

# 随机电磁-双曲正弦-高斯光束在大气湍流中横向偏振度的变化

赵柯莹 李晋红 赖云忠

太原科技大学物理系, 山西 太原 030024

**摘要** 以随机电磁-双曲正弦-高斯(ShG)光束作为典型的随机电磁光束,根据广义惠更斯-菲涅耳原理推导出随机电磁 ShG 光束在大气湍流中的交叉谱密度矩阵元的解析表达式,用以研究随机电磁 ShG 光束在大气湍流中的横向偏振度的变化。研究表明,随机电磁 ShG 光束在大气湍流中传输时,横向偏振度的分布随位置的不同而不同,结构常数  $C_n^2$  越小,或 Sh 部分参数  $\Omega_0$  越大,或互相关空间相关长度  $\sigma_{xy}(\sigma_{yx})$  越大,横向偏振度的分布变为双峰状、平顶状、单峰状的传输距离越长。

**关键词** 大气光学; 横向偏振度; 相干偏振性统一理论; 随机电磁双曲正弦-高斯光束

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP52.090102

## Change in the Transverse Degree of Polarization of Random Electromagnetic Sinh-Gaussian Beams Propagating in Atmospheric Turbulence

Zhao Keying Li Jinhong Lai Yunzhong

Department of Physics, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China

**Abstract** Based on the extend Huygens-Fresnel principle, the analytical expressions for cross-spectral density matrix elements of random electromagnetic Sinh-Gaussian (ShG) beams as typical stochastic electromagnetic beams propagating through atmospheric turbulence are derived, and used to study change in the transverse degree of polarization of random electromagnetic ShG beams propagating in atmospheric turbulence. It is shown that distribution of transverse degree of polarization varies with location when random electromagnetic ShG is propagating in atmospheric turbulence. The smaller the structure constant  $C_n^2$ , the larger the Sh-part parameter  $\Omega_0$ , or the bigger the spatial correlation length  $\sigma_{xy}(\sigma_{yx})$ , the longer the propagation distance of distribution of polarization into bimodal shape, flat shape, unimodal shape.

**Key words** atmospheric optics; transverse degree of polarization; unified theory of coherence and polarization; random electromagnetic Sinh-Gaussian beams

**OCIS codes** 010.1330; 260.2110; 260.5430

### 1 引言

随机电磁光束通过大气湍流传输近年来已是一个热门的研究话题,理论和实验研究表明,偏振度在自由空间中传播会发生变化,在湍流介质中也是如此<sup>[1-10]</sup>。1994年,James<sup>[1]</sup>首次提出光束通过自由空间传播时,偏振度会发生变化。此后 Krotkova 等<sup>[3]</sup>对大气湍流中传输的随机电磁光束的偏振度进行研究,指出在传输过程中其偏振度也将发生变化。1998年,Gori<sup>[11]</sup>提出用矩阵方法研究部分相干准单色光在传输中的相干偏振特性,并证实了其可行性。2003年,Wolf<sup>[12-13]</sup>提出以交叉谱密度矩阵为基础的相干偏振统一理论,

收稿日期: 2015-01-13; 收到修改稿日期: 2015-02-28; 网络出版日期: 2015-08-24

基金项目: 国家自然科学基金(61405136, 61178067)、山西省青年科技研究基金(2012021016, 2013021010-4)

作者简介: 赵柯莹(1990—),女,硕士研究生,主要从事激光在大气中相干与偏振特性方面的研究。

E-mail: zhaokayingw@163.com

导师简介: 李晋红(1980—),男,博士,副教授,主要从事激光与光通信和奇点光学等方面的研究。

E-mail: jinhongli@live.cn(通信联系人)

Roychowdhury等<sup>[4]</sup>在该理论上研究了随机电磁光束通过大气湍流时偏振度的变化。Pu<sup>[5]</sup>研究了随机电磁高斯-谢尔模型光束在自由空间中的光谱和偏振特性的变化规律,之后几年与其合作者又对部分相干光束在大气湍流中的光谱和偏振特性进行了研究<sup>[6-7]</sup>。先前的文献大多是讨论光束在大气湍流中轴上偏振度的变化<sup>[2-4,6]</sup>,Pu等<sup>[8]</sup>研究指出,随机电磁光束横向偏振度的分布对激光束在自由空间光通信中的应用有重要意义。本文基于广义惠更斯-菲涅耳原理,推导了随机电磁双曲正弦-高斯(ShG)光束在大气湍流中的交叉谱密度矩阵解析表达式。深入研究了大气湍流中折射率结构常数  $C_n^2$  和随机电磁 ShG 光束的空间相关长度  $\sigma_{ij}$  以及双曲正弦(Sh)部分参数  $\Omega_0$  对横向偏振度的影响。

## 2 理论模型

随机电磁 ShG 光束在  $z=0$  的光源处的交叉谱密度矩阵为<sup>[14]</sup>

$$\mathbf{W}^{(0)}(s_1, s_2, 0) = \begin{bmatrix} W_{xx}(s_1, s_2, 0) & W_{xy}(s_1, s_2, 0) \\ W_{yx}(s_1, s_2, 0) & W_{yy}(s_1, s_2, 0) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中

$$W_{ij}(s_1, s_2, 0) = \langle E_i^*(s_1, 0) E_j(s_2, 0) \rangle \quad (i = x, y, j = x, y), \quad (2)$$

其中,  $E_x$  和  $E_y$  表示直角坐标系  $x, y$  方向场分量,  $s_l \equiv (s_{lx}, s_{ly})$  ( $l=1,2$ ) 为  $z=0$  面的二维位置矢量, \* 为取复共轭,  $\langle \cdot \rangle$  表示取系综平均。

随机电磁 ShG 光束在  $z=0$  面的交叉谱密度函数的矩阵元  $W_{ij}(s_1, s_2, 0)$  表示为

$$W_{ij}(s_1, s_2, 0) = A_i A_j B_{ij} \sinh[\Omega_0(s_{1x} + s_{1y})] \exp\left[-\frac{s_{1x}^2 + s_{1y}^2}{w_0^2}\right] \sinh[\Omega_0(s_{2x} + s_{2y})] \exp\left[-\frac{s_{2x}^2 + s_{2y}^2}{w_0^2}\right] \exp\left[-\frac{(s_{1x} - s_{2x})^2}{2\sigma_{ij}^2}\right] \exp\left[-\frac{(s_{1y} - s_{2y})^2}{2\sigma_{ij}^2}\right], \quad (3)$$

式中  $A_i$  为电场分量  $E_i$  的振幅,  $B_{ij}$  为光源平面电场分量  $E_i$  和  $E_j$  之间的相位相关因子,  $w_0$  为束腰宽度,  $\Omega_0$  为与双曲正弦部分有关的参数,  $\sigma_{ij}$  为随机电磁 ShG 光束在  $z=0$  平面的空间相关长度。

根据广义惠更斯-菲涅耳原理<sup>[15]</sup>, 随机电磁 ShG 光束通过大气湍流传输交叉谱密度的矩阵元  $W_{ij}(\rho_1, \rho_2, z)$  表示为

$$W_{ij}(\rho_1, \rho_2, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2 s_1 \iint d^2 s_2 W_{ij}(s_1, s_2, 0) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2z}[(\rho_1 - s_1)^2 - (\rho_2 - s_2)^2]\right\} \langle \exp[\psi^*(\rho_1, s_1) + \psi(\rho_2, s_2)] \rangle, \quad (4)$$

式中  $\rho_1, \rho_2$  分别是  $z$  平面两点坐标矢量,  $z$  为传播距离,  $k$  为波数与波长  $\lambda$  关系为  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\langle \exp[\psi^*(\rho_1, s_1) + \psi(\rho_2, s_2)] \rangle$  是湍流介质扰动而引起的相位起伏, 可用 Rytov 位相结构函数的二次近似<sup>[16]</sup> 表示为

$$\langle \exp[\psi^*(\rho_1, s_1) + \psi(\rho_2, s_2)] \rangle \approx \exp\left\{-\frac{1}{\rho_0^2}[(\rho_1 - \rho_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)(s_1 - s_2) + (s_1 - s_2)^2]\right\}, \quad (5)$$

其中,

$$\rho_0 = (0.545 C_n^2 k^2 z)^{-3/5}, \quad (6)$$

为球面波在大气湍流中传输的相关长度,  $C_n^2$  为大气折射率结构常数, 并且对强湍流和弱湍流的情况都适用<sup>[17-18]</sup>。为了便于计算, 此处作坐标变换

$$\mathbf{u} = \frac{s_1 + s_2}{2}, \quad \mathbf{v} = s_1 - s_2. \quad (7)$$

把(3)、(5)、(7)式代入(4)式, 可得随机电磁 ShG 光束通过大气湍流时交叉谱密度的矩阵元表达式为

$$W_{ij}(\rho_1, \rho_2, z) = A_i A_j B_{ij} \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \exp\left[-\frac{ik}{2z}(\rho_1^2 - \rho_2^2)\right] \exp\left[-\frac{1}{\rho_0^2}(\rho_1 - \rho_2)^2\right] \times \iint d^2 u \iint d^2 v \exp\left[-\frac{2}{w_0^2}u^2\right] \exp\left[-\frac{ik}{z}(\rho_1 - \rho_2)u\right] \exp\left[-\frac{ik}{z}uv\right] \exp(-\varepsilon v^2) \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(\rho_1 + \rho_2)v\right] \exp\left[-\frac{1}{\rho_0^2}(\rho_1 - \rho_2)v\right] \left\{ \exp[2\Omega_0(u_x + u_y)] - \exp[-\Omega_0(v_x + v_y)] - \exp[-\Omega_0(v_x + v_y)] + \exp[-2\Omega_0(u_x + u_y)] \right\}, \quad (8)$$

式中

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2w_0^2} + \frac{1}{2\sigma_{ij}^2} + \frac{1}{\rho_0^2}. \quad (9)$$

利用积分公式<sup>[19]</sup>

$$\int \exp(-px^2 + 2qx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{p}\right), \quad (10)$$

对(8)式进行复杂的积分运算,结果整理为

$$W_{ij}(\rho_1, \rho_2, z) = A_i A_j B_{ij} \left(\frac{k}{4\pi z}\right)^2 \exp\left[-\frac{ik}{2z}(\rho_1^2 - \rho_2^2)\right] \exp\left[-\frac{1}{\rho_0^2}(\rho_1 - \rho_2)^2\right] (W_1 - W_2 - W_3 + W_4), \quad (11)$$

式中

$$W_1 = \frac{\pi^2}{\varepsilon_{ij} g_{ij}} \exp\left(\frac{P_{1x}^2 + P_{1y}^2}{4\varepsilon_{ij}} + \frac{B_{1x}^2 + B_{1y}^2}{g_{ij}}\right), \quad (12a)$$

$$W_2 = \frac{\pi^2}{\varepsilon_{ij} g_{ij}} \exp\left(\frac{P_{2x}^2 + P_{2y}^2}{4\varepsilon_{ij}} + \frac{B_{2x}^2 + B_{2y}^2}{g_{ij}}\right), \quad (12b)$$

$$g_{ij} = \frac{2}{w_0^2} + \frac{k^2}{4z^2 \varepsilon_{ij}}, \quad (12c)$$

$$P_{1x} = \frac{ik}{2z}(\rho_{1x} + \rho_{2x}) - \frac{1}{\rho_0^2}(\rho_{1x} - \rho_{2x}), \quad (12d)$$

$$Q_{1x} = \frac{ik}{z}(\rho_{1x} - \rho_{2x}) + 2\Omega_0, \quad (12e)$$

$$B_{1x} = \frac{1}{2}\left(Q_{1x} - \frac{ik}{2z\varepsilon} P_{1x}\right), \quad (12f)$$

$$P_{2x} = \frac{ik}{2z}(\rho_{1x} + \rho_{2x}) - \frac{1}{\rho_0^2}(\rho_{1x} - \rho_{2x}) + \Omega_0, \quad (12g)$$

$$Q_{2x} = \frac{ik}{z}(\rho_{1x} - \rho_{2x}), \quad (12h)$$

$$B_{2x} = \frac{1}{2}\left(Q_{2x} - \frac{ik}{2z\varepsilon} P_{2x}\right). \quad (12i)$$

由对称性,将 $P_{1x}, Q_{1x}, B_{1x}, P_{2x}, Q_{2x}, B_{2x}$ 中的 $\rho_{1x}$ 和 $\rho_{2x}$ 换成 $\rho_{1y}$ 和 $\rho_{2y}$ 就分别得到 $P_{1y}, Q_{1y}, B_{1y}, P_{2y}, Q_{2y}, B_{2y}$ 。将 $W_1$ 中 $Q_{1x}, B_{1x}, Q_{1y}, B_{1y}$ 的表达式中的 $\Omega_0$ 换成 $-\Omega_0$ 即可得到 $W_4$ ,将 $W_2$ 中 $P_{2x}, B_{2x}, P_{2y}, B_{2y}$ 的表达式中的 $\Omega_0$ 换成 $-\Omega_0$ 即可得到 $W_3$ 。

当 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ 时随机电磁 ShG 光束通过大气湍流传输的偏振度表示为<sup>[20]</sup>

$$P(\rho, z) = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathbf{W}(\rho, z)}{[\text{Tr} \mathbf{W}(\rho, z)]^2}}, \quad (13)$$

式中 $\det(\cdot)$ 和 $\text{Tr}(\cdot)$ 分别表示交叉谱密度矩阵中的秩和迹。

### 3 数值计算

图 1 是不同大气折射率结构常数 $C_n^2$ 条件下,随机电磁 ShG 光束在大气湍流中横向偏振度的演变过程,计算参数为 $\lambda=1.06 \times 10^{-6} \text{ m}$ , $w_0=3 \text{ cm}$ , $A_x=A_y=2$ , $B_{xx}=B_{yy}=1$ , $B_{xy}=0.2 \exp(i\pi/6)$ , $B_{yx}=0.2 \exp(-i\pi/6)$ , $\sigma_{xx}=1 \text{ cm}$ , $\sigma_{yy}=1.5 \text{ cm}$ , $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=2 \text{ cm}$ , $\Omega_0=30 \text{ m}^{-1}$ 。从图 1 中可以看出,随机电磁 ShG 光束在 $C_n^2=5 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ 传输时,在开始一段距离内中心为偏振度的极大值,随着传输距离的增加中心的偏振度逐渐减小,在 $z=800 \text{ m}$ 处中心为偏振度的极小值,并且横向偏振度分布为双峰状;随着传输距离的继续增加,中心的偏振度值在逐渐增大,在 $z=1170 \text{ m}$ 处横向偏振度分布变成平顶状;当传输距离足够远( $z>3000 \text{ m}$ ),横向偏振度分布为单峰状。由图 1 可知随机电磁 ShG 光束分别在 $C_n^2$ 为 0 和 $10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ 中传输时横向偏振度演化规律与 $C_n^2=5 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ 时偏振分布情况相似, $C_n^2$ 的越小,横向偏振度分布变为双峰状、平顶状、单峰状的传输距离越长。

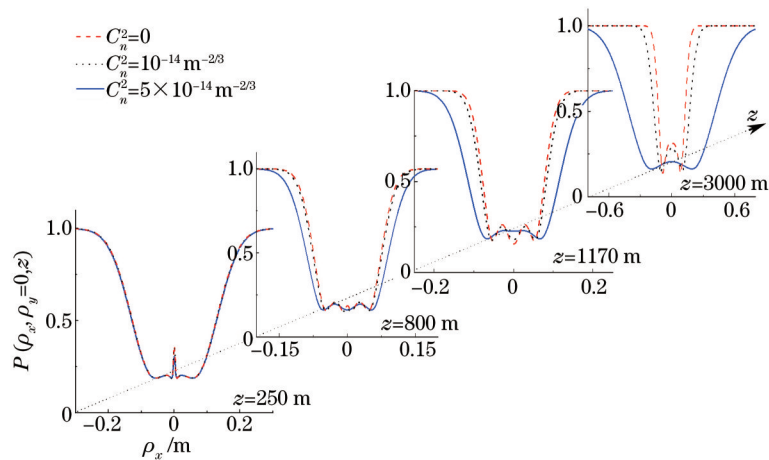


图1 结构常数  $C_n^2$  取不同值时,随机电磁 ShG 光束在大气湍流中偏振度的演变过程

Fig.1 Evolution of degree of polarization of stochastic electromagnetic ShG beams in atmospheric turbulence for different values of the structure constant  $C_n^2$

图2是不同 Sh 部分参数  $\Omega_0$  条件下,随机电磁 ShG 光束在大气湍流中横向偏振度的演变过程,  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ ,  $\sigma_{xx}=1.5 \text{ cm}$ ,  $\sigma_{yy}=1 \text{ cm}$ ,其他参数同图1。从图2中可以看出,在开始一段距离内中心为偏振度的极大值,随着传输距离的增加中心的偏振度逐渐减小,横向偏振度分布变为双峰状,然后变为平顶状分布,最后当传输距离达到足够远时变为单峰状。在演变的过程中可以看到,  $\Omega_0 = 30 \text{ m}^{-1}$ 时演变的最快,即  $\Omega_0$  越大,横向偏振度分布变为双峰状、平顶状、单峰状的传输距离越长。

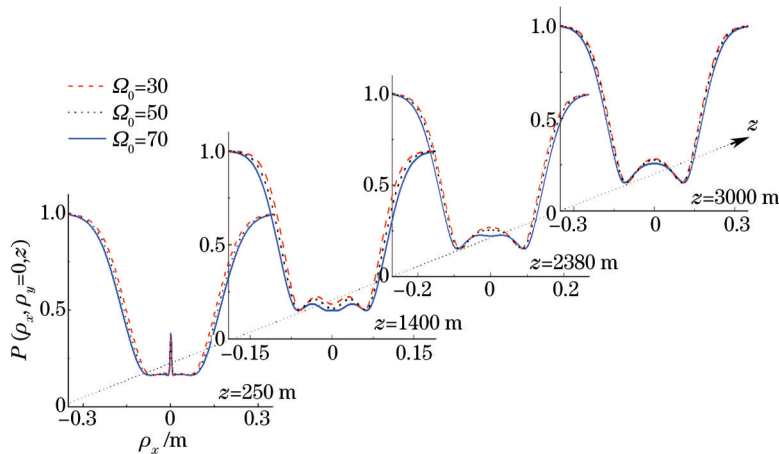


图2 Sh 部分参数  $\Omega_0$  取值不同值时,随机电磁 ShG 光束在大气湍流中偏振度的演变过程

Fig.2 Evolution of degree of polarization of stochastic electromagnetic ShG beams in atmospheric turbulence for different values of Sh-part parameter  $\Omega_0$

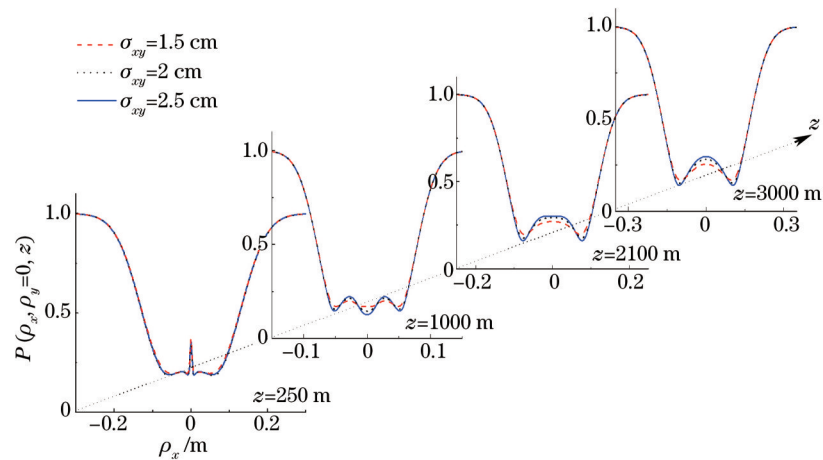
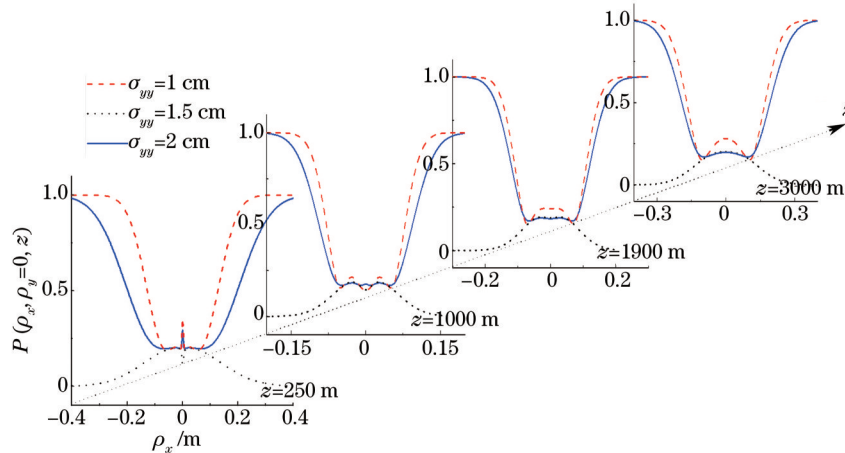
图3为不同互相关空间相干长度  $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$  条件下,随机电磁 ShG 光束在大气湍流中横向偏振度的演变过程,  $\Omega_0 = 30 \text{ m}^{-1}$ ,其他参数同图2。从图3中可以看出,在横向偏振度形成双峰状分布、平顶状分布、单峰状分布的过程中,  $\sigma_{xy}=1.5 \text{ cm}$ 时演变的最快。即  $\sigma_{xy}(\sigma_{yx})$  越大,横向偏振度分布变为双峰状、平顶状、单峰状的传输距离越长。

图4为不同自相关空间相干长度  $\sigma_{yy}$  条件下,随机电磁 ShG 光束在大气湍流中横向偏振度的演变过程,  $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=2 \text{ cm}$ ,其他参数同图3。从图4可以看出,  $\sigma_{yy}=1, 2 \text{ cm}$  时,即  $\sigma_{yy} < \sigma_{xx}$  和  $\sigma_{yy} > \sigma_{xx}$  时与图1~3变化相似。而  $\sigma_{yy}=1.5 \text{ cm}$  时,即  $\sigma_{yy}=\sigma_{xx}$  时,从图中可以看出横向偏振度的演变规律于  $\sigma_{yy} \neq \sigma_{xx}$  时明显不同。

## 4 结 论

以随机电磁 ShG 光束为例,由广义惠更斯-菲涅耳原理推导出随机电磁 ShG 光束在大气湍流中传输的交叉谱密度矩阵元的解析表达式。根据相干偏振性统一理论,研究了随机电磁光束在大气湍流中横向偏振度的变化。研究表明,随机电磁 ShG 光束在大气湍流中横向偏振度的变化与结构常数、空间相关长度、

和 Sh

图3 互相关空间相干长度 $\sigma_{xy}$ 不同时,随机电磁ShG光束在大气湍流中偏振度的演变过程Fig.3 Evolution of degree of polarization of stochastic electromagnetic ShG beams in atmospheric turbulence for different values of spatial correlation length  $\sigma_{xy}$ 图4 自相关空间相干长度 $\sigma_{yy}$ 不同时,随机电磁ShG光束在大气湍流中偏振度的演变过程Fig.4 Evolution of degree of polarization of stochastic electromagnetic ShG beams in atmospheric turbulence for different values of spatial correlation length  $\sigma_{yy}$ 

部分参数因素有关。 $C_n^2$  越小,或 Sh 部分参数  $\Omega_0$  越大,或互相关空间相关长度  $\sigma_{xy}(\sigma_{yx})$  越大,横向偏振度分布变为双峰状、平顶状、单峰状的传输距离越长。该研究工作可为随机电磁光束在自由空间光通信中偏振度的分析提供理论基础和实验依据。

### 参考文献

- 1 D F V James. Change of polarization of light beams on propagation in free space[J]. J Opt Soc Am A, 1994, 11(5): 1641-1643.
- 2 M Salem, O Korotkova, A Dogariu, *et al.*. Polarization changes in partially coherent electromagnetic beams propagating through turbulent atmosphere[J]. Waves Random Media, 2004, 14(4): 513-523.
- 3 O Korotkova, M Salem, E Wolf. The far-zone behavior of the degree of polarization of electromagnetic beams propagating through atmospheric turbulence[J]. Opt Commun, 2004, 233(4-6): 225-230.
- 4 H Roychowdhury, S Ponomarenko, E Wolf. Change in the polarization of partially coherent electromagnetic beams propagating through the turbulent atmosphere[J]. J Mod Opt, 2005, 52(11): 1611-1618.
- 5 J Pu. Invariance of spectrum and polarization of electromagnetic Gaussian Schell-model beams propagating in free space[J]. Chin Opt Lett, 2006, 4(4): 196-198.
- 6 Z Chen, J Pu. Propagation characteristics of aberrant stochastic electromagnetic beams in a turbulent atmosphere[J]. J Opt A, 2007, 9(12): 1123-1130.
- 7 O Korotkova, J Pu, E Wolf. Spectral changes in electromagnetic stochastic beams propagating through turbulent atmosphere

- [J]. *J Mod Opt*, 2008, 55(8): 1199–1208.
- 8 J Pu, O Korotkova. Propagation of the degree of cross-polarization of a stochastic electromagnetic beam through the turbulent atmosphere[J]. *Opt Commun*, 2009, 282(9): 1691–1698.
- 9 Liu Qi, Chu Jinkui, Wang Jing, *et al.*. Research and simulation analysis of atmospheric polarization properties under water cloud condition[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(3): 0301004.  
刘 琦, 褚金奎, 王 兢, 等. 水云条件下大气偏振特性研究及其模拟分析[J]. *光学学报*, 2014, 34(3): 0301004.
- 10 Liu Xia, Wu Guohua, Cao Dingxiang, *et al.*. Propagation properties of electromagnetic Gaussian multi-Schell model beams through atmospheric turbulence in a slanted path[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(2): 020102.  
刘 侠, 吴国华, 曹丁象, 等. 矢量多高斯-谢尔模型光束在大气湍流中上行链路中的传输特性[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(2): 020102.
- 11 F Gori. Matrix treatment for partially polarized, partially coherent beams[J]. *Opt Lett*, 1998, 23(4): 241–243.
- 12 E Wolf. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams[J]. *Phys Lett A*, 2003, 312(5–6): 263–267.
- 13 E Wolf. Correlation-induced changes in the degree of polarization, the degree of coherence, and the spectrum of random electromagnetic beams on propagation[J]. *Opt Lett*, 2003, 28(13): 1078–1080.
- 14 E Wolf. *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- 15 L C Andrews, R L Phillips. *Laser Beam Propagation through Random Media*[M]. Bellingham: SPIE Press, 2005.
- 16 S C H Wang, M A Plonus. Optical beam propagation for a partially coherent source in the turbulent atmosphere[J]. *J Opt Soc Am*, 1979, 69(9): 1297–1304.
- 17 A Ishimaru. Phase fluctuations in a turbulent medium[J]. *Appl Opt*, 1977, 16(12): 3190–3192.
- 18 H T Eyyuboglu. Propagation of Hermite-cosh-Gaussian laser beams in turbulent atmosphere[J]. *Opt Commun*, 2005, 245(1–6): 37–47.
- 19 I S Gradshteyn, I M Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*[M]. New York: Academic Press, 2007.
- 20 T Shirai, E Wolf. Correlations between intensity fluctuations in stochastic electromagnetic beams of any state of coherence and polarization[J]. *Opt Commun*, 2007, 272(2): 289–292.

栏目编辑: 史 敏