, b, c 三个未知数的非线性方程组, 用 Levenberg-Marquardt 优化算法求解此非线性方程组得到 a, b, c 的值。将 a, b, c 带入 l_1, l_2, l_3 的表达式即得到通过圆心投影点的直线方程。为了提高结果的精度以及稳定性, 在椭圆边界上取多组不同的点计算得到多条通过圆心投影点的直线, 用 Hough 变换法求交点作为圆心投影点。

综上, 算法的步骤为

- 1) 在投影椭圆的边界上选取三点, 计算椭圆切线以及切线交点;
- 2) 求包含未知参量的弦中点投影点的表达式;
- 3) 根据 3.2 节的几何约束条件构造方程组;
- 4) 解方程组得到各参量的值, 从而得到通过圆心投影点的直线方程;
- 5) 取多组不同的边界点重复以上步骤得到多条通过圆心投影点的直线, 用 Hough 变换法确定交点。

4 实验验证

4.1 仿真实验

计算机生成的投影椭圆仿真图像如图 2 所示, 大小为 640 pixel×480 pixel。平面圆半径设为 30 mm。相机内参数矩阵设置为

$$m = \begin{bmatrix} 3000 & 0 & 320 \\ 0 & 3000 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

相机与圆的位置关系为: 相机先绕世界坐标系的 X 轴旋转 45° , 再绕 Z 轴旋转 60° , 最后沿 X, Y, Z 轴分别平移 20, 20, 600 mm。加入均值为 0, 标准差为 0.5 的高斯白噪声, 用 5×5 的模板模糊仿真图像。

各切线交点与对应割弦中点的连线如图 3 所示, 用 Hough 变换法确定交点作为圆心投影点。将结果与提取的投影椭圆中心点和实际圆心投影点比较, 如表 1 所示。

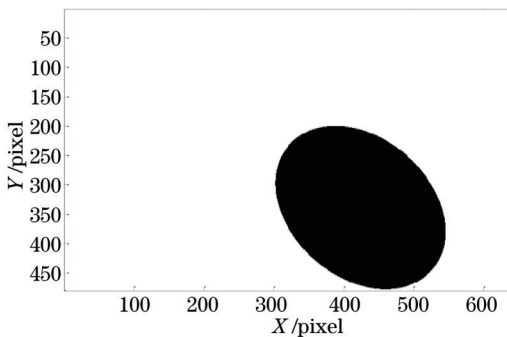


图 2 投影椭圆

Fig.2 Projected ellipse

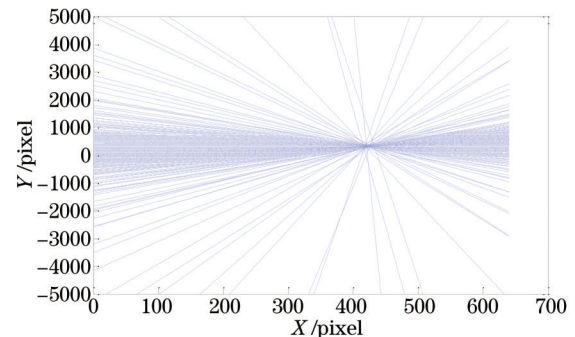


图 3 切线交点与割弦中点的连线

Fig.3 Lines connecting tangent intersection points and midpoints of cut string

表 1 圆心投影点比较

Table 1 Comparison of projected center points

	X coordinate /pixel	Y coordinate /pixel	Error /pixel
Ground truth	420	340	/
Ellipse center	423.37	338.24	3.80
Proposed method	421	339.58	1.08

从表 1 中可以看到, 利用本文算法提取的圆心投影点的误差为 1.08 pixel, 比直接提取椭圆中心误差减少 2.72 pixel。误差产生的主要原因为求解非线性约束方程组得到的最优解与实际值之间存在一定的误差以及根据 Hough 变换法确定多条直线的交点也会存在一定的误差。

保持其他参数不变,改变仿真参数中圆的半径,计算不同半径情况下计算值与真实值的绝对误差以及椭圆中心与真实值的绝对误差,如图4所示。从图4中可以看到,随着半径的增加椭圆中心法的定位误差呈不断增大的趋势,而本文方法的误差变化较为稳定,且精度优于椭圆中心法。

圆半径固定为20 mm,改变仿真参数中相机绕X轴偏转的角度,计算不同角度情况下计算值与真实值的绝对误差以及椭圆中心与真实值的误差,如图5所示。从图5中可以看到,随着投影角度的增大,椭圆中心法的误差呈先增大后减小的趋势,在45°左右误差最大。而本文方法的误差变化相对稳定,变化范围在0.6 pixel以内,且定位精度优于椭圆中心法。

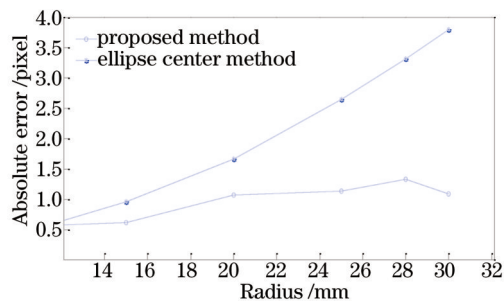


图4 误差与半径的关系

Fig.4 Relationship between error and radius

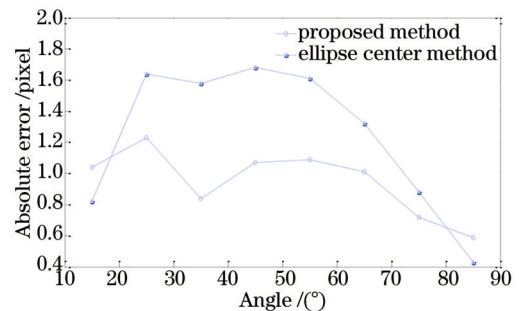


图5 误差与角度的关系

Fig.5 Relationship between error and angle

4.2 实际实验

为了考察本文方法对实际采集图像中的圆心投影点的定位精度,用分辨率为640 pixel×480 pixel的Imaging Source CMOS工业相机拍摄包含有4个标准圆的平面靶标,如图6所示。

在有多个圆点的条件下,将本文方法提取的圆心位置与文献[9,10]中计算圆心连线求交点的方法提取的圆心位置作比较。对多个圆点的处理策略是把每个圆点分开单独处理,彼此不受影响。

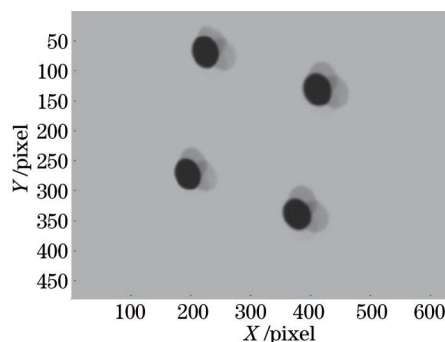


图6 多圆点图像

Fig.6 Image of multi dots

根据本文方法提取的各圆心位置与根据文献[9-10]中的连线交点法提取的各圆心位置作比较,如表2所示。从表2中可以看到,本文方法计算的结果与文献[9-10]方法计算的结果基本一致,最大距离误差在0.8 pixel以内。说明本文方法的精度与需要多个圆形的圆心连线交点法的精度基本一致,但是本文方法能够独立定位单个圆的圆心,适用性更广。

表2 多个圆点圆心坐标提取

Table 2 Coordinates extraction of multi circular centers

Number	Proposed method /pixel	Ref.[9-10] method /pixel	Error /pixel
1	(225,67.93)	(225.13,68.11)	0.22
2	(379,338.64)	(378.28,338.93)	0.78
3	(195,273.48)	(195.60,273.07)	0.73
4	(412,130.87)	(412.42,131.18)	0.52

5 结 论

提出了一种从图像中精确提取圆心投影点的方法。根据射影几何中的不变量关系以及几何约束,计算

圆形图案割线中点在图像中的投影点位置,进而得到圆心投影点位置。与传统的以投影椭圆中心或者质心作为圆心投影点的方法相比,该方法不存在投影误差,精度较高。与利用多个圆形图案求中心连线交点的方法相比,该方法能够单独处理单个圆,可以应用于多种标定方法,适用性更广。该算法主要的时间消耗在于求解非线性约束方程组,未来可以进一步研究加快求解速度的相关算法。

参考文献

- 1 Xia Renbo, Liu Weijun, Zhao Jibin, *et al.*. Fully automatic camera calibration method based on circular markers[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2009, 30(2): 368-373.
夏仁波, 刘伟军, 赵吉宾, 等. 基于圆形标志点的全自动相机标定方法[J]. 仪器仪表学报, 2009, 30(2): 368-373.
- 2 Wu Fanlu, Liu Jianjun, Ren Xin, *et al.*. Deep space exploration panoramic camera calibration technique based on circular markers[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(11): 1115002.
吴凡路, 刘建军, 任鑫, 等. 基于圆形标志点的深空探测全景相机标定方法[J]. 光学学报, 2013, 33(11): 1115002.
- 3 Xia Ruixue, Lu Rongsheng, Liu Ning, *et al.*. A method of automatic extracting feature point coordinates based on circle array target[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(16): 1906-1910.
夏瑞雪, 卢荣胜, 刘宁, 等. 基于圆点阵列靶标的特征点坐标自动提取方法[J]. 中国机械工程, 2010, 21(16): 1906-1910.
- 4 Chen Xinyu, Ma Zi, Hu Ying, *et al.*. A new method for accurate location of concentric circles in visual measurement[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2013, 24(8): 1524-1528.
陈新禹, 马孜, 胡英, 等. 视觉测量中圆形标记点的高精度定位[J]. 光电子·激光, 2013, 24(8): 1524-1528.
- 5 Jiang G, Quan L. Detection of concentric circles for camera calibration[C]. ICCV 2005. Tenth IEEE International Conference on. 2005. IEEE, 2005, 1: 333-340.
- 6 Ying X H, Zha H B. An efficient method for the detection of projected concentric circles[C]. IEEE International Conference on Image Processing, 2007.
- 7 Heikkila J. Geometric camera calibration using circular control points[J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 2000, 22(10): 1066-1077.
- 8 Liu Quan, Su Hang. Camera calibration based on correction of asymmetric circle center projection[J]. Optics and Precision Engineering, 2009, 17(12): 3103.
刘泉, 苏杭. 圆心不对称投影修正的相机标定[J]. 光学精密工程, 2009, 17(12): 3103.
- 9 Chen X, Zhao Y. A linear approach for determining camera intrinsic parameters using tangent circles[J]. Multimedia Tools and Applications, 2014: 1-15.
- 10 Zhao Z, Wei Z, Zhang G. Estimation of projected circle centers from array circles and its application in camera calibration[C]. Second Asia-Pacific Conf on Computational Intelligence and Industrial Application. 2009: 182-185.
- 11 Hu Peicheng, Li Ning, Zhou Jianjiang. Improved camera self-calibration method based on circular points[J]. Opto-Electronic Engineering, 2007, 34(12): 54-60.
胡培成, 黎宁, 周建江. 一种改进的基于圆环点的摄像机自标定方法[J]. 光电工程, 2007, 34(12): 54-60.
- 12 Wu Fuchao. Mathematical Methods in Computer Vision[M]. Beijing: Science Press, 2008.
吴福朝. 计算机视觉中的数学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- 13 Gonzalez R C, R E Woods. Digital Image Processing[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2002.
- 14 Fitzgibbon A, Pilu M, Fisher R B. Direct least square fitting of ellipses[J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 1999, 21(5): 476-480.

栏目编辑: 苏岑