

两个三能级原子的可提纯性猝死

黄江

广东海洋大学理学院, 广东 湛江 524088

摘要 目前,在各种退相干环境中由 Horodecki 态构成的两个三能级原子系统的可提纯性纠缠得到了广泛的研究。研究了凸线性组合态的可提纯性演化规律。研究结果表明:初始处于自由纠缠的凸线性组合态在有限的时间内会变成束缚纠缠态,原子系统的可提纯性出现猝死现象。

关键词 量子光学; 三能级原子; 可提纯性; 凸线性组合态; 猝死

中图分类号 TH744.1 **文献标志码** A

doi: 10.3788/LOP52.062701

Distillability Sudden Death in Qutrit-Qutrit Systems

Huang Jiang

College of Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang, Guangdong 524088, China

Abstract Recently the distillability entanglement in qutrit-qutrit systems with Horodecki states under various decoherence is studied widely. The regulation of distillability evolution with convex linear combination states is investigated. The result shows that the convex linear combination states which are initially in the free-entangled states become bound-entangled in a finite time, the phenomenon of distillability sudden death appears in the qutrits systems.

Key words quantum optics; qutrit-qutrit; distillability; convex linear combination states; sudden death

OCIS codes 270.5585; 270.2500; 270.5290

1 引言

量子纠缠^[1-5]作为一个区分量子物理和经典物理的显著特征,近几十年来引起了研究者的广泛注意。纠缠在量子信息处理、高保密量子通讯、量子密码等方面的应用展现了诸多优于经典信息处理方式的特点,引起了当代信息技术的深刻变革。众所周知,任何真实的量子系统都可以看作是开放系统。量子系统将不可避免的与相互作用环境的自由度耦合,从而导致系统纠缠的退相干^[6-8]。鉴于技术上对纠缠有严格的要求,研究在各种环境下系统纠缠的特性具有重要意义。目前,Yu等^[9-12]研究了在几种典型退相干环境中两体二能级原子系统的纠缠演化动力学。结果表明:原子系统的纠缠在有限的时间内突然消失,这种现象称之为“纠缠猝死”。随后,在高维量子系统和其他退相干通道中的纠缠猝死现象也得到了广泛的研究^[13-16]。很显然,纠缠猝死制约着量子信息技术的发展,因为在很多情况下量子信息的存储和传递都得依赖于纠缠。在线性光学系统^[17]和原子系统^[18]中的实验也证实了这一影响。随着研究的深入,纠缠猝死的本质以及纠缠信息的流向问题倍受关注。Lopez等^[19]通过扩展原子系统,将相互作用库的自由度包括进来。发现原子系统的纠缠猝死必然伴随着相互作用库纠缠的突然产生。在演化过程中,原子系统的纠缠流入相互作用库。相互作用库纠缠突然产生的现象称之为“纠缠复活”。令人惊讶的是,纠缠复活的时间可以早于、同时、甚至滞后于纠缠猝死时间。

在研究高维量子系统的两体纠缠时,研究者们注意到一个重要的现象:高维系统的两体纠缠可分为自由和束缚纠缠^[20-21]。自由纠缠态在局域操作和经典通讯中可以提纯,而束缚纠缠态则无法提纯。起初,束缚纠缠态仅仅是一个数学概念,但在随后的一些物理过程中得以证实^[22]。束缚纠缠虽然不能独立应用于量子信息处理,但在支持通讯等方面却具有不可代替的作用^[23-24]。在研究高维量子系统的纠缠演化过程中,系统

收稿日期: 2015-01-05; 收到修改稿日期: 2015-02-08; 网络出版日期: 2015-05-06

基金项目: 国家自然科学基金(11074072、11374096)、广东省教育厅重大科研项目培育计划(Q14606)

作者简介: 黄江(1984—),男,博士,讲师,主要从事量子光学和量子信息方面的研究。E-mail: 940038299@qq.com

的纠缠出现了类似于纠缠猝死的现象。在一定的时间内,初始处于自由纠缠的量子态在局域退相干环境中会转变成束缚纠缠态,这种转变行为称之为“可提纯性猝死”^[21]。宋伟等^[21]介绍了此概念,并在退相位通道中研究了可提纯性猝死现象,提出了几种可以避免可提纯性猝死的方案。随后,在各种退相干环境中的可提纯性猝死现象均得到了研究^[25-28]。然而,目前关于可提纯性猝死的研究都是建立在 Horodecki 态的基础上。研究者们开始关注此现象的适用范围,就此现象是否能在其他量子态上实现这一问题作了研究和分析。本文研究了两个三能级原子系统中凸线性组合态的可提纯性演化特性,发现了凸线性组合态的可提纯性猝死现象。论文的安排如下:第二部分建立物理模型,从两个全同的二能级原子与多模库的耦合系统出发,得到开放量子系统中的演化动力学,并推广至两个全同三能级原子模型;第三部分,分析了高维系统纠缠的特征,给出了可提纯性纠缠的度量方法。在初态为凸线性组合态的条件下计算了时间演化密度矩阵,并研究了原子系统可提纯性的演化规律,发现了可提纯性猝死现象,并对结果作了物理分析。第四部分对全文做了简单的总结。

2 物理模型

首先介绍物理模型和系统演化的基本方程。考虑两个全同二能级原子与无耦合的多模库相互作用的开放量子系统。原子只与各自独立库相互作用,且库模为单激发模式。由于两个原子是全同的,因此可先研究一个原子与库相互作用的子系统的演化,然后将其推广至两个原子的情况。在旋波近似下,子系统的哈密顿量为^[19]:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sum_{k=1}^N\omega_k\hat{\sigma}^+\hat{\sigma} + \hbar\sum_{k=1}^Ng_k(\hat{a}\hat{\sigma}_k^\dagger + \hat{\sigma}_k\hat{a}^\dagger) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (1)$$

式中

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sum_{k=1}^N\omega_k\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}, \quad (2)$$

$$\hat{H}_1 = \hbar\sum_{k=1}^Ng_k(\hat{a}\hat{\sigma}_k^\dagger + \hat{\sigma}_k\hat{a}^\dagger), \quad (3)$$

式中 \hat{H}_0 表示频率为 ω 的原子和频率为 ω_k 的多模库的哈密顿量; \hat{H}_1 表示原子与多模库相互作用的哈密顿量。在相互作用绘景中,

$$\hat{H}_{cr} = \exp(iH_0t/\hbar)\hat{H}_1\exp(-iH_0t/\hbar), \quad (4)$$

利用 Baker-Hausdorff 公式,

$$\exp(\alpha A)B\exp(-\alpha A) = B + \alpha[A, B] + \frac{\alpha^2}{2}[A, [A, B]] + \dots, \quad (5)$$

并假设 $\omega - \omega_k = 0$, (4)式可化简为,

$$\hat{H}_{cr} = \hbar\sum_{k=1}^Ng_k(\hat{a}\hat{\sigma}_k^\dagger + \hat{\sigma}_k\hat{a}^\dagger), \quad (6)$$

任意态矢的时间演化方程可写为,

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{cr}|\psi(t)\rangle, \quad (7)$$

初始时刻原子中有一个光子,相互作用库处于真空态,此组合初态为,

$$|\psi^0(0)\rangle_{cr} = |1\rangle_c|\bar{0}\rangle_r, \quad (8)$$

式中 $|\bar{0}\rangle_r = \prod_{k=1}^N|0_k\rangle_r$ 为 N 模库 r 的共同真空库。由于是单光子激发,任意时刻的态矢 $|\psi(t)\rangle_{cr}$ 必然为状态 $|1\rangle_c|\bar{0}\rangle_r$ 与 $|0\rangle_c|\bar{1}\rangle_r$ 的线性组合。因此可将 $|\psi^0(t)\rangle_{cr}$ 写为

$$|\psi^0(t)\rangle_{cr} = \xi(t)|1\rangle_c|\bar{0}\rangle_r + \sum_{k=1}^N\lambda_k|0\rangle_c|1_k\rangle_r, \quad (9)$$

式中 $|1_k\rangle_r$ 表示库的第 K 个模中有一个光子, $\lambda_k(t)$ 为相应的概率幅。将(9)式代入(7)式中即可解出各概率幅。在 $N \rightarrow \infty$, $\xi(t)$ 收敛于 $\xi(t) = \exp(-\kappa t/2)$ 。将(9)式可写成更为简洁的形式

$$|\psi^{(0)}(t)\rangle_{cr} = \xi(t)|1\rangle_c|\bar{0}\rangle_r + \chi(t)|0\rangle_c|\bar{1}\rangle_r, \quad (10)$$

式中 $|\bar{1}\rangle_r = 1/\chi(t)\sum_{k=1}^N \lambda_k(t)|1_k\rangle_r$, 概率幅 $\chi(t)$ 在 $N \rightarrow \infty$ 时收敛于 $\chi(t) = \sqrt{1 - \exp(-\kappa t)}$ 。对于三能级原子的子系统, 假设初始时刻单腔模中有两个光子, 库处于真空态。则子系统的初态为

$$|\psi^{(2)}(0)\rangle_{cr} = |2\rangle_c|\bar{0}\rangle_r, \quad (11)$$

利用类似的处理方法, 不难得到其时间演化态,

$$|\psi^{(2)}(t)\rangle_{cr} = \xi^2(t)|2\rangle_c|\bar{0}\rangle_r + \sqrt{2}\xi(t)\chi(t)|1\rangle_c|\bar{1}\rangle_r + \nu(t)|0\rangle_c|\bar{2}\rangle_r, \quad (12)$$

式中 $|\bar{2}\rangle_r = 1/\nu(t)\left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k(t)|^2|2_k\rangle_r + \sqrt{2}\sum_{k \neq q=1}^N \lambda_k(t)\lambda_q(t)|1_k \cdots 1_q\rangle_r\right)$ 。由归一化条件得: $\nu(t) = \sqrt{1 - \xi^4(t) - 2\xi^2(t)\chi^2(t)}$ 。

(10)式和(12)式分别给出了二能级、三能级原子与库耦合的子系统的演化规律, 很容易将研究推广至两个全同二能级、三能级原子与库耦合系统的演化,

$$|\Phi^{(0)}(t)\rangle = |\psi^{(0)}(t)\rangle_{cr} |\psi^{(0)}(t)\rangle_{cr}, \quad (13)$$

$$|\Phi^{(2)}(t)\rangle = |\psi^{(2)}(t)\rangle_{cr} |\psi^{(2)}(t)\rangle_{cr}, \quad (14)$$

(13)式和(14)式构成的密度矩阵分别为 $\rho^{(0)}(t) = |\Phi^{(0)}(t)\rangle\langle\Phi^{(0)}(t)|$ 和 $\rho^{(2)}(t) = |\Phi^{(2)}(t)\rangle\langle\Phi^{(2)}(t)|$, 对 $\rho^{(0)}(t)$ 、 $\rho^{(2)}(t)$ 的相互作用库部分求偏迹, 不难得到两个原子系统的时间演化密度矩阵。

3 可提纯性猝死

在研究两个三能级系统的可提纯性之前, 先介绍自由和束缚纠缠的特征以及判断方法。在高维量子系统中, 如果一个量子态作部分转置后有正的本征值, 则此量子态是不可提纯的, 称这种纠缠态为束缚纠缠态。反之, 作部分转置后有负的本征值的量子态是可提纯的, 称为自由纠缠态。在退相干作用下, 如果初始处于自由纠缠的量子态在有限的时间内转变为束缚纠缠态, 这种现象称之为“可提纯性猝死”。可提纯性猝死意味着量子态由可提纯状态到不可提纯状态的转变。束缚纠缠态的判断较为复杂, 即使两个三能级原子构成的系统, 束缚纠缠态也有多种, 无法仅仅使用一种判据识别所有的束缚纠缠态。然而, 重排定则^[29]是一种行之有效的量度方法, 不仅能够识别绝大部分的束缚纠缠态, 而且比较容易计算。对于一个给定的密度矩阵, 重排定义为: $(\rho^R)_{ijkl} = \rho_{ikjl}$ 。若 $\|\rho^R\| - 1 \leq 0$, 则所求量子态为分离态; 对于具有正部分转置的量子态, $\|\rho^R\| - 1 > 0$ 即可判定此时处于束缚纠缠态。对于具有负部分转置的量子态, 可以通过负度^[30]来判断。负度 $N(\rho)$ 等于密度矩阵 ρ 部分转置的负本征值的绝对值之和。 $N(\rho) > 0$ 即可证明 ρ 为自由纠缠态。如果 $N(\rho) = 0$, ρ 将处于束缚纠缠态或分离态。结合负度和重排定则, 便可精确的研究量子态的可提纯性。

考虑凸线性组合态 $\rho_p(0)$ ^[5,31]

$$\rho_p = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4p-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4p-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4p-2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4p-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

式中 p 为调节参数, 取值范围是: $0 \leq p \leq 1$ 。已经证明在 $p \neq 0.5$ 时, ρ_p 为自由纠缠态^[31], 这里取 $p=0.7$ 。取正交基矢为 $\{|00\rangle, |01\rangle, |02\rangle, |10\rangle, |11\rangle, |12\rangle, |20\rangle, |21\rangle, |22\rangle\}$ 。由此初态, 运用第二部分的理论基础, 得出时间演化密度矩阵, 再对相互作用库求迹, 即解出两个三能级原子系统时间演化的约化密度矩阵。下面给出非零的时间演化约化密度矩阵元,

$$\rho_{11}(t) = \frac{1}{21}(1 + \chi^4 + v^2) + \frac{5}{21}(\chi^2 + v^2 + \chi^2 v^2), \quad (16)$$

$$\rho_{15}(t) = \xi^2 \left(\frac{2}{21} + \frac{4}{21} \chi^4 \right), \quad (17)$$

$$\rho_{17}(t) = \frac{4p-2}{21} \xi^2 \chi^2, \quad (18)$$

$$\rho_{19}(t) = \frac{2}{21} \xi^4, \quad (19)$$

$$\rho_{22}(t) = \xi^2 \left[\frac{4}{21} (1 + \chi^2 + 2\chi^4 + \chi^2 v^2) + \frac{1}{21} v^2 \right], \quad (20)$$

$$\rho_{26}(t) = \frac{2\sqrt{2}}{21} \xi^4 \chi^2, \quad (21)$$

$$\rho_{28}(t) = \frac{4p-2}{21} \xi^4, \quad (22)$$

$$\rho_{33}(t) = \xi^4 \left(\frac{1}{21} + \frac{4}{21} \chi^2 + \frac{2}{21} v^2 \right), \quad (23)$$

$$\rho_{37}(t) = \frac{4p-2}{21} \xi^4, \quad (24)$$

$$\rho_{44}(t) = \xi^2 \left[\frac{1}{21} + \frac{2}{21} (5\chi^2 + \chi^4 + 2v^2 + 2\chi^2 v^2) \right], \quad (25)$$

$$\rho_{48}(t) = \frac{2\sqrt{2}}{21} \xi^4 \chi^2, \quad (26)$$

$$\rho_{51}(t) = \xi^2 \left(\frac{2}{21} + \frac{4}{21} \chi^4 \right), \quad (27)$$

$$\rho_{55}(t) = \xi^4 \left(\frac{2}{21} + \frac{10}{21} \chi^2 + \frac{8}{21} \chi^4 \right), \quad (28)$$

$$\rho_{59}(t) = \frac{2}{21} \xi^6, \quad (29)$$

$$\rho_{62}(t) = \frac{2\sqrt{2}}{21} \xi^4 \chi^2, \quad (30)$$

$$\rho_{66}(t) = \frac{4}{21} \xi^6 (1 + \chi^2), \quad (31)$$

$$\rho_{71}(t) = \frac{4p-2}{21} \xi^2 \chi^2, \quad (32)$$

$$\rho_{73}(t) = \frac{4p-2}{21} \xi^4, \quad (33)$$

$$\rho_{77}(t) = \xi^4 \left(\frac{4}{21} + \frac{1}{21} \chi^2 + \frac{2}{21} v^2 \right), \quad (34)$$

$$\rho_{82}(t) = \frac{4p-2}{21} \xi^4, \quad (35)$$

$$\rho_{84}(t) = \frac{2\sqrt{2}}{21} \xi^4 \chi^2, \quad (36)$$

$$\rho_{88}(t) = \xi^6 \left(\frac{1}{21} + \frac{4}{21} \chi^2 \right), \quad (37)$$

$$\rho_{91}(t) = \frac{2}{21} \xi^4, \quad (38)$$

$$\rho_{95}(t) = \frac{2}{21} \xi^6, \quad (39)$$

$$\rho_{99}(t) = \frac{2}{21} \xi^8. \quad (40)$$

接下来讨论凸线性组合态 $\rho_p(t)$ 的时间演化特性。图 1 绘制了负度和重排定则的时间演化曲线,由图容易看出:在时间为 $\kappa t_N \approx 0.0696$ 时,初始的自由纠缠态转变为束缚纠缠态。在时间区域 $0.0696 \leq \kappa t \leq 0.0935$ 内, $\|\rho^R\| - 1 > 0$, 表明此时系统处于束缚纠缠态。然而,在时间 $\kappa t_N \approx 0.0935$ 之后,无法通过重排定则继续判断 $\rho_p(t)$ 的状态。 $\rho_p(t)$ 既有可能处于束缚纠缠态,也有可能为分离态。然而这并不影响结论,上述过程已经

证明了 $\rho_p(t)$ 在演化过程中出现了可提纯性猝死现象。

当然,图1的结论是建立在调节参数 p 取特定值的基础之上。很自然会涉及到对于任意 p 值,可提纯性猝死现象是否具有普适性的问题。为此,对任意 p 值的情况均作了分析,得到了肯定的答案:凸线性组合态的可提纯性猝死现象对任意 p 值均成立,唯一的区别是不同的 p 值可提纯性猝死的时间不一样而已。另外,在研究 p 的不同取值时,发现了一个有趣的现象,可提纯性纠缠的演化以 $p=0.5$ 成对称性分布。 p 值越远离 0.5,可提纯性纠缠保持的时间就越长,反之则越短。这一内在物理机制可由凸线性组合态的结构特征得到合理的解释: $p=0.5$ 时, $\rho_p(0)$ 作部分转置后仅有正本征值,为束缚纠缠态。 $p \neq 0.5$ 时,出现了负的本征值,为自由纠缠态,并且负本征值的绝对值以 $p=0.5$ 为中心对称分布, p 越远离 0.5,负本征值的绝对值越大,自由纠缠的程度就越高。在演化过程中可提纯性能够保持的时间自然会更长一些。

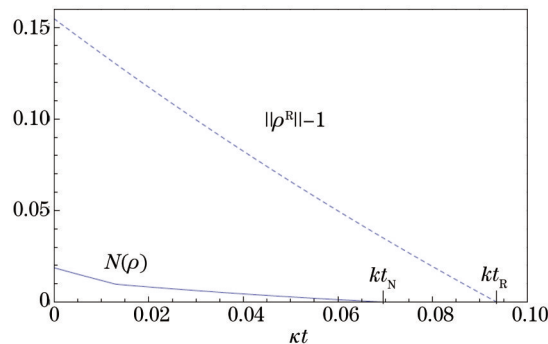


图1 负度 $N(\rho)$ 与重排定则 $\|\rho^R\| - 1$ 随衰减参数 κt 的演化曲线,取 $p=0.7$

Fig.1 Negativity $N(\rho)$ and realignment criterion $\|\rho^R\| - 1$ are plotted against the decay parameter κt with $p=0.7$

目前关于两个三能级原子的可提纯性纠缠演化的工作,很多都是从熟悉的 Horodecki 态出发。至于此现象能否在其他量子态上实现,研究者们做了很多尝试,尚未取得一致性意见。甚至一些学者开始怀疑可提纯性猝死现象可能仅限于在 Horodecki 态中出现,本文证明了在凸线性组合态中可提纯性猝死现象同样可以发生,扩展了可提纯性研究的范围,为寻找合适的量子态提供了一个可行的思路,丰富了可提纯性理论,具有一定的参考价值。

最后,对原子系统可提纯性纠缠的流向问题作简单定性分析。由于原子系统与相互作用库耦合,原子系统流失的信息流入相互作用库中。从信息流动的角度来分析,相互作用库可能会出现可提纯性复活现象,这有待学者们作进一步研究。

4 结 论

从凸线性组合态出发,通过求解两个三能级原子的约化密度矩阵,得到相应的时间演化密度矩阵元,计算了原子系统的负度和重排定则。结果表明:系统的可提纯性会出现猝死现象,可提纯性猝死的时间与调节参数 p 的取值有关。可提纯性演化规律以 $p=0.5$ 对称分布,这有赖于凸线性组合态的特征。

致谢 感谢德国齐根大学物理系的 Mazhar Ali 教授对论文所作的贡献。Mazhar Ali 指导本文的部分计算,并在分析过程中提出了建议,在此深表感谢。

参 考 文 献

- 1 Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002: 1-70.
- 2 Wang Zhongjie, Ruan Fei, Fang Xu. Teleportation for atomic state based on disentanglement-free state[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(3): 0327001.
王中结, 阮飞, 方旭. 基于免退纠缠态的原子态隐形传输[J]. 光学学报, 2015, 35(3): 0327001.
- 3 Li Fang, Zhou Yaoyao, Jia Xiaojun. Entanglement enhancement of bipartite entangled states through coherent feedback control[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(10): 1027001.
李芳, 周瑶瑶, 贾晓军. 相干反馈控制实现两组份纠缠态光场纠缠增强[J]. 光学学报, 2014, 34(10): 1027001.
- 4 Guo Zhanying, Zhang Xinhai, Xiao Ruihua, et al.. Dynamics of quantum entanglement in a two-qubit XXZ Heisenberg

- system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(7): 0727001.
- 郭战营, 张新海, 肖瑞华, 等. 两粒子XXZ海森堡系统中的量子纠缠动力学[J]. *光学学报*, 2014, 34(7): 0727001.
- 5 Breuer H P, Petruccione F. *The Theory of Open Quantum Systems*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2007: 320-438.
- 6 Wang Chengzhi, Yu Xiaoqin, Li Chunxian, *et al.*. Entanglement between two atoms mediated by two dissipative optical cavities[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(s2): s227001.
- 王成志, 喻小琴, 李春先, 等. 耗散双光腔调制的两原子间的纠缠[J]. *光学学报*, 2013, 33(s2): s227001.
- 7 Lu Daoming, Qiu Changdong. Entanglement properties in the system of atom interacting with two-mode cavity[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(12): 1227003.
- 卢道明, 邱昌东. 原子与双模腔相互作用系统中的纠缠特性[J]. *光学学报*, 2013, 33(12): 1227003.
- 8 Lu Daoming. Quantum discord in the system of two two-level atoms interacting with few-photon superposition states cavity[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(2): 022701.
- 卢道明. 双二能级原子与少光子数叠加态腔场耦合中的量子失协[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(2): 022701.
- 9 Yu T, Eberly J H. Phonon decoherence of quantum entanglement: robust and fragile states[J]. *Phys Rev B*, 2002, 66(19): 193306.
- 10 Yu T, Eberly J H. Qubit disentanglement and decoherence via dephasing[J]. *Phys Rev B*, 2003, 68(16): 165322.
- 11 Yu T, Eberly J H. Anomalous specific-heat jump in a two-component ultracold fermi Gas[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, 97(14): 140404.
- 12 Yu T, Eberly J H. Quantum open system theory: bipartite aspects[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, 97(14): 140403.
- 13 Sun Z, Wang X, Sun C P. Disentanglement in a quantum-critical environment[J]. *Phys Rev A*, 2007, 75(6): 062312.
- 14 Feng Chuan, Sachuerfu, Li Hongxing. Entanglement of an atom interacting with Glauber-Lachs state in multiphoton Jaynes-Cummings model[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(5): 0527001.
- 冯川, 萨楚尔夫, 李红星. 多光子 Jaynes-Cummings 模型中原子与 Glauber-Lachs 场态相互作用的量子纠缠[J]. *光学学报*, 2013, 33(5): 0527001.
- 15 Ann K, Jaeger G. Local-dephasing-induced entanglement sudden death in two-component finite-dimensional systems [J]. *Phys Rev A*, 2007, 76(4): 044101.
- 16 Ann K, Jaeger G. Disentanglement and decoherence in two-spin and three-spin systems under dephasing[J]. *Phys Rev B*, 2007, 75(11): 115307.
- 17 Salles A, Melo F, Almeida M P, *et al.*. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment[J]. *Phys Rev A*, 78(2): 022322.
- 18 Laurat J, Choi K S, Kimble H J, *et al.*. Heralded entanglement between atomic ensembles: preparation, decoherence, and scaling[J]. *Phys Rev L*, 2007, 99(18): 180504.
- 19 Lopez C E, Romero G, Lastra F, *et al.*. Sudden birth versus sudden death of entanglement in multipartite systems[J]. *Phys Rev L*, 2008, 101(8): 080503.
- 20 Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R, *et al.*. Mixed-state entanglement and distillation: is there a “Bound” entanglement in nature[J]. *Phys Rev L*, 1998, 80(24): 5239-5242.
- 21 Song Wei, Chen Lin, Zhu Shiliang. Sudden death of distillability in qutrit-qutrit systems[J]. *Phys Rev A*, 2009, 80(1): 012331.
- 22 Toth G, Knapp C, Guhne O, *et al.*. Optimal spin squeezing inequalities detect bound entanglement in spin models[J]. *Phys Rev L*, 2007, 99(25): 250405.
- 23 Horodecki P, Horodecki M, Horodecki R. Bound entanglement can be activated[J]. *Phys Rev Lett*, 1999, 82(5): 1056-1059.
- 24 Dong Y, Horodecki M, Horodecki R, *et al.*. Irreversibility for all bound entangled states[J]. *Phys Rev L*, 2005, 95(19): 190501.
- 25 Mazhar A. Distillability sudden death in qutrit-qutrit systems under Global and multilocal dephasing[J]. *Phys Rev A*, 2010, 81(4): 042303.
- 26 Mazhar A. Distillability sudden death in qutrit-qutrit systems under amplitude damping[J]. *J Phys B*, 2010, 43(4): 045504.
- 27 Mazhar A. Comments on “Distillability sudden death in qutrit-qutrit systems under thermal reservoirs” [J]. *Chin Phys B*, 2014, 23(9): 090306.
- 28 Wang Shuai. Wigner functions of thermal coherent state[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 29(4): 1101-1104.
- 王帅. 研究热相干态的 Wigner 函数[J]. *光学学报*, 2009, 29(4): 1101-1104.
- 29 Xiao Yuchen. Realignment entanglement criterion of phase damped Gaussian states[J]. *Quant Inf Pro*, 2013, 12(12): 3665-3674.
- 30 Vidal G and Werner R F. Computable measure of entanglement[J]. *Phys Rev A*, 2002, 65(3): 032314.
- 31 Cheng Wei, Xu Fang, Li Hua. Entanglement and distillability in qutrit-qutrit systems by convex linear combination[J]. *Int J Theor Phys*, 2013, 52(4): 1061-1074.