

扩散过程中混沌场的演化

卢道明

武夷学院机电工程学院, 福建 武夷山 354300

摘要 利用热纠缠态表象求解密度矩阵主方程的方法和有序算符内的积分技术,对扩散过程的密度矩阵主方程进行了求解,给出了主方程密度算符无限和表示的解的形式,导出了扩散过程混沌场密度算符的演化规律,并研究了平均光子数和光子数涨落的演化。研究表明:随着扩散过程的进行,混沌场密度算符的形式不变,仍然保持混沌场的性质,但其平均光子数随着扩散过程的进行线性增加,光子数涨落随扩散时间以二次函数形式扩大。

关键词 量子光学;热纠缠态表象;扩散过程;混沌场

中图分类号 O431.2

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP52.042702

Time Evolution of Chaotic Field in Diffusion Process

Lu Daoming

College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China

Abstract Master equations of density operators in the diffusion process can be concisely solved by the technique of integration within an ordered product of operators and virtue of thermo-entangled state representation. The evolution formula of the field density operator which is chaotic field initially is got. The results show that the chaotic field maintains its original properties, but its average number of photons increases linearly in the diffusion process. The photon number fluctuation increases in the form of a quadratic function with diffusion time.

Key words quantum optics; thermo entangled state representation; diffusion process; chaotic field

OCIS codes 270.5585; 030.5290; 140.1540

1 引言

开放量子系统是人们长期关注的课题之一。其原因在于开放系统是普遍存在的,几乎没有一个量子系统是完全独立于外界环境的。另一原因是在量子信息处理领域中开放系统的退相干是实现量子信息处理的主要障碍之一。当一个量子系统与周围环境发生相互作用时,系统不可避免地失去原有的量子特性,造成退相干。目前,关于开放系统中量子系统的退相干问题研究已有不少的研究报道^[1-11]。例如,陈锋等^[1]导出了振幅衰减通道中负二项式光场的演化规律。Wang等^[2]讨论了热真空态在振幅衰减模型中的演化。张浩亮等^[3]研究了由光子增减叠加操作作用于相干态而得量子态的非经典性质及其热环境中的退相干问题。另一方面,为了处理开放系统的动力学问题,需要求解密度矩阵主方程。至今,已有多种求解方法,既有精确求解的,也有近似求解的。传统的求解方法是主方程转化为Fokker-Plank方程或Langevin方程求解,但这些方法不容易应用于任意初始量子态的情况。Fan等^[12]提出了利用热纠缠态表象求解密度矩阵主方程的方法,成功地给出密度算符无限和表示,即Kraus算符。人们利用该方法对开放系统的退相干问题已开展了一些研究^[13-16]。例如,叶骞等^[13]求解了Caldeira-Leggett方程,得出了解的积分形式的显式表达式。Xu等^[14]研究了热环境中压缩热态光子数分布的演化。Hu等^[15]导出了激光过程中Wigner函数的时间演化公式。关于混沌场的量子特性研究,Fan等^[17]讨论了压缩混沌场的光子数分布。但是,混沌场在扩散过程中的演化规律如何,至今未见报道。因此,自然产生这样一个有趣的问题:能否应用热纠缠态表象求解扩散过程密度矩阵主方程,得出混沌场在扩散过程中的演化规律。针对这一问题,本文第二部分介绍热纠缠态表象中扩散方程的解,第三部分给出混沌场扩散过程中密度算符的演化规律,最后总结研究结果。

收稿日期: 2014-11-10; 收到修改稿日期: 2014-11-15; 网络出版日期: 2015-02-05

基金项目: 福建省自然科学基金(2011J01018)

作者简介: 卢道明(1963—),男,硕士,教授,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: daominlu79@hotmail.com

2 扩散过程中密度算符的演化

在扩散过程中,描述密度算符演化的主方程为^[18]

$$\frac{d\rho}{dt} = -\kappa(a^+ a \rho - a^+ \rho a - \rho a a^+ + \rho a a^+), \quad (1)$$

式中 κ 为衰减率, a_i^+ (a_i) 是玻色产生(湮没)算符。为了解(1)式,利用 Fan 等^[18]提出的用热纠缠态表象解密度算符主方程的方法,引入热纠缠态表象

$$|\eta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2 + \eta a^+ - \eta^* \tilde{a}^+ + a^+ \tilde{a}^+\right)|0\tilde{0}\rangle, \quad (2)$$

式中 $|0\tilde{0}\rangle$ 表示虚模真空态, \tilde{a}^+ (\tilde{a}) 是虚模的产生(湮没)算符,它们满足与实模相同的对易关系 $[\tilde{a}, \tilde{a}^+] = 1$ 。当 $\eta = 0$ 时,由(2)式得到

$$|\eta = 0\rangle = \exp(a^+ \tilde{a}^+)|0\tilde{0}\rangle = |I\rangle, \quad (3)$$

态 $|I\rangle$ 具有以下性质

$$\begin{cases} a|I\rangle = \tilde{a}^+|I\rangle, a^+|I\rangle = \tilde{a}|I\rangle, \\ (a^+ a)^n|I\rangle = (\tilde{a}^+ \tilde{a})^n|I\rangle, (a a^+)^n|I\rangle = (\tilde{a} \tilde{a}^+)^n|I\rangle, \end{cases} \quad (4)$$

由(4)式可见: a^+ (a) 和 \tilde{a}^+ (\tilde{a}) 作用在态 $|I\rangle$ 上可以互换,其互换关系为

$$a \leftrightarrow \tilde{a}^+, a^+ \leftrightarrow \tilde{a}, a^+ a \leftrightarrow \tilde{a}^+ \tilde{a}, a a^+ \leftrightarrow \tilde{a} \tilde{a}^+, \quad (5)$$

将(1)式两边作用在 $|I\rangle$ 上,并记 $|\rho\rangle = \rho|I\rangle$,那么,密度算符的主方程转化为

$$\frac{d}{dt}|\rho\rangle = -\kappa(a^+ a \rho - a^+ \rho a - \rho a a^+ + \rho a a^+)|I\rangle = -\kappa(a^+ a - a^+ \tilde{a}^+ - a \tilde{a} + \tilde{a} \tilde{a}^+)|\rho\rangle = -\kappa(a^+ - \tilde{a})(a - \tilde{a}^+)|\rho\rangle, \quad (6)$$

(6)式的解为

$$|\rho\rangle = \exp[-\kappa t(a^+ - \tilde{a})(a - \tilde{a}^+)]|\rho_0\rangle, \quad (7)$$

式中 ρ_0 为系统的初始密度算符, $|\rho_0\rangle = \rho_0|I\rangle$ 。由(7)式可见,因采用热纠缠态表象,将虚模和实模作用在 $|I\rangle$ 后具有(5)式的互换关系的优点,使得密度算符演化的主方程的形式解很容易得到,从 $|\rho_0\rangle$ 态求出 $|\rho\rangle$ 态。利用(2)式可得

$$\langle \eta|(a^+ - \tilde{a}) = \eta^* \langle \eta|, \langle \eta|(a - \tilde{a}^+) = \eta \langle \eta|, \quad (8)$$

将 $\langle \eta|$ 左乘(7)式的两边,并利用(8)式的结果,得到

$$\langle \eta|\rho\rangle = \langle \eta|\exp[-\kappa t(a^+ - \tilde{a})(a - \tilde{a}^+)]|\rho_0\rangle = \exp(-\kappa t|\eta|^2)\langle \eta|\rho_0\rangle, \quad (9)$$

利用 $|\eta\rangle$ 的完备性 $\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle \eta| = 1$ 和有序算符内的积分技术,发现

$$|\rho\rangle = \int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle \eta|\rho\rangle = \int \frac{d^2\eta}{\pi} \exp(-\kappa t|\eta|^2) \langle \eta|\rho_0\rangle = \frac{1}{1+\kappa t} \exp\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} a^+ \tilde{a}^+\right) \exp\left[\frac{\kappa t}{1+\kappa t} (-\tilde{a}^+ \tilde{a} - a^+ a)\right] \exp\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} a \tilde{a}\right) |\rho_0\rangle, \quad (10)$$

式中“ $::$ ”表示算符的正规排序。利用 $\exp[x(a^+ a + \tilde{a}^+ \tilde{a})] = \exp[(e^x - 1)(a^+ a + \tilde{a}^+ \tilde{a})]$,将(10)式改写为

$$|\rho\rangle = \frac{1}{1+\kappa t} \exp\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} a^+ \tilde{a}^+\right) \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{\tilde{a}^+ \tilde{a} + a^+ a} \exp\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} a \tilde{a}\right) |\rho_0\rangle, \quad (11)$$

将(11)式中指数项展开,并利用虚模算符与 ρ_0 对易,能导出

$$\exp\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} a \tilde{a}\right) |\rho_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} a\right)^n \tilde{a}^n \rho_0 |I\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} a\right)^n \rho_0 a^{+n} |I\rangle, \quad (12)$$

$$|\rho\rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \frac{(\kappa t)^{m+n}}{(1+\kappa t)^{m+n+1}} a^{+m} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+ a} a^n \rho_0 a^{+n} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+ a} a^m |I\rangle. \quad (13)$$

因此

$$\rho(t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \frac{(\kappa t)^{m+n}}{(1+\kappa t)^{m+n+1}} a^{+m} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+ a} a^n \rho_0 a^{+n} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+ a} a^m = \sum_{m,n=0}^{\infty} M_{m,n} \rho_0 M_{m,n}^+, \quad (14)$$

(14)式给出了密度算符无限和表示形式,能从初态的密度算符求出任意时刻的密度算符。式中

$M_{m,n} = \sqrt{\frac{(\kappa t)^{m+n}}{m!n!(1+\kappa t)^{m+n+1}}} a^{+m} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+} a^n$ 为 Kraus 算符, 它满足

$$\sum_{m,n} M_{m,n} M_{m,n}^+ = 1. \quad (15)$$

3 扩散过程中混沌光场密度算符的演化

对于混沌场, 其初始密度算符为

$$\rho_0 = [1 - \exp(-\lambda)] \exp(-\lambda a^+ a), \quad (16)$$

它所对应的哈密顿算符 $H = \hbar\omega a^+ a$, 密度矩阵为 $\exp(-\beta H)$, $\beta = \frac{1}{k_B T_0}$, k_B 是玻尔兹曼常数, $\lambda = \frac{\hbar\omega}{k_B T_0}$ 。平均光子数 $\bar{n} = [\exp(\lambda) - 1]^{-1}$, $\exp(\lambda) = 1 + \frac{1}{\bar{n}}$ 。将 (16) 式代入 (14) 式, 并利用公式 $\exp(\lambda a^+ a) a \exp(-\lambda a^+ a) = a \exp(-\lambda)$ 和 $\exp(\lambda a^+ a) a^+ \exp(-\lambda a^+ a) = a^+ \exp(\lambda)$, 得出

$$\begin{aligned} \rho(t) = & \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \frac{(\kappa t)^{m+n}}{(1+\kappa t)^{m+n+1}} a^{+m} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+} a^n \exp(-\lambda a^+ a) [1 - \exp(-\lambda)] a^{+n} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+} a^m = \\ & \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1 - \exp(-\lambda)}{m!n!} \frac{(\kappa t)^{m+n}}{(1+\kappa t)^{m+n+1}} a^{+m} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda a^+ a\right) a^n \exp(-\lambda n) a^{+n} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda a^+ a\right) \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+} a^m, \end{aligned} \quad (17)$$

利用相干态的完备性 $\int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle\langle z| = 1$ 和 $\exp(x a^+ a) |z\rangle = \exp\left[-\frac{|z|^2}{2} + \frac{|\exp(x)z|^2}{2}\right] |\exp(x)z\rangle$, (17) 式中对 n 的求和为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\kappa t)^n}{(1+\kappa t)^n} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda a^+ a\right) a^n \exp(-\lambda n) a^{+n} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda a^+ a\right) \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+} = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\kappa t)^n}{(1+\kappa t)^n} \exp(-\lambda n) \exp\left[a^+ a \left(\ln \frac{1}{1+\kappa t} - \frac{1}{2}\right)\right] \int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle\langle z| \exp\left[a^+ a \left(\ln \frac{1}{1+\kappa t} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1 + \kappa t}{1 + \kappa t [1 - \exp(-\lambda)]} \cdot \\ & \exp\{[\exp(-u) - 1] a^+ a\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\exp(-u) = \frac{\exp(-\lambda)}{(1 + \kappa t) [1 + \kappa t [1 - \exp(-\lambda)]]}, \quad (19)$$

将 (18) 式代入 (17) 式, 导出

$$\rho(t) = \frac{1 - \exp(-\lambda)}{1 + \kappa t [1 - \exp(-\lambda)]} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\kappa t}{1 + \kappa t}\right)^m a^{+m} \exp\{[\exp(-u) - 1] a^+ a\} = [1 - \exp(-u)] \exp(-w a^+ a), \quad (20)$$

$$\exp(-w) = \frac{\kappa t}{1 + \kappa t} + \frac{\exp(-\lambda)}{(1 + \kappa t) [1 + \kappa t [1 - \exp(-\lambda)]]}. \quad (21)$$

将 (18) 式给出的 t 时刻密度算符 $\rho(t) = [1 - \exp(-w)] \exp(-w a^+ a)$ 与初态混沌场的密度算符 $\rho_0 = [1 - \exp(-\lambda)] \exp(-\lambda a^+ a)$ 进行比较, 可见, 混沌场经扩散过程后仍然保持混沌场的性质, 差别仅在于其平均光子数发生了变化。设扩散后平均光子数用 \bar{n}' 表示, 那么, $\exp(w) = \frac{\bar{n}' + 1}{\bar{n}'}$, 由 (21) 式得出

$$1 - \exp(-w) = \frac{1 - \exp(-\lambda)}{1 + \kappa t [1 - \exp(-\lambda)]}, \quad (22)$$

$$\bar{n}' = \bar{n} + \kappa t, \quad (23)$$

这表明随扩散过程的进行, 混沌场的平均光子数线性增加。

下面讨论扩散过程对光子数涨落的影响。光子数涨落定义为

$$\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2, \quad (24)$$

因为 $\hat{N}^2 = (a^+ a)^2 = a^{+2} a^2 + a^+ a$, 所以

$$\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle = \langle a^{+2} a^2 \rangle + \langle a^+ a \rangle - \langle a^+ a \rangle^2, \quad (25)$$

对于混沌场, 其密度算符为 $\rho_0 = [1 - \exp(-\lambda)] \exp(-\lambda a^+ a)$, 利用相干态的完备性 $\int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle\langle z| = 1$, 计算得出

$$\langle a^+ a \rangle = \bar{n} = \frac{1}{\exp(\lambda) - 1}, \quad (26)$$

$$\langle a^{+2} a^2 \rangle = \text{tr}(a^{+2} a^2 \rho_0) = \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | a^{+2} a^2 \rho_0 | z \rangle = 2\bar{n}^2, \quad (27)$$

式中 tr 表示求迹。将(27)式代入(25)式得到

$$\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle = \bar{n}^2 + \bar{n}, \quad (28)$$

同样,计算混沌场经扩散过程 t 时刻后的光子数涨落

$$\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle' = \langle a^{+2} a^2 \rangle' + \langle a^+ a \rangle' - \langle a^+ a \rangle'^2, \quad (29)$$

利用(20)式,求得

$$\langle a^+ a \rangle' = \bar{n}' = \frac{1}{\exp(w) - 1}, \quad (30)$$

$$\langle a^{+2} a^2 \rangle' = \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | a^{+2} a^2 \rho(t) | z \rangle = [1 - \exp(-w)] \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | z^{*2} z^2 \exp(-2w) : \exp\{[\exp(-w) - 1]a^+ a\} : | z \rangle = 2\bar{n}'^2, \quad (31)$$

将(30)式和(31)式的结果代人(29)式,得到

$$\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle' = \bar{n}'^2 + \bar{n}', \quad (32)$$

结合(32)式、(28)式和(23)式,得出

$$\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle' - \langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle = \bar{n}'^2 + \bar{n}' - (\bar{n}^2 + \bar{n}) = 2\kappa t \bar{n} + \kappa t + (\kappa t)^2, \quad (33)$$

(24)式和(27)式表明:随扩散过程的进行,混沌场的光子数涨落与平均光子数的关系式不变。但(28)式表明随扩散过程的进行,由于混沌场的平均光子数线性增加,使得混沌场的光子数涨落随扩散时间以二次函数形式扩大。

4 结 论

利用热纠缠态表象求解密度矩阵主方程的方法和运用算符正规排序内的积分技术,对扩散过程密度矩阵主方程进行了求解,得到了用密度算符用 Kraus 算符无限和表示的解。这种形式的解易应用于任意初始量子态的情况。对于混沌场,利用该解的表示公式,推导出了混沌场密度算符随时间演化的简洁表示式,并计算其平均光子数和光子数涨落,得到了平均光子数和光子数涨落随扩散时间变化的简洁解析式。根据混沌场密度算符的演化规律,以及平均光子数和光子数涨落随扩散时间演化表示式发现:混沌场经扩散过程后仍然保持混沌场的性质,但其平均光子数发生了变化,其平均光子数随扩散过程的进行线性增加。另一方面,随扩散过程进行,混沌场的光子数涨落随扩散时间以二次函数形式扩大。

参 考 文 献

- 1 Chen Feng, Fan Hongyi. Evolution law a negative binomial state in an amplitude dissipative channel [J]. Chin Phys B, 2014, 23(3): 030304.
- 2 Wang Changchun, Fan Hongyi. Evolution of a thermo vacuum state in a single-mode amplitude dissipative channel [J]. Chin Phys Lett, 2010, 27(11): 110302.
- 3 Zhang Haoliang, Jia Fang, Xu Xuexiang, *et al.*. Decoherence of a photon-subtraction-addition coherent state in a thermal environment [J]. Acta Physics Sinica, 2013, 62(1): 014208.
张浩亮, 贾芳, 徐学翔, 等. 光子增减叠加相干态在热环境中的退相干[J]. 物理学报, 2013, 62(1): 014208.
- 4 Wen Hongyan, Yang Yang, Wei Lianfu. Dissipative dynamics of few-photon superposition states in optical microcavity [J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(18): 184206.
文洪燕, 杨杨, 韦联福. 光学微腔中少光子数叠加态的耗散动力学[J]. 物理学报, 2012, 61(18): 184206.
- 5 Carvalho A R R, Mintetr F, Buchleitner A. Decoherence and multipartite entanglement [J]. Phys Rev Lett, 2004, 93(23): 230501.
- 6 Wickert R, Bernardes N K, Loock P V. Entanglement properties of optical coherence states under amplitude damping [J]. Phys Rev A, 2010, 81(6): 062344.
- 7 Biswas A, Agrwal G S. Nonclassicality and decoherence of photon-subtracted squeezed states [J]. Phys Rev A, 2007, 75

- (3): 032104.
- 8 Zhang H L, Jia F, Xu X X, *et al.*. Nonclassicality and decoherence of photon-subtraction squeezing-enhanced thermal state [J]. *Int J Theor Phys*, 2012, 51(10): 3330-3343.
- 9 Xu X X, Hu L Y, Fan H Y. Photon-added squeezed thermal states: statistical properties and its decoherence in a photon-loss channel [J]. *Opt Commun*, 2010, 283(9): 1801-1809.
- 10 Zhang Lihui, Li Gaoxiang, Peng Jinsheng. Entropy evolution in the Jaynes-Cummings model with large detuning inside a phase damping cavity [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, 22(8): 907-911.
张立辉, 李高翔, 彭金生. 相位损耗腔中大失谐 Jaynes-Cummings 模型中熵的演化[J]. *光学学报*, 2002, 22(8): 907-911.
- 11 Fan Hongyi, Lou Senyue, Hu Liyun. Damping law of photocount distribution in a dissipative channel [J]. *Chin Phys Lett*, 2013, 30(9): 090304.
- 12 Fan H Y, Hu L Y. New approach for solving master equations in quantum optics and quantum statistics by virtue of thermo-entangled state representation [J]. *Communication Theory Physics*, 2009, 51(4): 729-742.
- 13 Ye Qian, Chen Qianfan, Fan Hongyi. Integral-form solution of the Caldeira-Leggett density operator equation obtained by virtue of thermo entangled state representation [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(12): 210301.
叶 骞, 陈千帆, 范洪义. 利用热纠缠态表象获得 Caldeira-Leggett 密度算符方程的积分形式解[J]. *物理学报*, 2012, 61(12): 210301.
- 14 Xu Yejun, Meng Xiangguo. Time-evolution of photon-number distribution and density operator of squeezed thermal state in the thermal environment [J]. *Int J Theor Phys*, 2013, 52(11): 4155-4162.
- 15 Hu Liyun, Fan Hongyi. Time evolution of Wigner function in laser process derived by entangled state representation [J]. *Opt Commun*, 2009, 282(22): 4379-4383.
- 16 Ashrafi S M, Bazrafkan M R. Unraveling a driven damped harmonic oscillator through entangled state representation [J]. *Chin Phys Lett*, 2013, 30(11): 110304.
- 17 Fan H Y, Zhou J, Xu X X, *et al.*. Photon distribution of a squeezed chaotic state [J]. *Chin Phys Lett*, 2011, 28(4): 040302.
- 18 范洪义, 胡利云. 开放系统量子退相干的纠缠态表象论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2010. 58-63.

栏目编辑: 刘丰瑞