

# 基于最小二乘迭代的随机移相面形检测技术研究

李东 姜宏振 刘勇 刘旭

中国工程物理研究院激光聚变研究中心, 四川 绵阳 621900

**摘要** 在移相干涉中,由于系统或者环境的原因会产生移相误差,进而导致面形检测产生误差。介绍了最小二乘迭代随机移相算法的基本原理,通过模拟仿真,高精度地迭代出原始面形。针对随机移相可能引起迭代得到的面形与真实面形相反的现象,理论上分析了其产生的原因。提出在最小二乘迭代随机移相算法中,需要已知移相方向才能准确迭代出真实面形,通过实验进一步证实结论的正确性。给出了干涉仪移相方向标定的可行方法。

**关键词** 测量; 面形检测; 干涉法; 最小二乘迭代; 随机移相; 移相方向

中图分类号 O436.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP52.051202

## Research on Randomly Phase Shifting Surface Measurement Based on Least-Squares Iteration

Li Dong Jiang Hongzhen Liu Yong Liu Xu

Research Center of Laser Fusion, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, China

**Abstract** In phase shifting interferometry, surface measurement error will exist due to the phase shifting error resulted from the system or environment. The principle of the least-squares iterative algorithm with randomly phase shifting is introduced. The original surface can be reconstructed with high accuracy by iteration in the numerical simulation. The phenomenon that the reconstructed surface may be inverted to the actual one because of the randomly phase shifting is analyzed. It is proposed that the phase shifting orientation should be known in this algorithm to achieve correct results. Experiments are carried out for verification. The calibration method of the phase shifting direction of the interferometer is indicated.

**Key words** measurement; surface measurement; interferometry; least-squares iteration; randomly phase shifting; phase shifting direction

**OCIS codes** 120.2650; 120.3180; 120.6650; 260.3160

## 1 引言

随着国家投入大量经费研究惯性约束聚变和空间光学等重大工程项目,对大口径精密光学元件的需求越来越大<sup>[1]</sup>。大口径平面镜作为其中的主要元件,对其面形的精度要求越来越高,对检测设备和检测方法提出了更高要求。移相干涉仪<sup>[2-4]</sup>可用于精确测定光学元件的面形偏差<sup>[5]</sup>,但在移相过程中不可避免会受到机械应力、环境振动、气流扰动等影响导致移相误差,从而使面形测量产生较大误差<sup>[6]</sup>。为此,近几十年来大量科学家致力于移相干涉算法的研究。2004年,Wang等<sup>[7]</sup>对最小二乘迭代法改进算法进行了研究,只需不少于3幅干涉图即可求得面形分布。2008年,徐建程等<sup>[8]</sup>对基于最小二乘迭代的空载波相移算法进行了研究,能进一步减少迭代次数并提高算法精度。2012年,郭仁慧等<sup>[9-10]</sup>在随机移相算法的基础上,对波长调谐随机移相算法进行了研究,将其应用于波长移相干涉仪中,解决了长腔长下的面形计算问题。2013年,文刚等<sup>[11]</sup>对斐索型波长移相干涉仪进行了研究,提出了一种利用干涉图直接计算定步长移相值的两帧差分平均移相算法。

本文对最小二乘迭代随机移相算法进行了介绍,并对一个已知面形进行了迭代模拟,精确地迭代出了原始面形。在模拟过程中,发现随机移相可能致使迭代出的面形与真实面形相反。针对这一现象进行了理论分析,提出在最小二乘迭代随机移相算法重构面形过程中,需要已知移相方向才能准确迭代出真实面

收稿日期: 2014-11-14; 收到修改稿日期: 2014-12-23; 网络出版日期: 2015-03-24

作者简介: 李东(1988—),男,硕士,研究实习员,主要从事光学精密检测技术方面的研究。E-mail: zjulid@126.com

形。随后在实验中进一步证实结构的正确性。最后,为了解决移相方向的判定问题,给出了干涉仪移相方向标定的方法。

## 2 最小二乘迭代原理

通常,移相干涉仪中的参考波前和被测波前可表示为

$$W_r(x, y, t) = a_r(x, y) \exp\{i[\phi_r(x, y) - \delta(t)]\}, \quad (1)$$

$$W_i(x, y) = a_i(x, y) \exp[i\phi_i(x, y)], \quad (2)$$

式中  $a_r(x, y)$  和  $a_i(x, y)$  为波前振幅,  $\phi_r(x, y)$  和  $\phi_i(x, y)$  为波前相位,  $\delta(t)$  为移相量。干涉光强可表示为

$$I(x, y, t) = A(x, y) + B(x, y) \cos[\phi(x, y) + \delta(t)], \quad (3)$$

式中  $A(x, y)$  为背景光强,  $B(x, y)$  为光强调制度,  $\phi(x, y)$  为相位差。

采用最小二乘迭代算法可以从已知干涉图中求解出波前相位分布,整个迭代过程主要包括3个步骤<sup>[7,9]</sup>:

1) 已知移相量求解相位分布

干涉光强(3)式可以改写为

$$I_{ij}^t = A_{ij} + B_{ij} \cos(\phi_j + \delta_i), \quad (4)$$

式中  $i$  为第  $i$  幅干涉图( $i=1,2,3,\dots,M, M$  为干涉图幅数),  $j$  为每一幅干涉图中的一个像素点( $j=1,2,3,\dots,N, N$  为一幅干涉图像素总数),  $\phi_j$  为第  $j$  个像素点的相位,  $\delta_i$  为第  $i$  次移相量, 上标  $t$  表示理论值。

假设  $A_{ij}$  和  $B_{ij}$  与干涉图的序号  $i$  无关, 只与像素点序号  $j$  有关, 即  $A_{1j} = A_{2j} = \dots = A_{Mj}$ ,  $B_{1j} = B_{2j} = \dots = B_{Mj}$ , 令  $a_j = A_{ij}$ ,  $b_j = B_{ij} \cos \phi_j$ ,  $c_j = -B_{ij} \sin \phi_j$ 。则(4)式可改写为

$$I_{ij}^t = a_j + b_j \cos \delta_i + c_j \sin \delta_i. \quad (5)$$

由此可得干涉光强理论值  $I_{ij}^t$  和实际测得的干涉光强  $I_{ij}$  的误差平方和可表示为

$$S_j = \sum_{i=1}^M (I_{ij}^t - I_{ij})^2 = \sum_{i=1}^M (a_j + b_j \cos \delta_i + c_j \sin \delta_i - I_{ij})^2. \quad (6)$$

根据最小二乘原理,  $S_j$  取最小值,  $\partial S_j / \partial a_j = 0$ ,  $\partial S_j / \partial b_j = 0$ ,  $\partial S_j / \partial c_j = 0$ , 即满足

$$X_j = A^{-1} B_j, \quad (7)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} M & \sum_{i=1}^M \cos \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin \delta_i \\ \sum_{i=1}^M \cos \delta_i & \sum_{i=1}^M \cos^2 \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin \delta_i \cos \delta_i \\ \sum_{i=1}^M \sin \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin \delta_i \cos \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin^2 \delta_i \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$X_j = [a_j \quad b_j \quad c_j]^T, \quad (9)$$

$$B_j = \left[ \sum_{i=1}^M I_{ij} \quad \sum_{i=1}^M I_{ij} \cos \delta_i \quad \sum_{i=1}^M I_{ij} \sin \delta_i \right]^T. \quad (10)$$

通过求解  $X_j$  可以求解出相位分布

$$\phi_j = \arctan(-c_j/b_j). \quad (11)$$

2) 已知相位分布求解移相量

对于干涉光强式, 假设  $A_{ij}$  和  $B_{ij}$  与像素点序号  $j$  无关, 只与干涉图的序号  $i$  有关, 即  $A_{i1} = A_{i2} = \dots = A_{iN}$ ,  $B_{i1} = B_{i2} = \dots = B_{iN}$ , 令  $a'_i = A_{ij}$ ,  $b'_i = B_{ij} \cos \delta_i$ ,  $c'_i = -B_{ij} \sin \delta_i$ 。则(4)式可改写为

$$I_{ij}^t = a'_i + b'_i \cos \phi_j + c'_i \sin \phi_j. \quad (12)$$

干涉光强理论值  $I_{ij}^t$  和实际测得的干涉光强  $I_{ij}$  的误差平方和同样可表示为

$$S'_i = \sum_{j=1}^N (I_{ij}^t - I_{ij})^2 = \sum_{j=1}^N (a'_i + b'_i \cos \phi_j + c'_i \sin \phi_j - I_{ij})^2. \quad (13)$$

根据最小二乘原理,  $S'_i$  取最小值,  $\partial S'_i / \partial a'_i = 0$ ,  $\partial S'_i / \partial b'_i = 0$ ,  $\partial S'_i / \partial c'_i = 0$ , 即满足

$$\mathbf{X}'_i = \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{B}'_i, \quad (14)$$

式中

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} N & \sum_{j=1}^N \cos \phi_j & \sum_{j=1}^N \sin \phi_j \\ \sum_{j=1}^N \cos \phi_j & \sum_{j=1}^N \cos^2 \phi_j & \sum_{j=1}^N \sin \phi_j \cos \phi_j \\ \sum_{j=1}^N \sin \phi_j & \sum_{j=1}^N \sin \phi_j \cos \phi_j & \sum_{j=1}^N \sin^2 \phi_j \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{X}'_i = [a'_i \quad b'_i \quad c'_i]^T, \quad (16)$$

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N I_{ij} & \sum_{j=1}^N I_{ij} \cos \phi_j & \sum_{j=1}^N I_{ij} \sin \phi_j \end{bmatrix}^T. \quad (17)$$

通过求解  $\mathbf{X}'_i$  可以求解出移相量

$$\delta_i = \arctan(-c'_i/b'_i). \quad (18)$$

### 3) 收敛条件

上述两步可以实现循环迭代, 每完成一次循环迭代可以得到一组新的移相量, 经过  $k$  次迭代计算后, 满足收敛条件

$$|(\delta_i^k - \delta_i^k) - (\delta_i^{k-1} - \delta_i^{k-1})| < \varepsilon, \quad (19)$$

式中  $\varepsilon$  为预设迭代精度, 一般设定为一个小量,  $k$  为迭代次数。按照上述循环迭代可以精确地求解出原始面形相位分布和移相量。

## 3 模拟仿真及实验

### 3.1 模拟仿真

根据上述最小二乘迭代原理, 设像素数为  $128 \text{ pixel} \times 128 \text{ pixel}$ , 波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ , 模拟原始面形为  $\phi = 2\pi \times \{0.7 - 0.5 \times [(x - x_0)/R]^2 - 0.3 \times [(y - y_0)/R]^2\}$ , 其峰谷(PV)值为  $0.8 \lambda$ , 面形如图 1(a)所示, 设收敛条件  $\lambda = 1 \times 10^{-5}$ , 移相步数为 4 步, 利用最小二乘迭代算法求解出的面形如图 1(b)所示, 面形误差如图 1(c)所示, 面形误差 PV 值为  $9.29 \times 10^{-7} \lambda$ 。

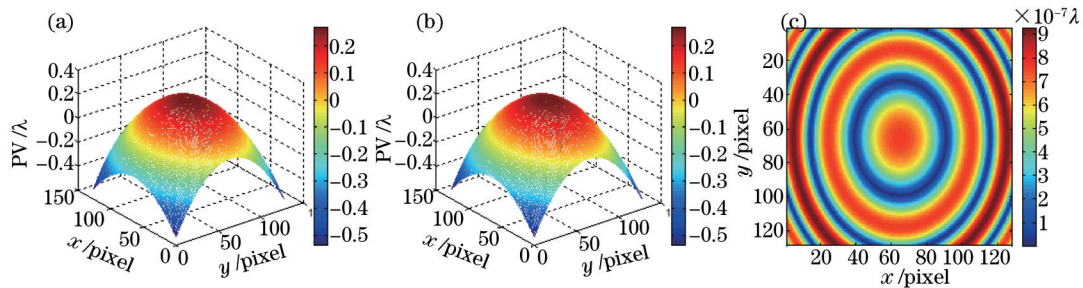


图 1 (a) 原始面形; (b) 最小二乘迭代出面形; (c) 面形误差

Fig.1 (a) Original surface; (b) reconstructed surface; (c) error between original surface and reconstructed one

在模拟仿真过程中, 发现当初始移相量为随机移相时, 最小二乘迭代算法在满足收敛时求解出的面形分布有时与原始面形相同如图 2(a)所示, 有时会出现与原始面形相反的情况, 如图 2(b)所示。在光学元件面形加工过程中, 如果检测出的面形与真实面形相反, 将导致面形加工错误的严重后果, 因此需要避免检测出的面形与真实面形相反情况的发生。

由图 2(c)和图 2(d)可以看出, 初始移相为相同的随机移相, 当迭代出面形与原始面形相同时, 迭代收敛时的移相量和真实移相量完全重合; 当迭代出的面形与原始面形相反时, 迭代收敛时的移相量和真实移相量正好相反。

根据余弦函数的对称性, 干涉光强(3)式也具有对称形式, 即

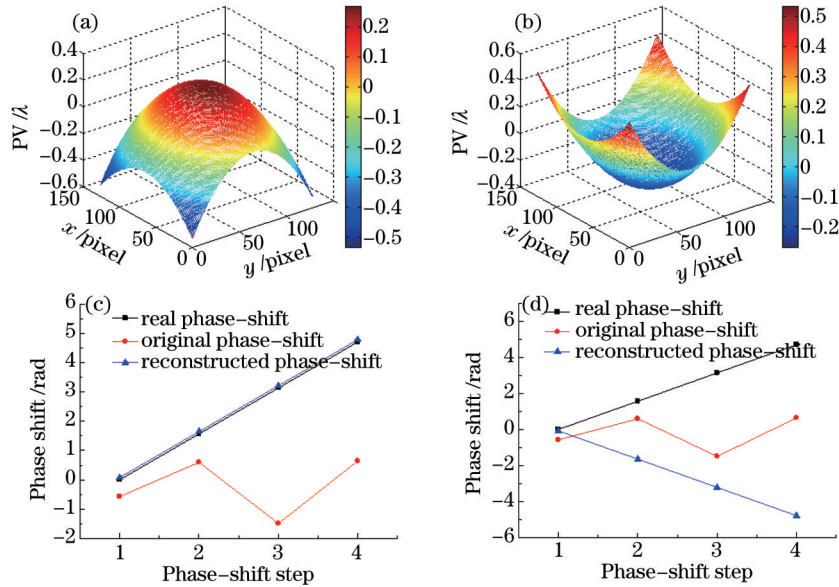


图2 (a) 最小二乘迭代出正确面形; (b) 最小二乘迭代出相反面形; (c) 迭代出(a)面形移相量关系; (d) 迭代出(b)面形移相量关系

Fig.2 (a) Reconstructed correct surface; (b) reconstructed opposite surface; (c) phase shifting relationship corresponding to (a); (d) phase shifting relationship corresponding to (b)

$$I = A + B \cos(\phi + \delta) = A + B \cos[-\phi + (-\delta)]. \quad (20)$$

由于相位分布  $\phi$  和移相量  $\delta$  产生的干涉光强与相位分布  $-\phi$  和移相量  $-\delta$  产生的干涉光强为同一干涉图。因此在采用干涉法求解相位分布时,在不知道移相量  $\delta$  的方向的情况下,求解相位分布  $\phi$  可能会出现迭代出面形与原始面形相反的情况。因此在随机移相最小二乘迭代求解相位分布时,为防止迭代出相反面形,需要已知移相方向。

### 3.2 实验

针对上述模拟的结果,运用 Zygo 激光干涉仪进行实验验证。该干涉仪采用 Fizeau 干涉仪原理,移相方式为波长移相。测量环境温度为  $23\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 0.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,相对湿度为  $40\% \pm 2\%$ 。在该条件下,该干涉仪的测量重复性优于  $\lambda/100$ 。

利用此干涉系统完成了对一块前后表面有一定楔角的平面反射镜前表面的面形测量,如图 3(a)为干涉仪采集到的其中一幅干涉图,图 3(b)为在已知移相方向的情况下,随机移相最小二乘迭代出的正确面形,图 3(c)为在不知道移相方向的情况下,随机移相最小二乘迭代出的相反面形。

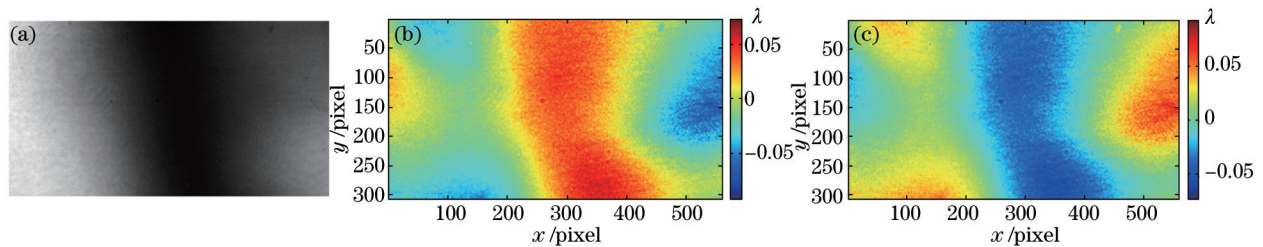


图3 (a) 采集的一幅干涉图; (b) 最小二乘迭代出正确面形; (c) 最小二乘迭代出相反面形

Fig.3 (a) One of the acquired interferograms; (b) reconstructed correct surface; (c) reconstructed opposite surface

## 4 移相方向标定

干涉仪的移相方向将直接决定面形检测的正确与否,因此在利用干涉仪开展面形检测工作前,须对干涉仪移相方向进行标定。其标定方法为:如图 4(a)所示放置后标准镜,使后标准镜和前标准镜形成一个极小的夹角  $\theta$ ,此时后标准镜反射光点为图 4(b)中 A 点。调整后标准镜使  $\theta$  角慢慢变小,则 A 点慢慢向 O 点靠近,直至出现图 4(c)所示干涉条纹。此时 A 点和 O 点部分重合,但仍可判断  $\theta$  角为正值,即仍可判定后标准镜相对于前标准镜倾斜方向与图 4(a)所示倾斜方向一致。在上述条件下,利用 Zygo 干涉仪对后标准镜进行

测量,无倾斜时测得的结果如图4(d)所示。图4(e)为仅利用干涉仪测得的干涉图,在假设移相方向为 $+\pi/2$ 的情况下,利用四步移相算法计算出来的结果。图4(d)和(e)倾斜方向一致,说明干涉仪的真实移相方向为 $+\pi/2$ 方向。利用此方法即可实现对干涉仪移相方向的标定。

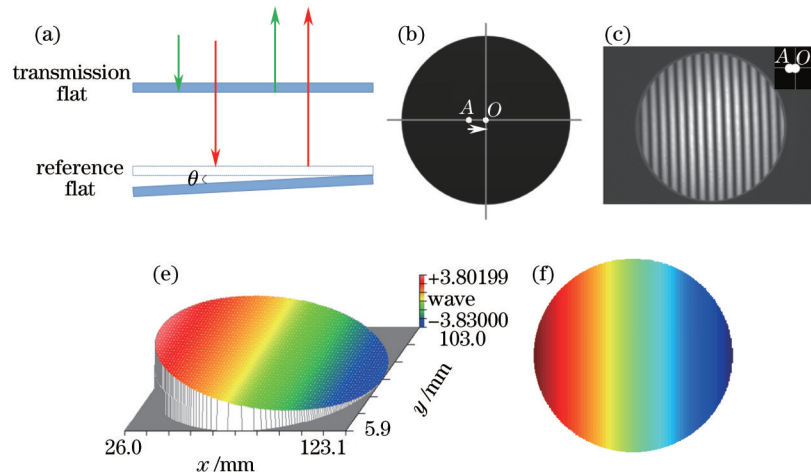


图4 移相方向标定实验

Fig.4 Calibration experiment of phase shifting direction

## 5 结 论

在移相干涉中,由于系统或者环境的原因,会产生移相误差进而导致面形检测产生误差。本文通过模拟仿真,利用最小二乘迭代随机移相算法高精度地迭代出了原始面形。仿真中发现随机移相可能引起迭代出的面形与真实面形相反的现象,理论上分析了现象产生原因。提出在最小二乘迭代随机移相算法中,需要已知移相方向才能准确迭代出真实面形。通过实验进一步证实了结论的正确性。最后对移相方向进行研究,给出了干涉仪移相方向的标定方法,实验证实了其可行性。

## 参 考 文 献

- 1 C R Wolfe, J K Lawson. The measurement and analysis of wavefront structure from large aperture ICF optics[C]. SPIE, 1995, 2633: 361-385.
- 2 Leslie L Deck, James A Soobitsky. Phase-shifting via wavelength tuning in very large aperture interferometers[C]. SPIE, 1999, 3782: 432-442.
- 3 Chiayu Ai, Robert Knowlden, Joseph Lamb. Design of a 24-in phase shifting interferometer[C]. SPIE, 1996, 2870: 565-572.
- 4 Wu Xuhua, Chen Lei. Key techniques in large-aperture phase-shifting interferometer via PZT[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(s1): s112011.  
武旭华, 陈 磊. 大口径PZT移相干涉仪的几个关键技术[J]. 光学学报, 2014, 34(s1): s112011.
- 5 Liu Jiang, Miao Erlong, Qu Yi, *et al.*. Measurement of optical surface based on intensity self-calibration phase-shift algorithm[J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(8): 2007-2013.  
刘 江, 苗二龙, 曲 艺, 等. 基于光强自标定移相算法检测光学面形[J]. 光学精密工程, 2014, 22(8): 2007-2013.
- 6 Zuo Fen, Chen Lei. Development of anti-vibration technology in simultaneous phase-shifting interferometry[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2006, 43(11): 43-48.  
左 芬, 陈 磊. 同步移相抗振光干涉测量技术研究进展[J]. 激光与光电子学进展, 2006, 43(11): 43-48.
- 7 Zhaoyang Wang, Bongtae Han. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms [J]. Opt Lett, 2004, 29(14): 1671-1673.
- 8 Xu Jiancheng, Xu Qiao, Chen Jianping. Spatial-carrier phase-shifting algorithm based on least-squares iteration[J]. Chinese J Lasers, 2008, 35(4): 592-596.  
徐建程, 许 乔, 陈建平. 基于最小二乘迭代的空载波移相算法[J]. 中国激光, 2008, 35(4): 592-596.
- 9 Guo Renhui, Li Jianxin, Zhu Rihong, *et al.*. Research on the randomly phase shifting algorithm with wavelength tuning [J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(5): 0508002.

- 郭仁慧, 李建欣, 朱日宏, 等. 波长调谐随机移相算法的研究[J]. 中国激光, 2012, 39(5): 0508002.
- 10 Guo Renhui, Li Jianxin, Zhu Rihong, *et al.*. An adaptive phase selecting method of wavelength tuning at long interference cavity length[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(1): 0112004.
- 郭仁慧, 李建欣, 朱日宏, 等. 长干涉腔波长移相计算的自适应相位筛选法[J]. 光学学报, 2013, 33(1): 0112004.
- 11 Wen Gang, Su Dongqi, Sui Yongxin, *et al.*. Calibration of Fizeau wavelength-tuned phase-shifting interferometer based on two-frame differential average phase-shifting algorithm[J]. *Chinese J Lasers*, 2013, 40(11): 1108004.
- 文 刚, 苏东奇, 隋永新, 等. 基于两帧差分平均移相算法标定斐索型波长移相干涉仪[J]. 中国激光, 2013, 40(11): 1108004.

栏目编辑: 何卓铭