

可控放大率重建物光场中的相位畸变

钱晓凡

昆明理工大学理学院激光研究所, 云南 昆明 650500

摘要 可控放大率物光场重建算法可以有效利用数字全息图的空间带宽积,但同时会引入相位畸变。通过研究现有各种可控放大率物光场重建算法,导出了畸变相位的数学表达式。结果表明:无论对菲涅耳全息还是无透镜傅里叶变换全息,如果将“+1”级或“-1”级物光场放大,则重建物光场上都会叠加有一个由球面波产生的二次相位畸变,且“+1”级与“-1”级物光场所叠加的球面波相为共轭复数。如果将该球面波波长折算为记录全息图时的光波长,则球面光波半径相同,完全取决于放大率和物距,与算法无关。

关键词 全息;物光场重建;可控放大率;相位畸变

中图分类号 O438.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP52.050901

Phase Distortion in Object Wavefront Reconstructed by Adjustable Magnification Algorithms

Qian Xiaofan

Laser Institute, College of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650500, China

Abstract The adjustable magnification object wavefront reconstruction algorithm effectively uses the space bandwidth product of digital holograms, but also introduces phase distortion. Mathematical expressions of the distortion phase correspond to each adjustable magnification algorithm are derived from present studies. The results indicate that a quadratic phase distortion superimpose on the magnified object wavefront, no matter the wavefront is reconstructed from Fresnel or lensless Fourier transform digital holograms. The phase distortions of +1 and -1 orders constructed wavefronts are conjugate complexes to each other. The phase distortions is generated by a spherical wave, and the radius of the wave is irrelevant to algorithm selection, but mainly determined by magnification and the object distance.

Key words holography; wavefront reconstruction; adjustable magnification; phase distortion

OCIS codes 090.1995; 090.1000; 090.2880

1 引言

由于可以数字化地重建物光场的振幅和相位,数字全息术在光电显示和干涉计量两个方面越来越受到重视。受全息术基本原理的限制,大多数情况下,数字化地重建物光场必须用计算机完成衍射计算,其中基于菲涅耳衍射积分的一次快速傅里叶变换(S-FFT)算法应用广泛。但S-FFT算法重建物光场的尺寸在重建平面上所占面积较小,浪费了数字全息图宝贵的空间带宽积,大大降低了再现像的分辨率,同时给再现光场的相位重构带来困难^[1-2],因此对重建物光场进行放大成为必须。通过补零扩大重建物光场尺寸几乎是顺理成章的放大算法,遗憾的是补零显著增加计算量^[3],同时所用S-FFT算法重建物光场的尺寸是波长等物理量的函数,这给数字全息另一个蓬勃发展的应用——彩色数字全息重建再现像带来了麻烦。因为选用S-FFT算法,彩色数字全息中不同波长的再现像放大率不同,很难实现三种波长再现像的完美重合,严重影响全息像真实再现色彩^[4-6]。

将重建光设为球面波,利用衍射的角谱理论进行可控放大率物光场重建,是解决这些困难的有利方法,

收稿日期: 2014-11-06; 收到修改稿日期: 2014-12-22; 网络出版日期: 2015-03-26

基金项目: 国家自然科学基金(61067004)

作者简介: 钱晓凡(1963—),男,教授,硕士生导师,主要从事信息光学理论及数字全息等方面的研究。

E-mail: qianxiaofan1@sina.com

也称为D-FFT算法^[6]。根据无透镜傅里叶变换全息的特点,还提出了一种基于等效空间频率的可控放大率算法,适用于无透镜傅里叶变换全息重建物光场的缩放^[7]。前期研究集中在如何获得质量较高的重建图像,如怎样准确地获取局域物光场的频谱,从而让重建物光场布满重建平面等^[8],但对由物光场重建算法引入的相位畸变却鲜见专门讨论。

事实上无论选用什么算法对全息像进行放大重构,都有引入相位畸变的可能。由于鲜有专门的研究,相位畸变的性质一直没有得到合理的分析。考虑到全息干涉计量通过重建物光场的相位实现检测,显然,准确重建物光场的相位是顺利完成检测的基本条件,而实际中消除相位畸变往往比较麻烦^[9-10],对重构算法引入的相位畸变作专门讨论是有必要的。

本文对现有各种可控放大率物光场重建算法进行理论推导,导出不同算法相位畸变的数学表达式。研究表明,只要放大率不等于1,现有的各种可控放大率物光场重建算法均会引入一个二次相位畸变。利用导出的相位畸变数学表达式,可以方便地校正这些相位畸变。分别用菲涅耳数字全息和无透镜傅里叶变换数字全息进行了实验验证,并对校正相位畸变前后的重建相位进行了比较,证明结论的正确性。

2 全息的记录、重建和分类

取如图1所示的数字全息系统简化光路及坐标图来讨论物光场的记录与重建。

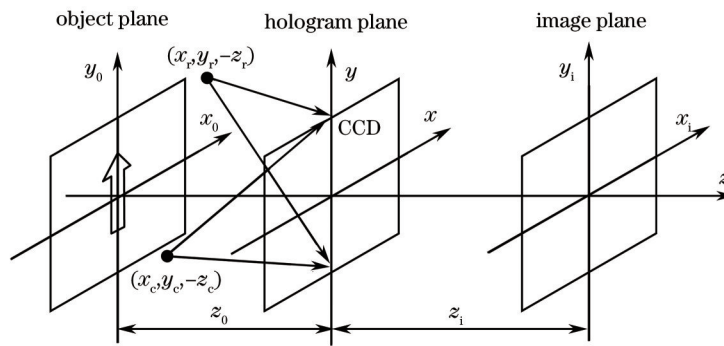


图1 数字全息系统的简化光路及坐标示意图

Fig.1 Simplified optical path of digital holographic system and its coordinates definition

光电转换器件[如电荷耦合器件(CCD)]置于全息图记录面 (x, y) 上。设物面 (x_0, y_0) 上物光场的复振幅为 $\tilde{o}(x_0, y_0)$,根据菲涅耳衍射公式,物光衍射后在全息图记录面上的光场分布为

$$\tilde{O}(x, y) = \frac{\exp(jkz_0)}{j\lambda z_0} \exp\left[\frac{jk}{2z_0}(x^2 + y^2)\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}(x_0, y_0) \exp\left[\frac{jk}{2z_0}(x_0^2 + y_0^2)\right] \exp\left[-j2\pi\left(\frac{x}{\lambda z_0}x_0 + \frac{y}{\lambda z_0}y_0\right)\right] dx_0 dy_0, \quad (1)$$

为了有普遍性,设记录参考光为从 $(x_r, y_r, -z_r)$ 点发出的球面波,在全息记录面上的分布为

$$\tilde{R}(x, y) = A_r \exp\left[\frac{jk}{2z_r}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{jk}{z_r}(xx_r + yy_r)\right], \quad (2)$$

而重建照明光为从 $(x_c, y_c, -z_c)$ 点发出的球面波,在全息记录面上的分布为

$$\tilde{C}(x, y) = A_c \exp\left[\frac{jk}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{jk}{z_c}(xx_c + yy_c)\right]. \quad (3)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$, $k = 2\pi/\lambda$, λ 是光波长, z_0 , z_r 和 z_c 分别是物面到记录面的距离、参考光波的波面半径,以及照明光波的波面半径。记录面上用CCD记录的全息图可表为

$$I_H(x, y) = |\tilde{O}|^2 + |\tilde{R}|^2 + \tilde{O}\tilde{R}^* + \tilde{O}^*\tilde{R}. \quad (4)$$

z_r 分别取有限值和无穷大,对应的分别是球面光波和平面光波记录的菲涅耳全息图。在 $z_r = z_0$ 的特例下,记录的则是有重要意义的无透镜傅里叶变换全息图。无论是哪种类型的全息图,选择半径不同或波长不同的球面重建照明光,可以得到横向放大率不同的重建物光场,从而实现可控放大率物光场重建。

3 可控放大率物光场重建算法及其相位畸变

物光场重建包括“+1”级(又称原始像)重建和“-1”级(又称共轭像)重建,分别对应含在(4)式中的光场 \tilde{O}

和 \tilde{O} 的重建。为了得到 \tilde{O} 和 \tilde{O}^* , 必须先求得 $\tilde{O}\tilde{R}^*$ 和 $\tilde{O}^*\tilde{R}$, 通常有两种方法可以采用: 在 $I_H(x, y)$ 的频谱面设计合适的滤波窗取出对应光场的频谱, 通过逆傅里叶变换得到需要的光场^[11]; 在 $I_H(x, y)$ 的 S-FFT 重建像平面截取需要放大的像(或其局部), 再通过衍射逆运算得到需要的光场^[12], 这里不作赘述。

3.1 菲涅耳全息图的可控放大率物光场重建

首先推导“+1”级物光场的重建。无论是用球面光波或平面光波记录的全息图, 用全息图 $I_H(x, y)$ 求得光场 $\tilde{O}\tilde{R}$ 后乘 \tilde{R} , 得到沿光轴传播的物光 \tilde{O} 。此时用(3)式给出的重建照明光再现, 取 $x_c=y_c=0$, 重建物光场出现在像平面的中心。按照菲涅耳衍射计算公式, 忽略 CCD 孔径函数的影响, 同时为简化公式省略常数(下同), 在像距 z_i 处重建的“+1”级物光场应为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{+1}(x_i, y_i) = & \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}\tilde{O}\tilde{R}^*\tilde{R} \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{jk}{z_i}(xx_i + yy_i)\right] dx dy = \\ & \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}(x_o, y_o) \exp\left[\frac{jk}{2z_o}(x_o^2 + y_o^2)\right] I_1(x_o, y_o) I_2(x_o, y_o) dx_o dy_o, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$I_1(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-jk\left(\frac{x_o}{z_o} + \frac{x_i}{z_i}\right)x + \left(\frac{jk}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i} + \frac{jk}{2z_c}\right)x^2\right] dx, \quad (6)$$

$$I_2(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-jk\left(\frac{y_o}{z_o} + \frac{y_i}{z_i}\right)y + \left(\frac{jk}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i} + \frac{jk}{2z_c}\right)y^2\right] dy. \quad (7)$$

由 $1/z_o + 1/z_i + 1/z_c = 0$, 取 $z_c = Mz_o/(1 - M)$, 在 $z_i = -Mz_o$ 处可以得到放大 M (取 $M > 0$, 下同) 倍的清晰像。因为此时

$$I_1(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-j\frac{2\pi}{z_o\lambda}\left(x_o - \frac{x_i}{M}\right)x\right] dx = z_o\lambda\delta\left(x_o - \frac{x_i}{M}\right), \quad (8)$$

$$I_2(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-j\frac{2\pi}{z_o\lambda}\left(y_o - \frac{y_i}{M}\right)y\right] dy = z_o\lambda\delta\left(y_o - \frac{y_i}{M}\right). \quad (9)$$

将(8)式和(9)式代入(5)式有重建的“+1”级物光场

$$\tilde{U}_{+1}(x_i, y_i) = \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}(x_o, y_o) \exp\left[\frac{jk}{2z_o}(x_o^2 + y_o^2)\right] \delta\left(x_o - \frac{x_i}{M}, y_o - \frac{y_i}{M}\right) dx_o dy_o = \tilde{o}\left(\frac{x_i}{M}, \frac{y_i}{M}\right) \Phi_{+1}(x_i, y_i). \quad (10)$$

式中 $\Phi_{+1}(x_i, y_i) = \exp\left[\frac{jk}{2} \frac{1-M}{M^2 z_o}(x_i^2 + y_i^2)\right]$, 说明重建物光场就是物面上的光场, 但横向放大了 M 倍, 且叠加有一个二次畸变相位, 该相位由一个波长为 λ 、半径为 $r_{+\phi}$ 的球面光波产生:

$$r_{+\phi} = M^2 z_o / (1 - M). \quad (11)$$

接着推导“-1”级物光场的重建。无论是球面光波或平面光波记录的菲涅耳全息图, 将用全息图 $I_H(x, y)$ 求得的光场 $\tilde{O}^*\tilde{R}$ 乘以 \tilde{R}^* , 得到沿光轴传播的物光 \tilde{O}^* , 用同前的重建照明光再现, 在像距 z_i 处重建的“-1”级物光场应为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{-1}(x_i, y_i) = & \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}\tilde{O}^*\tilde{R}\tilde{R}^* \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{jk}{z_i}(xx_i + yy_i)\right] dx dy = \\ & \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}^*(x_o, y_o) \exp\left[-\frac{jk}{2z_o}(x_o^2 + y_o^2)\right] I_1(x_o, y_o) I_2(x_o, y_o) dx_o dy_o, \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$I_1(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-jk\left(-\frac{x_o}{z_o} + \frac{x_i}{z_i}\right)x + \left(-\frac{jk}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i} + \frac{jk}{2z_c}\right)x^2\right] dx, \quad (13)$$

$$I_2(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-jk\left(-\frac{y_o}{z_o} + \frac{y_i}{z_i}\right)y + \left(-\frac{jk}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i} + \frac{jk}{2z_c}\right)y^2\right] dy. \quad (14)$$

由 $-1/z_o + 1/z_i + 1/z_c = 0$, 取 $z_c = Mz_o/(M - 1)$, 在 $z_i = Mz_o$ 处可以得到放大 M 倍的清晰像。因为此时(13)式和(14)式分别可以简化为

$$I_1(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[j\frac{2\pi}{z_o\lambda}\left(x_o - \frac{x_i}{M}\right)x\right] dx = z_o\lambda\delta\left(x_o - \frac{x_i}{M}\right), \quad (15)$$

$$I_2(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[j\frac{2\pi}{z_o\lambda}\left(y_o - \frac{y_i}{M}\right)y\right] dy = z_o\lambda\delta\left(x_o - \frac{y_i}{M}\right). \quad (16)$$

将(15)式和(16)代入(12)式有重建“-1”级物光场

$$\tilde{U}_{-1}(x_i, y_i) = \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}^*(x_o, y_o) \exp\left[-\frac{jk}{2z_o}(x_o^2 + y_o^2)\right] \delta\left(x_o - \frac{x_i}{M}, y_o - \frac{y_i}{M}\right) dx_o dy_o = \tilde{o}^*\left(\frac{x_i}{M}, \frac{y_i}{M}\right) \Phi_{-1}(x_i, y_i). \quad (17)$$

式中 $\Phi_{-1}(x_i, y_i) = \exp\left[\frac{jk}{2} \frac{M-1}{M^2 z_o}(x_i^2 + y_i^2)\right]$, 说明重建物光场是物面上光场的共轭光, 横向放大了 M 倍, 叠加有一个二次畸变相位, 由波长为 λ 、半径为 $r_{-\phi}$ 的球面光波产生

$$r_{-\phi} = M^2 z_o / (M - 1). \quad (18)$$

3.2 无透镜傅里叶变换全息图的可控放大率物光场重建

3.2.1 用球面波照射的无透镜傅里叶变换全息图可控放大率物光场重建

3.1 节中用于菲涅耳全息图的可控放大率物光场重建算法, 也可以用于无透镜傅里叶变换全息图, 不过因为记录无透镜傅里叶变换全息图时 $z_r = z_o$, 实际重建时略有差异。

同样先推导“+1”级物光场的重建。因为 $z_r = z_o$, 用无透镜傅里叶变换全息图 $I_H(x, y)$ 得到的光场 $\tilde{O}\tilde{R}^*$ 为

$$\tilde{O}(x, y)\tilde{R}^*(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}(x_o, y_o) \exp\left[\frac{jk}{2z_o}(x_o^2 + y_o^2)\right] \times \exp\left[j2\pi\left(\frac{x}{\lambda z_o}x_r + \frac{y}{\lambda z_o}y_r\right)\right] \exp\left[-j2\pi\left(\frac{x}{\lambda z_o}x_o + \frac{y}{\lambda z_o}y_o\right)\right] dx_o dy_o. \quad (19)$$

所以重建“+1”级物光场时, 在无透镜傅里叶变换全息图 $I_H(x, y)$ 得到的光场 $\tilde{O}\tilde{R}^*$ 上只需乘以一个平面波 \tilde{R}' , 就可以实现用(3)式给出的重建照明光再现(同样取 $x_c = y_c = 0$), 重建物光场沿光轴传播, 其中平面波

$$\tilde{R}'(x, y) = \exp\left[-j2\pi\left(\frac{x}{\lambda z_o}x_r + \frac{y}{\lambda z_o}y_r\right)\right]. \quad (20)$$

按照菲涅耳衍射计算公式, 在像距 z_i 处重建的“+1”级物光场应为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{+1}(x_i, y_i) &= \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{O}(x, y)\tilde{R}^*(x, y)\tilde{R}'(x, y)\tilde{C}(x, y)] \times \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{jk}{z_i}(xx_i + yy_i)\right] dx dy = \\ &= \exp\left[\frac{jk}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}(x_o, y_o) \exp\left[\frac{jk}{2z_o}(x_o^2 + y_o^2)\right] I(x_o, y_o) dx_o dy_o, \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$I(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{jk}{z_i}x_i + \frac{jk}{z_o}x_o\right)x + \left(\frac{jk}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i}\right)x^2\right] dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{jk}{z_i}y_i + \frac{jk}{z_o}y_o\right)y + \left(\frac{jk}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i}\right)y^2\right] dy. \quad (22)$$

选取 $z_i = -Mz_o$, $z_c = -z_i$, 其中 M 为放大倍数, 则

$$I(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z_o}\left(x_o - \frac{x_i}{M}\right)x\right] dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z_o}\left(y_o - \frac{y_i}{M}\right)y\right] dy = (\lambda z_o)^2 \delta\left(x_o - \frac{x_i}{M}, y_o - \frac{y_i}{M}\right). \quad (23)$$

将(23)式代入(21)式有

$$\tilde{U}_{+1}(x_i, y_i) = \tilde{o}\left(\frac{x_i}{M}, \frac{y_i}{M}\right) \exp\left[-\frac{jk}{2Mz_o}(x_i^2 + y_i^2)\right] \exp\left\{\frac{jk}{2z_o}\left[\left(\frac{x_i}{M}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{M}\right)^2\right]\right\} = \tilde{o}\left(\frac{x_i}{M}, \frac{y_i}{M}\right) \Phi_{+1}(x_i, y_i), \quad (24)$$

式中 $\Phi_{+1}(x_i, y_i) = \exp\left[\frac{jk}{2} \frac{1-M}{M^2 z_o}(x_i^2 + y_i^2)\right]$, 说明重建物光场就是物面上的光场, 横向放大了 M 倍, 也叠加有一个二次畸变相位, 由波长为 λ 、半径为 $r_{+\phi}$ 的球面光波产生

$$r_{+\phi} = M^2 z_o / (1 - M). \quad (25)$$

接着再推导“-1”级物光场的重建: 在无透镜傅里叶变换全息图 $I_H(x, y)$ 得到的光场 $\tilde{O}\tilde{R}$ 上乘以一个平面波 \tilde{R}' , 仍用(3)式给出的重建照明光 \tilde{C} 再现($x_c = y_c = 0$), 不过此时选择

$$\tilde{R}'(x, y) = \exp \left[j2\pi \left(\frac{x}{\lambda z_o} x_r + \frac{y}{\lambda z_o} y_r \right) \right]. \quad (26)$$

按照菲涅耳衍射计算公式,在像距 z_i 处重建的“-1”级物光场应为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{-1}(x_i, y_i) = & \exp \left[\frac{jk}{2z_i} (x_i^2 + y_i^2) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{O}^*(x, y) \tilde{R}(x, y) \tilde{R}'(x, y) \tilde{C}(x, y)] \times \exp \left[\frac{jk}{2z_i} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-\frac{jk}{z_i} (xx_i + yy_i) \right] dx dy = \\ & \exp \left[\frac{jk}{2z_i} (x_i^2 + y_i^2) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}^*(x_o, y_o) \exp \left[-\frac{jk}{2z_o} (x_o^2 + y_o^2) \right] I(x_o, y_o) dx_o dy_o, \end{aligned} \quad (27)$$

式中

$$I(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\left(\frac{jk}{z_i} x_i + \frac{jk}{z_o} x_o \right) x + \left(\frac{jk}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i} \right) x^2 \right] dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\left(\frac{jk}{z_i} y_i + \frac{jk}{z_o} y_o \right) y + \left(\frac{jk}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i} \right) y^2 \right] dy. \quad (28)$$

选取 $z_i = Mz_o, z_c = -z_i$, 其中 M 为放大倍数, 则

$$I(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda z_o} \left[x_o - \left(-\frac{x_i}{M} \right) \right] x \right\} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda z_o} \left[y_o - \left(-\frac{y_i}{M} \right) \right] y \right\} dy = (\lambda z_o)^2 \delta \left[x_o - \left(-\frac{x_i}{M} \right), y_o - \left(-\frac{y_i}{M} \right) \right]. \quad (29)$$

将(29)式代入(27)式有

$$\tilde{U}_{-1}(x_i, y_i) = \tilde{o}^* \left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M} \right) \exp \left[\frac{jk}{2Mz_o} (x_i^2 + y_i^2) \right] \exp \left\{ -\frac{jk}{2z_o} \left[\left(-\frac{x_i}{M} \right)^2 + \left(-\frac{y_i}{M} \right)^2 \right] \right\} = \tilde{o}^* \left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M} \right) \Phi_{-1}(x_i, y_i), \quad (30)$$

式中 $\Phi_{-1}(x_i, y_i) = \exp \left[\frac{jk}{2} \frac{M-1}{M^2 z_o} (x_i^2 + y_i^2) \right]$, 即重建物光场是物面上光场的共轭光, 横向放大了 M 倍, 叠加的二次畸变相位由波长为 λ 、半径为 $r_{-\phi}$ 的球面光波产生

$$r_{-\phi} = M^2 z_o / (M - 1). \quad (31)$$

3.2.2 改变照明光波长的无透镜傅里叶变换全息图可控放大率物光场重建

基于等效空间频率原理的无透镜傅里叶变换全息图物光场重建算法, 也能实现物光场的可控放大率重建, 而且可以通过改变照明球面波的波长调整放大率。文献[7]中没有讨论该算法重建物光场时的相位畸变, 下面推导用改变波长的球面波分别重建“+1”级和“-1”级物光场时, 重建物光场中所叠加畸变相位的数学表达式。

首先推导“+1”级物光场的重建。同样在无透镜傅里叶变换全息图 $I_n(x, y)$ 得到的光场 $\tilde{O}R^*$ 上乘以(20)式定义的平面波 \tilde{R}' , 然后用重建球面照明光 \tilde{C} 再现, 不过此时球面照明光的波长为 λ' , 且 $\lambda' = M\lambda$ (M 为重建物光场的横向放大率), 即

$$\tilde{C}(x, y) = \exp \left[\frac{jk'}{2z_c} (x^2 + y^2) \right], \quad (32)$$

式中 $k' = 2\pi/\lambda'$ 。按照菲涅耳衍射计算公式, 在像距 z_i 处重建的“+1”级物光场为

$$\tilde{U}_{+1}(x_i, y_i) = \exp \left[\frac{jk'}{2z_i} (x_i^2 + y_i^2) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}(x_o, y_o) \exp \left[\frac{jk}{2z_o} (x_o^2 + y_o^2) \right] I(x_o, y_o) dx_o dy_o. \quad (33)$$

(33)式形式上与前面的(21)式相似, 只是因为照明光的波长为 λ' , 所以(33)式中

$$I(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\left(\frac{jk'}{z_i} x_i + \frac{jk}{z_o} x_o \right) x + \left(\frac{jk'}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i} \right) x^2 \right] dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\left(\frac{jk'}{z_i} y_i + \frac{jk}{z_o} y_o \right) y + \left(\frac{jk'}{2z_o} + \frac{jk}{2z_i} \right) y^2 \right] dy. \quad (34)$$

选取 $z_i = -z_o, z_c = -z_i$, 则(34)式为

$$I(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z_o} \left(x_o - \frac{\lambda x_i}{\lambda'} \right) x \right] dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z_o} \left(y_o - \frac{\lambda y_i}{\lambda'} \right) y \right] dy = (\lambda z_o)^2 \delta \left(x_o - \frac{x_i}{M}, y_o - \frac{y_i}{M} \right). \quad (35)$$

将(35)式代入(33)式有

$$\tilde{U}_{+1}(x_i, y_i) = \tilde{o} \left(\frac{x_i}{M}, \frac{y_i}{M} \right) \exp \left[-\frac{jk'}{2z_o} (x_i^2 + y_i^2) \right] \exp \left\{ \frac{jk}{2z_o} \left[\left(\frac{x_i}{M} \right)^2 + \left(\frac{y_i}{M} \right)^2 \right] \right\} = \tilde{o} \left(\frac{x_i}{M}, \frac{y_i}{M} \right) \Phi_{+1}(x_i, y_i), \quad (36)$$

式中 $\Phi_{+1}(x_i, y_i) = \exp\left[\frac{jk'}{2} \frac{1-M}{Mz_o}(x_i^2 + y_i^2)\right]$, 表明重建物光场就是物面上的光场, 横向放大了 M 倍, 叠加的二次畸变相位由波长为 λ' , 半径为 $r_{+\phi}$ 的球面光波产生

$$r_{+\phi} = Mz_o / (1 - M). \quad (37)$$

最后, 推导“-1”级物光场的重建。在无透镜傅里叶变换全息图 $I_H(x, y)$ 得到的光场 $\tilde{O}^* \tilde{R}$ 上乘以(26)式定义的平面波 \tilde{R}' , 然后用(32)式定义的重建球面照明光再现, 在像距 z_i 处重建的“-1”级物光场为

$$\tilde{U}_{-1}(x_i, y_i) = \exp\left[\frac{jk'}{2z_i}(x_i^2 + y_i^2)\right] \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}^*(x_o, y_o) \exp\left[-\frac{jk}{2z_o}(x_o^2 + y_o^2)\right] I(x_o, y_o) dx_o dy_o, \quad (38)$$

式中

$$I(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\left(\frac{jk'}{z_i} x_i + \frac{jk}{z_o} x_o\right)x + \left(\frac{jk'}{2z_c} + \frac{jk'}{2z_i}\right)x^2\right] dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\left(\frac{jk'}{z_i} y_i + \frac{jk}{z_o} y_o\right)y + \left(\frac{jk'}{2z_c} + \frac{jk'}{2z_i}\right)y^2\right] dy. \quad (39)$$

选取 $z_i = z_o, z_c = -z_i$, 则(39)式化为

$$I(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{j \frac{2\pi}{\lambda z_o} \left[x_o - \left(-\frac{\lambda x_i}{\lambda'}\right)\right] x\right\} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{j \frac{2\pi}{\lambda z_o} \left[y_o - \left(-\frac{\lambda y_i}{\lambda'}\right)\right] y\right\} dy = (\lambda z_o)^2 \delta\left[x_o - \left(-\frac{x_i}{M}\right), y_o - \left(-\frac{y_i}{M}\right)\right]. \quad (40)$$

将(40)式代入(38)式有

$$\tilde{U}_{-1}(x_i, y_i) = \tilde{o}^*\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right) \exp\left[\frac{jk'}{2z_o}(x_i^2 + y_i^2)\right] \exp\left\{-\frac{jk}{2z_o}\left[\left(-\frac{x_i}{M}\right)^2 + \left(-\frac{y_i}{M}\right)^2\right]\right\} = \tilde{o}^*\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right) \Phi_{-1}(x_i, y_i), \quad (41)$$

式中 $\Phi_{-1}(x_i, y_i) = \exp\left[\frac{jk'}{2} \frac{M-1}{Mz_o}(x_i^2 + y_i^2)\right]$, 即重建物光场是物面上光场的共轭光, 横向放大了 M 倍, 叠加的二次畸变相位由波长为 λ' , 半径为 $r_{-\phi}$ 的球面光波产生

$$r_{-\phi} = Mz_o / (M - 1). \quad (42)$$

至此, 完成了现有各种可控放大率物光场重建算法的理论推导, 导出了相应算法在重建物光场中所引入相位畸变的数学表达式。

如果将 $\lambda = \lambda' / M$ 代入(37)式和(42)式, 即换算为记录全息图时的相干光波, 则对应的球面波半径分别与(25)式和(30)式完全相同。

最终得出: 无论对菲涅耳全息还是无透镜傅里叶变换全息, 如果将“+1”级或“-1”级物光场同样放大 M 倍, 则重建物光场上都叠加有一个二次相位畸变。该畸变由球面波产生, 且“+1”级与“-1”级物光场叠加的两个球面波是互为共轭的。球面波半径大于0表示的是发散球面波, 小于0则表示的是会聚球面波。

如果将该球面波长都折算为记录全息图时的光波长 λ , 则两个球面光波半径的绝对值相同, 其数值 r_ϕ 为

$$r_\phi = M^2 z_o / (M - 1). \quad (43)$$

说明畸变完全取决于放大率 M 和物距 z_o , 与重建算法无关。特例: 若 $M=1$, 则 $r_\phi = \infty$, 没有二次畸变相位。

4 实验研究

设计了两个实验, 实验一是菲涅耳数字全息, 实验二是无透镜傅里叶变换数字全息。

图2是菲涅耳数字全息光路图^[3]。He-Ne激光器发出的激光束(波长 $\lambda = 632.8$ nm)通过分束镜 BS_1 分为两束, 其中一束被反射镜 M_1 反射后经显微物镜 L_1 、针孔滤波器 PH_1 和准直透镜 L_2 变为平行光, 照射并通过衍射屏(刻有透射率为1的汉字“光”)后, 透过分束镜 BS_2 作为物光到达全息记录面; 另一束经反射镜 M_2 反射, 通过显微物镜 L_3 、针孔滤波器 PH_2 和准直透镜 L_4 变为平行光, 经分束镜 BS_2 反射后作为参考光到达全息记录面。参、物光在全息记录面干涉后其光强分布用 CCD 采集并传输到计算机中记录下来, 得到离轴数字全息图。

实验中记录介质 CCD 的分辨率为 $1392 \text{ pixel} \times 1040 \text{ pixel}$, 像素大小为 $4.65 \text{ } \mu\text{m} \times 4.65 \text{ } \mu\text{m}$, 衍射屏到 CCD 的距离 $z_o = 0.230 \text{ m}$ 。实验结果如图3所示。其中, 图3(a)为实验记录的数字全息图, $1140 \text{ pixel} \times 1040 \text{ pixel}$ (截除了有杂散光污染的部分), 图3(b)为全息图的频谱, 图3(c)为直接用 S-FFT 算法重建的物光场, 取像距 $z_i = z_o$, 可以看到重建物光场在像平面中只占很小的部分。

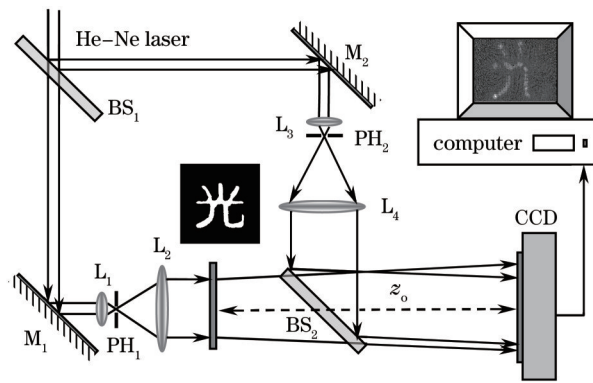


图2 菲涅耳数字全息光路示意图

Fig.2 Experimental setup for Fresnel digital holography

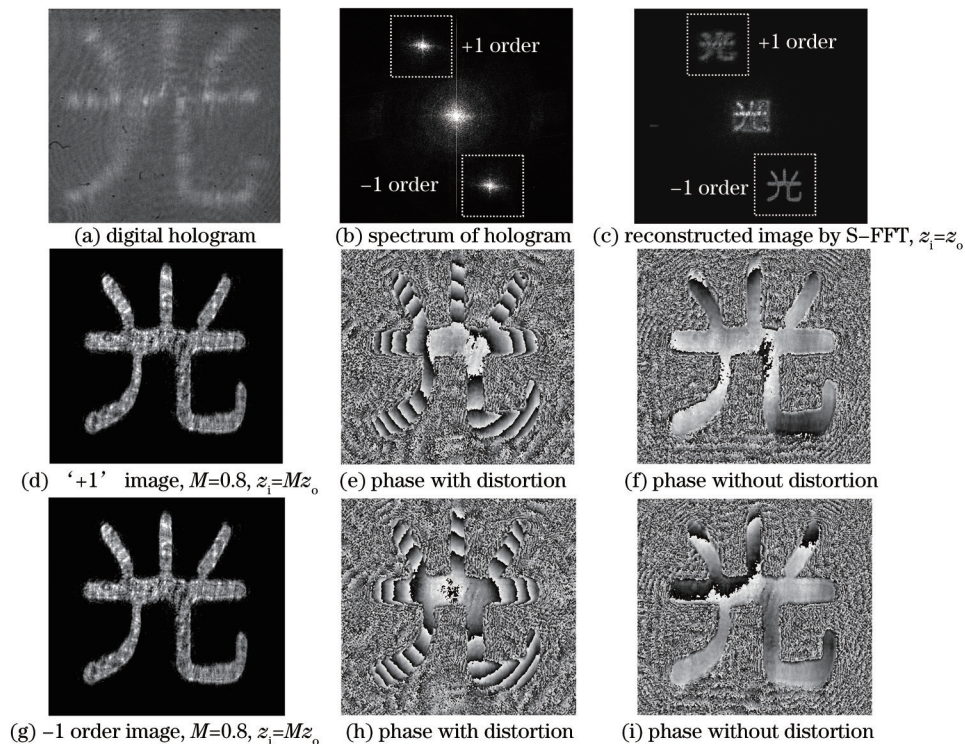


图3 菲涅耳全息实验结果, 图像均为 1140 pixel×1040 pixel

Fig.3 Experimental results of Fresnel digital holography, 1140 pixel×1040 pixel

图3(d)为用球面光照明, 并取 $M=0.8$, 像距 $z_1=-Mz_0$ 得到的“+1”级放大重建物光场, 可以看到重建物光场基本占满了像平面; 图3(d)为该“+1”级物光场的包裹相位, 可以看出其中叠加有一个球面波引起的二次相位畸变; 图3(f)为用(11)式计算出球面光波的相位, 并将其从“+1”级物光场中减去得到的相位, 二次相位畸变得很好的校正。图3(g)为取 $M=0.8$, 像距 $z_1=Mz_0$ 得到的“-1”级放大重建物光场; 图3(h)为其包裹相位, 图3(i)为用(18)式计算出畸变相位并作校正后的相位。将图3(d)~(f)分别与图3(g)~(i)比较可以看出, 因放大倍数相同, “+1”、“-1”级重建像完全一样, 但相位相反, 因为两个光场是共轭的。

图4为第二个实验, 即无透镜傅里叶变换数字全息实验光路图^[7]。

实验中被测试物体为美国空军分辨率测试板, 实验参数为: 被测物体到全息记录面的轴向距离 $z_0=0.0445$ m, 光源为波长 $\lambda=532$ nm 的 YAG 激光器, 所用 CCD 像素大小为 $6.8 \mu\text{m} \times 6.8 \mu\text{m}$, 分辨率为 $1317 \text{ pixel} \times 1035 \text{ pixel}$ 。

实验结果分别在图5、图6和图7中给出。

图5(a)是记录的数字全息图, $1317 \text{ pixel} \times 1035 \text{ pixel}$, 图3(b)是全息图的频谱, 也就是直接对全息图作傅里叶变换的传统算法得到的重建像, $1024 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$ 。可以看到“+1”级和“-1”级重建物光场在像平

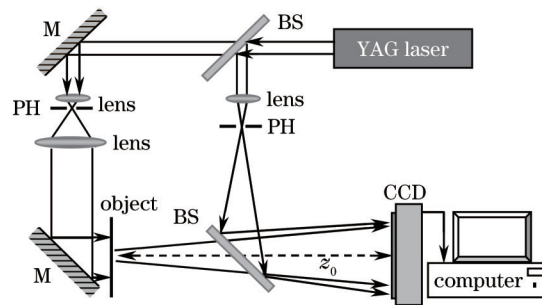


图4 无透镜傅里叶变换数字全息光路示意图

Fig.4 Experimental setup for lensless Fourier transform digital holography

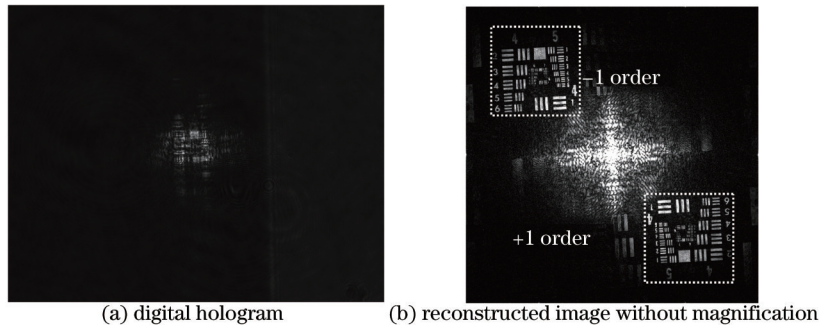


图5 无透镜傅里叶变换数字全息实验结果

Fig.5 Experimental results of lensless Fourier transform digital holography

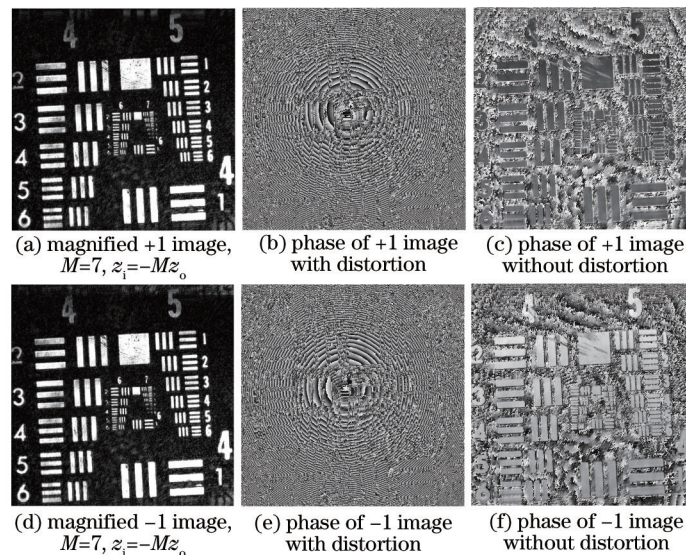


图6 无透镜傅里叶变换数字全息实验结果,改变重建距离。图像均为 1024 pixel×1024 pixel

Fig.6 Experimental results of lensless Fourier transform digital holography, choosing different reconstruction distances, 1024 pixel×1024 pixel

面中所占区域均不足 1/4。

图6为通过改变像距实现无透镜傅里叶变换全息可控放大的实验结果。图6(a)为用球面光照明,并取 $M=7.0$, 像距 $z_i=-Mz_0$ 得到的“+1”级放大重建物光场,重建物光场占满了像平面;图6(b)为该“+1”级物光场的包裹相位,其中也叠加有一个球面波引起的二次相位畸变;图6(c)为用(25)式计算出球面光波的相位,并将其从“+1”级物光场中减去得到的相位,二次相位畸变得很好补偿。

图6(d)为取 $M=7.0$, 像距 $z_i=Mz_0$ 得到的“-1”级放大重建物光场,光强分布与“+1”级像完全相同;图6(e)为该“-1”级物光场的包裹相位,也叠加有球面波引起的二次相位畸变;图6(f)为用(31)式计算出球面光波的相位,并将其从“-1”级物光场中减去得到的相位,已经没有了二次相位畸变。

将图6(a)~(c)分别与图6(d)~(f)比较可以看到,因放大倍数相同,“+1”级、“-1”级重建像完全一样,但两

个光场共轭(包括畸变相位)。

图7为通过改变重建光波长实现无透镜傅里叶变换全息可控放大重建的实验结果。图7(a)为用球面光照明,并取 $M=7.0$,重建波长 λ' 是记录波长 λ 的 M 倍,像距 $z_i=-z_o$ 得到的“+1”级放大重建物光场;图7(b)为该“+1”级物光场的包裹相位,叠加有二次相位畸变;图7(c)为用(37)式计算出球面光波的相位(取波长为 λ'),并将其从“+1”级物光场中减去得到的相位,很好地补偿了相位畸变。

图7(d)为取 $M=7.0$, $\lambda'=M\lambda$ 及 $z_i=z_o$ 得到的“-1”级放大重建物光场;图7(e)为该物光场的包裹相位,也叠加有二次相位畸变;图7(f)为用(42)式计算出畸变相位(取波长为 λ'),并将其从“-1”级物光场中减去得到的相位。

将图6(a)~(f)与图7(a)~(f)相比较可以看到,尽管重建算法不同,但对应重建光场是相同的,包括叠加的二次畸变相位也对应相同,这个结论与前面的理论推导完全吻合。

另外,取放大倍数 $M=1$,发现实验一和实验二重建光场中均没有二次相位畸变,与前面的理论推导完全吻合,但考虑到篇幅不再给出相关的实验结果图。

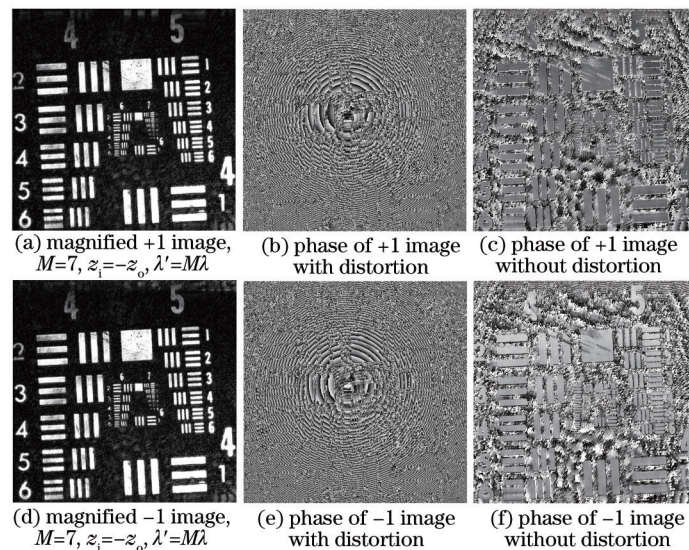


图7 无透镜傅里叶变换数字全息实验结果,改变重建波长。图像均为1024 pixel×1024 pixel

Fig.7 Experimental results of lensless Fourier transform digital holography, choosing different reconstruction wavelengths 1024 pixel×1024 pixel

5 结 论

数字全息中,数字化地重建物光场通常必须用计算机完成衍射计算,基于菲涅耳衍射积分的S-FFT算法应用广泛,但重建的物光场在重建平面上所占面积较小。将重建光设为球面波,利用衍射的角谱理论进行可控放大率物光场重建,可以大大提高重建物光场在像平面上所占面积,但所用算法会引入相位畸变。

对现有各种可控放大率物光场重建算法进行了研究,完成了相关衍射计算的理论推导发现:无论对菲涅耳全息还是无透镜傅里叶变换全息,如果将“+1”级或“-1”级物光场同样放大 M 倍,则重建物光场上都叠加上一个二次相位畸变。该畸变由球面波产生,且“+1”级与“-1”级物光场叠加的球面波共轭。如果将该球面波长折算为记录全息图时的光波长,则球面光波半径相同,完全由放大率 M 和物距 z_o 决定,与算法无关。若光场不经放大,即取 $M=1$,则不会引入二次畸变相位。

设计了两个实验,验证将可控放大率物光场重建算法分别应用于菲涅耳全息和无透镜傅里叶变换全息的效果,结果表明,实验与理论分析完全吻合。利用理论研究导出的相位畸变数学表达式,实验中方便地校正了二次相位畸变。

参 考 文 献

- 1 Schedin S, Pedrini G, Tiziani H J, *et al.* Simultaneous three-dimensional dynamic deformation measurements with pulsed digital holography[J]. Appl Opt, 1999, 38(34): 7056-7062.

- 2 Zhang F, Yamaguchi I, Yaroslavsky L P. Algorithm for reconstruction of digital holograms with adjustable magnification [J]. *Opt Lett*, 2004, 29(14): 1668–1670.
- 3 A Domenico, C Giuseppe, D N Sergio, *et al.*. Method for superposing reconstructed images from digital holograms of the same object recoded at different distance and wavelength[J]. *Opt Commun*, 2006, 260(1): 113–116.
- 4 Li J, Tankam P, Peng Z, *et al.*. Digital holographic reconstruction of large objects using a convolution approach and adjustable magnification[J]. *Opt Lett*, 2009, 34(5): 572–574.
- 5 Picart P, Tankam P, Mounier D, *et al.*. Spatial bandwidth extended reconstruction for digital color Fresnel holograms [J]. *Opt Express*, 2009, 17(11): 9145–9156.
- 6 Li Junchang, Fan Zebin. Algorithm of the non-interpolation wave-front reconstruction of the color digital holography [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(4): 2457–2461.
李俊昌, 樊则宾. 彩色数字全息的非插值波面重建算法研究[J]. *物理学报*, 2010, 59(4): 2457–2461.
- 7 Caojin Yuan, Xiaofan Qian, *et al.*. An adjustable magnification method of lensless Fourier holography based on the equivalent spatial frequency[J]. *Opt Commun*, 2013, 287(1): 58–62.
- 8 Li Junchang, Song Qinghe, Gui Jinbin, *et al.*. Research of image plane filtering technique in digital holographic wavefront reconstruction[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(9): 0900135.
李俊昌, 宋庆和, 桂进斌, 等. 数字全息波前重建中的像平面滤波技术研究[J]. *光学学报*, 2011, 31(9): 0900135.
- 9 T Colomb, E Cuche, F Charri, *et al.*. Automatic procedure for aberration compensation in digital holographic microscopy and applications to specimen shape compensation[J]. *Appl Opt*, 2006, 45(5): 851–863.
- 10 Pan Weiqing, Zhu Yongjian, Lang Haitao. Phase-contrast imaging technology with digital holographic microscope based system calibration[J]. *Chinese J Lasers*, 2010, 37(7): 1812–1820.
潘卫清, 朱勇建, 郎海涛. 基于系统标定的相衬显微数字全息方法[J]. *中国激光*, 2010, 37(7): 1812–1820.
- 11 Li Junchang, Fan Zebin, Patrice T, *et al.*. The study of color digital holography free from the zero-order diffraction interruption[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(3): 034204.
李俊昌, 樊则宾, Patrice T, 等. 无零级衍射干扰的彩色数字全息研究[J]. *物理学报*, 2011, 60(3): 034204.
- 12 Li Junchang. Introduction of digital color holographic wavefront reconstruction algorithm[J]. *Chinese J Lasers*, 2011, 38(5): 0501001.
李俊昌. 彩色数字全息波前重建算法概论[J]. *中国激光*, 2011, 38(5): 0501001.
- 13 Chen Hong, Qian Xiaofan, Li Bin, *et al.*. Stability of refractive index matching liquids and its influence on the holographic recording and reconstruction[J]. *Laser & Infrared*, 2012, 42(8): 932–935.
陈虹, 钱晓凡, 李斌, 等. 折射率匹配液的稳定性及其对全息记录与再现的影响[J]. *激光与红外*, 2012, 42(8): 932–935.

栏目编辑: 何卓铭