

束缚纠缠的猝死与复活

黄江 谢钦* 周凯伟 林怡鹏

广东海洋大学理学院, 广东 湛江 524088

摘要 研究了两个三能级原子与独立库相互作用的纠缠动力学。研究表明:两个三能级原子的束缚纠缠在演化过程中转移到相互作用库中。由于整个系统纠缠信息总量守恒,原子系统束缚纠缠的猝死必然导致相互作用库中束缚纠缠的复活,库中获得的纠缠等于初始的原子纠缠。

关键词 量子力学;三能级原子;束缚;纠缠;猝死;复活

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP52.042701

Sudden Death and Sudden Birth of Bound Entanglement

Huang Jiang Xie Qin Zhou Kaiwei Lin Yipeng

College of science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang, Guangdong 524088, China

Abstract The entanglement dynamics of two-qutrits interacted with its independent reservoirs are investigated. The results show that bound entanglement of the two-qutrits transfers to the interaction reservoirs in the evolution process. Due to the conservation of total entanglement information in the whole systems, bound entanglement sudden death of the atoms must lead to bound entanglement sudden birth of the reservoirs, and the obtained entanglement of the reservoir equals the initial one.

Key words quantum mechanics; qutrit-qutrit; bound; entanglement; sudden death; sudden birth

OCIS codes 270.5585; 270.2500; 270.5290

1 引言

量子纠缠作为一种重要的物理资源,在量子信息科学中发挥着巨大的作用^[1-10]。任何真实的量子系统都可以看作开放系统,系统与其所处环境不可避免的相互作用会影响系统的纠缠,而导致退相干^[11-12]。因此,研究在各种相互作用条件下系统的纠缠演化特性具有重要意义。目前,Yu等^[13-14]研究了不同环境中的两体二能级原子系统的纠缠演化动力学。研究表明:系统的纠缠在有限的时间内消失,这种在有限时间内纠缠突然消失的现象称之为“纠缠猝死”。显然,纠缠猝死严重地制约着量子态在量子信息处理中的应用,实验结果也证实了纠缠猝死的影响^[15-17]。纠缠猝死的研究起初局限于两体二能级系统。随后,希尔伯特空间中高维量子态的纠缠猝死也得到了广泛的研究^[18-19]。随着研究的深入,系统纠缠的流向问题成为研究的热点。Lopez等^[20]通过扩展原子系统,将与其相互作用库的自由度包括进来。发现系统的纠缠猝死必然伴随着相互作用库纠缠的突然产生,这种纠缠突然产生的现象称之为“纠缠复活”^[20]。

在高维系统中,纠缠态可以分为两类:1)自由纠缠态,此类纠缠态在局域操作和经典通讯中可以提纯。2)束缚纠缠态,此态无论在何种局域操作和经典通讯策略中都无法提纯。尽管开始束缚纠缠只是一个纯粹的数学概念,但在随后一些物理过程中得到了验证。类似于纠缠猝死的定义,如果自由纠缠态在有限的时间内转化成束缚纠缠态,这种现象称为“可提纯性猝死”。目前可提纯性猝死的研究也取得了阶段性进展。例如:宋伟等^[21]提出可提纯性猝死的概念,并研究了在局域退相位噪声环境中两个三能级原子系统的可提纯性猝死问题;黄江等^[22]研究了在低温热库中的两体三能级原子系统,证实了可提纯性猝死的存在;Mazhar^[23]研究了在振幅阻尼通道中两个三能级原子系统的可提纯性猝死现象。

收稿日期: 2014-09-05; 收到修改稿日期: 2014-11-17; 网络出版日期: 2015-02-05

基金项目: 国家自然科学基金(11074072,11374096)

作者简介: 黄江(1984—),男,博士,讲师,主要从事量子光学和量子信息方面的研究。E-mail: 940038299@qq.com

*通信联系人。E-mail: 87843993@qq.com

定义束缚纠缠在有限的时间内消失的现象为束缚纠缠猝死,在某一时间突然出现的现象为束缚纠缠复活。本文从两体三能级原子的扩展系统出发,研究系统的束缚纠缠猝死与相互作用库束缚纠缠复活现象。论文第二部分建立物理模型,研究系统的时间演化动力学;第三部分通过约化密度矩阵计算束缚纠缠,对计算结果进行分析,阐述系统的演化规律,并剖析其物理实质和意义。

2 物理模型

考虑两个二能级原子分别与独立库相互作用的原子系统。假设多模库只含有一个光子,系统的哈密顿量可写为^[20]

$$\hat{H} = \hbar\omega\sigma_+\sigma_- + \hbar\sum_{k=1}^N\omega_k\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar\sum_{k=1}^Ng_k(\sigma_-\hat{b}_k^\dagger + \sigma_+\hat{b}_k), \quad (1)$$

式中 ω 为原子的跃迁频率, σ_+ 、 σ_- 、 \hat{b}^\dagger 、 \hat{b} 分别为上升,下降,产生和湮灭算符。 g_k 为耦合常数。由于只考虑一个腔模中含有单个光子,相互作用库处于真空态,因此系统初态可表示为

$$|\phi_0\rangle_{\text{CR}} = |1\rangle_{\text{C}} \otimes |\bar{0}\rangle_{\text{R}}, \quad (2)$$

式中 $|\bar{0}\rangle_{\text{R}} = \prod_{k=1}^N |0_k\rangle_{\text{R}}$ 是多模库R的共同真空态,c为原子系统。则时间演化态为

$$|\phi_t\rangle_{\text{CR}} = \xi(t)|1\rangle_{\text{C}}|\bar{0}\rangle_{\text{R}} + \sum_{k=1}^N\lambda_k(t)|0\rangle_{\text{C}}|1_k\rangle_{\text{R}}, \quad (3)$$

式中 $|1_k\rangle_{\text{R}}$ 表示第k个库模中有一个光子。当模数 $N \rightarrow \infty$ 时,概率幅 $\xi(t)$ 收敛于 $\xi(t) = \exp(-kt/2)$ 。将(3)式写成较为简洁的形式

$$|\phi_t\rangle_{\text{CR}} = \xi(t)|1\rangle_{\text{C}}|\bar{0}\rangle_{\text{R}} + \chi(t)|0\rangle_{\text{C}}|\bar{1}\rangle_{\text{R}}, \quad (4)$$

式中 $|\bar{1}\rangle_{\text{R}} = \frac{1}{\chi(t)}\sum_{k=1}^N\lambda_k(t)|1_k\rangle_{\text{R}}$,概率幅 $\chi(t)$ 收敛于 $\chi(t) = \sqrt{1 - \exp(-kt)}$ 。

对于两个三能级原子构成的系统,初始单模腔中有两个光子,相互作用库处于真空态。类似于上述计算方式,很容易得到 $|\phi_0\rangle_{\text{CR}} = |2\rangle_{\text{C}} \otimes |\bar{0}\rangle_{\text{R}}$ 。其时间演化态为

$$|\phi_t\rangle_{\text{CR}} = \xi^2(t)|2\rangle_{\text{C}}|\bar{0}\rangle_{\text{R}} + \sqrt{2}\xi(t)\chi(t)|1\rangle_{\text{C}}|\bar{1}\rangle_{\text{R}} + \vartheta(t)|0\rangle_{\text{C}}|\bar{2}\rangle_{\text{R}}, \quad (5)$$

式中

$$|\bar{2}\rangle_{\text{R}} = \frac{1}{\vartheta(t)}\left[\sum_{k=1}^N|\lambda_k(t)|^2|2_k\rangle_{\text{R}} + \sqrt{2}\sum_{k \neq q=1}^N\lambda_k(t)\lambda_q(t)|1_k \cdots 1_q\rangle_{\text{R}}\right], \quad (6)$$

且 $\vartheta(t) = \sqrt{1 - \xi^4(t) - 2\xi^2(t)\chi^2(t)}$ 。依据(4)式和(5)式,很容易计算两个三能级系统的时间演化态。

3 束缚纠缠的猝死与复活

在研究可提纯性之前,先介绍自由纠缠和束缚纠缠的特征。对于高维量子系统,如果一个量子态作部分转置后有正的本征值,可以判定此量子态是不可提纯的,称这种纠缠态为束缚纠缠态。反之,作部分转置后有负的本征值的量子态是可提纯的,这种量子态称为自由纠缠态。有研究^[24]声称,作部分转置后有负本征值的量子态仍然有可能为束缚纠缠态,但目前还没有找到充足的证据。一般而言,探测束缚纠缠态没有唯一的标准和方法,也没有一个方法能探测出所有的束缚纠缠态。然而,重排定则^[25](r)在很多情况下都是一种行之有效的量度方法,而且较容易计算任意量子态。对于一个给定的密度矩阵,重排定义为 $(\rho^r)_{ij,kl} = \rho_{ik,jl}$ 。若给定量子态为分离态,则有 $\|\rho^r\| - 1 \leq 0$;对于具有正的本征值的量子态而言, $\|\rho^r\| - 1 > 0$ 即可判断此量子态处于束缚纠缠态^[26]。因此,可以通过 $\|\rho^r\| - 1$ 随时间的演化曲线来判断所考虑系统的状态。选择正交基矢为 $\{|00\rangle, |01\rangle, |02\rangle, |10\rangle, |11\rangle, |12\rangle, |20\rangle, |21\rangle, |22\rangle\}$ 。

考虑非常熟悉的Horodecki态

$$\rho_{\alpha}(0) = \frac{2}{7}|\psi_{+}\rangle\langle\psi_{+}| + \frac{\alpha}{7}\sigma_{+} + \frac{5-\alpha}{7}\sigma_{-}, \quad (7)$$

式中 $|\psi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|01\rangle + |10\rangle + |22\rangle)$, $\sigma_{+} = \frac{1}{3}(|00\rangle\langle 00| + |12\rangle\langle 12| + |21\rangle\langle 21|)$, $\sigma_{-} = \frac{1}{3}(|11\rangle\langle 11| + |20\rangle\langle 20| + |02\rangle\langle 02|)$ 。 α 是一个调节参数,不同的 α 值对应着不同性质的 Horodecki 态。容易证明,对 $\rho_{\alpha}(0)$ 的部分转置矩阵求本征值,通过负度^[23]可以得到: $4 < \alpha \leq 5$ 时,存在负本征值,故此范围内的 α 值对应着自由纠缠态。当 $2 \leq \alpha \leq 4$ 时,所有的本征值均为正值,则此时 $\rho_{\alpha}(0)$ 处于分离态或束缚纠缠态。借助于重排定则^[23]作进一步判断,可以得到当 $2 \leq \alpha \leq 3$ 时, $\rho_{\alpha}(0)$ 为分离态, $3 < \alpha \leq 4$ 时为束缚纠缠态,这里取 $3 < \alpha \leq 4$ 。通过(7)式,取部分偏迹得到原子系统和相互作用库的时间演化密度矩阵。

接下来根据各密度矩阵元计算 $\|\rho'\| - 1$ 的表达式,并绘制演化曲线。然而,对于一个 9×9 的矩阵而言,求解 $\|\rho'\| - 1$ 的解析表达式有一定的困难,因此作数值解处理。图 1 绘出了原子系统在 $\alpha=3.8$ 时,重排定则随衰减参数 κt 演化的曲线。曲线表明, $\|\rho'\| - 1$ 在 $\kappa t \approx 0.08$ 时为零,原子系统表现出束缚纠缠猝死。同时,需要说明的是,在 $\kappa t \approx 0.08$ 之后,并不能用重排定则来判断此时原子系统状态,它既有可能为自由纠缠态,也可能为分离态,甚至还存在着是束缚纠缠态的可能性。前面也提到,重排定则不能探测到所有的纠缠态。当然,在目前的研究认识范围内,上述结论是成立的。

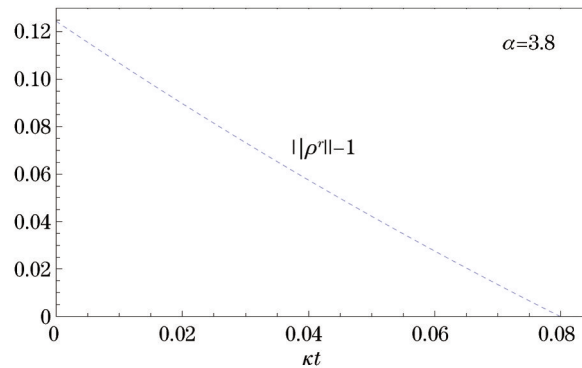


图 1 在 $\alpha=3.8$ 时,重排定则 $\|\rho'\| - 1$ 随衰减参数 κt 演化的曲线

Fig.1 Evolution curve of realignment criterion $\|\rho'\| - 1$ is plotted against decay rate κt with $\alpha=3.8$

下面研究相互作用库束缚纠缠的演化规律。图 2 绘出了库的密度矩阵在 $\alpha=3.8$ 时,重排定则随衰减参数 κt 演化的曲线。曲线表明,初始时刻相互作用库中没有束缚纠缠,在 $\kappa t \approx 2.57$ 时,库中突然出现了束缚纠缠,此现象充分证明了库中束缚纠缠的复活。在 $\kappa t \rightarrow \infty$ 时,原子系统的束缚纠缠彻底的转移到库中。对比图 1 与图 2,注意到库的束缚纠缠复活时间滞后于原子系统的猝死时间,此空白时间束缚纠缠存储于何处。受 Lopez 等^[20]工作的启示,研究扩展系统的其他组合: ρ_{c1r1} , ρ_{c2r2} , ρ_{c1r2} 及 ρ_{c2r1} ,发现在空白时间内,系统的束缚纠缠确实存在于这几种组合之中,支持了 Lopez 等的结论。

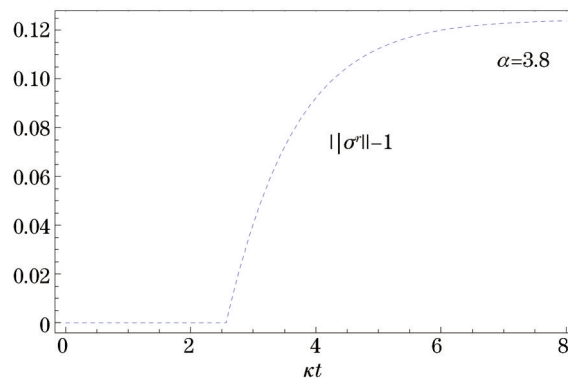


图 2 在 $\alpha=3.8$ 时,重排定则 $\|\sigma'\| - 1$ 随衰减参数 κt 演化的曲线

Fig.2 Evolution curve of realignment criterion $\|\sigma'\| - 1$ is plotted against the decay rate κt with $\alpha=3.8$

Horodecki 态中只有一个可变参数 α , 现在来讨论参数 α 的取值对系统束缚纠缠的影响。图 3 分别取 $\alpha=3.8$ 和 $\alpha=3.5$ 。曲线表明 α 会影响束缚纠缠猝死和复活的时间。 α 越大, 束缚纠缠保持的时间越长, 复活得越快。但总体上看, α 的影响较小, 因此以上结论有一定的普适性。这与 Mazhar [23] 的结果有较大的不同: Mazhr 的研究表明, 当初始的 Horodecki 态取 $4 < \alpha \leq 5$ (自由纠缠态) 时, α 是一个敏感参数, $\alpha=4.2$ 与 $\alpha=4.25$ 时的动力学行为有显著差异。

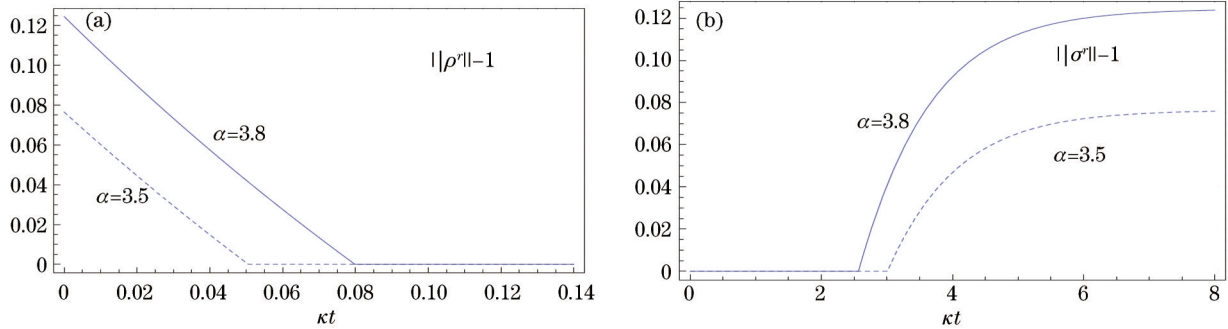


图3 原子系统和相互作用库分别在 $\alpha=3.8$ 及 $\alpha=3.5$ 时, 重排定则 $\|\rho'\| - 1$ 和 $\|\sigma'\| - 1$ 随衰减参数 kt 演化的曲线

Fig.3 Evolution curve of realignment criterion $\|\rho'\| - 1$ and $\|\sigma'\| - 1$ is plotted against decay rate kt with $\alpha=3.8$ and $\alpha=3.5$, respectively

最后, 考虑一个局域等价的态 $\tilde{\rho}_\alpha, \tilde{\sigma}_\alpha$ 可以通过对(7)式应用一个局域操作 $U = I_3 \otimes \theta, \theta = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|$ 得到

$$\tilde{\rho}_\alpha = U \rho_\alpha U^\dagger = \frac{2}{7} |\tilde{\psi}_+\rangle\langle\tilde{\psi}_+| + \frac{\alpha}{7} \tilde{\sigma}_+ + \frac{5-\alpha}{7} \tilde{\sigma}_-, \quad (8)$$

鉴于局域幺正操作并不会将分离态转变为纠缠态, 因此 $\tilde{\sigma}_+ = \frac{1}{3}(|01\rangle\langle 01| + |12\rangle\langle 12| + |20\rangle\langle 20|)$, $\tilde{\sigma}_- = \frac{1}{3}(|10\rangle\langle 10| + |21\rangle\langle 21| + |02\rangle\langle 02|)$ 。同理, 最大纠缠态 $|\tilde{\psi}_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$, 此局域幺正操作不改变量子态的迹和静态纠缠, 但对纠缠的动力学演化行为却有深远影响^[27]。

在 $\alpha=3.8$ 时, 原子系统 $\tilde{\rho}_\alpha$ 和相互作用库 $\tilde{\sigma}_\alpha$ 的重排定则随衰减参数 kt 的演化呈现类似的规律: 在 $kt \approx 0.077$ 时, 原子系统的束缚纠缠出现猝死, 而 $kt \approx 2.55$ 时, 库的束缚纠缠开始复活。最后, 束缚纠缠全部转移到库中, 两种情况的结论一致。

本中对束缚纠缠作了较为全面的研究, 发现了束缚纠缠的猝死和复活现象。此现象的物理实质和意义是: 任何实际的量子系统都可以认为是开放系统, 携带信息的量子态会不可避免地与其周围的环境发生相互作用而产生退相干, 从而使得量子态信息的流失。本文考虑两个初始纠缠的三能级原子与其独立库的相互作用, 在系统演化过程中, 量子态的信息流失到相关库中。因此量子态的信息逐渐衰减直至完全消失, 同时相互作用库中出现了流失过来的信息, 并且最终趋于一个稳定值。由于信息的总量守恒, 原子初始纠缠在数值上与稳定库的基本相等。原子系统纠缠信息的猝死必然也导致相互作用库纠缠的产生。

4 结 论

研究了两个三能级原子系统束缚纠缠的演化动力学。通过扩展原子系统将相互作用库的自由度包括进来。研究表明: 原子系统束缚纠缠猝死必然导致相互作用库束缚纠缠的复活。复活时间滞后的原因是在空白时间内束缚纠缠暂时储存于另外几种组合系统中, 之后原子系统的束缚纠缠全转移到相互作用库中。此现象的物理实质和意义从信息守恒的角度得到了解释。最后, 讨论了 Horodecki 态局域幺正操作后的束缚纠缠演化, 并与 Mazhar 的结论作了比较。

致谢 感谢德国齐根大学物理系的 Mazhar Ali 教授多次有益的讨论和交流。在本文的部分计算与分析方面, Mazhar Ali 给予了很大的帮助, 在此深表感谢。

参 考 文 献

- 1 Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states[J].

- Phys Rev Lett, 1992, 69(20): 2881–2884.
- 2 Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 1–70.
- 3 Wang Chengzhi, Yu Xiaoqin, Li Chunxian, *et al.*. Entanglement between two atoms mediated by two dissipative optical cavities [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(s2): s227001.
王成志, 喻小琴, 李春先, 等. 耗散双光腔调制的量原子间的纠缠[J]. 光学学报, 2013, 33(s2): s227001.
- 4 Lu Daoming, Qiu Changdong. Entanglement properties in the system of atom interacting with two-mode cavity [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(12): 1227003.
卢道明, 邱昌东. 原子与双模腔相互作用系统中的纠缠特性[J]. 光学学报, 2013, 33(12): 1227003.
- 5 Lu Daoming. Entanglement properties in the system of atom interacting with coupled cavities via a two-photon hopping interaction [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(2): 0227001.
卢道明. 双光子过程耦合腔系统中的纠缠特性[J]. 光学学报, 2012, 32(2): 0227001.
- 6 Hu Yaohua, Liu Qiang. Control of the thermal field with time-varying frequency on entropy exchange in the J-C model with mixed states [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(12): 1227002.
胡要花, 刘强. 频率变化的热光场对混态J-C模型中熵交换的调控[J]. 光学学报, 2013, 33(12): 1227002.
- 7 Feng Chuan, Sachuerfu, Li Hongxing. Entanglement of an atom interacting with Glauber-Lachs state in multiphoton Jaynes-Cummings model [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(5): 0527001.
冯川, 萨楚尔夫, 李红星. 多光子Jaynes-Cummings模型中原子与Glauber-Lachs场态相互作用的量子纠缠[J]. 光学学报, 2013, 33(5): 0527001.
- 8 Jia Xiaojun, Duan Zhiyuan, Yan Zhihui. Dependence of continuous variable entanglement enhancement on experimental parameters [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(2): 0227001.
贾晓军, 段志园, 闫智辉. 连续变量纠缠增强对实验参量的依赖关系[J]. 光学学报, 2013, 33(2): 0227001.
- 9 Lu Daoming. Quantum properties of a new three-mode squeezed vacuum state [J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(8): 0827001.
卢道明. 一种新的三模压缩真空态的量子特性[J]. 光学学报, 2014, 34(8): 0827001.
- 10 Luo Sixing, Yao Li, Yang Bojun. Generation of entangled photon pairs through photonic crystal fiber [J]. Chinese J Lasers, 2009, 36(2): 410–412.
罗思行, 姚立, 杨伯君. 利用光子晶体光纤产生纠缠光子对[J]. 中国激光, 2009, 36(2): 410–412.
- 11 Shi Jiadong, Wu Tao, Song Xueke, *et al.*. Dynamics of entanglement under decoherence in noninertial frames [J]. Chin Phys B, 2014, 23(2): 020310.
- 12 Zhang Rong, Qin Hao, Tang Bao, *et al.*. Disorder and decoherence in coined quantum walks [J]. Chin Phys B, 2013, 22(11): 110312.
- 13 Yu T, Eberly J H. Phonon decoherence of quantum entanglement: robust and fragile states [J]. Phys Rev B, 2002, 66(19): 193306.
- 14 Yu T, Eberly J H. Anomalous specific heat jump in a two-component ultracold fermi Gas [J]. Phys Rev Lett, 2006, 97(14): 140404.
- 15 Salles A, De M F, Almeida M P, *et al.*. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment [J]. Phys Rev A, 2008, 78(2): 022322.
- 16 Laurat J, Choi K S, Kimble H J, *et al.*. Heralded entanglement between atomic ensembles: preparation, decoherence, and scaling [J]. Phys Rev Lett, 2007, 99(18): 180504.
- 17 Zeng Hongfang, Shao Bin, Yang Linguang, *et al.*. Entanglement sudden death induced by the Dzialoshinskii-Moriya interaction [J]. Chin Phys B, 2009, 18(8): 3265–3270.
- 18 Vaglica A, Vetri G. Irreversible decay of nonlocal entanglement via a reservoir of a single degree of freedom [J]. Phys Rev A, 2007, 75(6): 062120.
- 19 Li P, Zhang Q, You J Q. Dividing two-qubit Hilbert space via abrupt and asymptotic disentanglement [J]. Phys Rev A, 2009, 79(1): 014303.
- 20 Lopez C E, Romero G, Lastra F, *et al.*. Sudden birth versus sudden death of entanglement in multipartite systems [J]. Phys Rev Lett, 2008, 101(8): 080503.
- 21 Song Wei, Chen Lin, Zhu Shiliang. Sudden death of distillability in qutrit-qutrit systems [J]. Phys Rev A, 2009, 80(1):

012331.

- 22 Huang J, Fang Maofa, Yang Baiyuan, *et al.*. Distillability sudden death in a two qutrit systems under a thermal reservoir [J]. *Chin Phys B*, 2012, 21(8): 084205.
- 23 Mazhar A. Distillability sudden death in qutrit–qutrit systems under amplitude damping [J]. *J Phys B*, 2010, 43(4): 045504.
- 24 Divincenzo D P, Shor P W, Smolin J A, *et al.*. Evidence for bound entangled states with negative partial transpose [J]. *Phys Rev A*, 2000, 61(6): 062312.
- 25 Xiao Yuchen. Realignment entanglement criterion of phase damped Gaussian states [J]. *Quant Inf Comput*, 2013, 12(12): 3665–3674.
- 26 Horodecki P, Horodecki M, Horodecki R. Bound entanglement can be activated [J]. *Phys Rev Lett*, 1999, 82(5): 1056–1059.
- 27 Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R. General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation [J]. *Phys Rev A*, 1999, 60(3):1888–1898.

栏目编辑: 刘丰瑞