

加窗截取改善信号非稀疏表达的稀疏性

杨初平 蔡汶曦 翁嘉文

华南农业大学物理系, 广东 广州 510642

摘要 为了把压缩传感技术应用到变换域非稀疏信号中,提出了一种能够改善信号非稀疏表达稀疏性的新方法。该方法采用可移动窗口函数把信号在变换域中的非稀疏表达截取成多个窗截表达,只要控制每个窗口函数宽度远小于信号的长度,则每个窗截表达具有较好的稀疏性。通过稀疏的窗截表达实现对非稀疏表达的压缩传感。结合高斯和矩形窗口函数给出了详细的理论分析,无噪和加噪信号的实验结果证明了该方法的有效性。

关键词 图像处理; 压缩传感; 非稀疏表达; 窗截表达; 稀疏性; 信号重建

中图分类号 TN911.72

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP52.031002

Window-Added Sampling for Improving Sparsity of Non-Sparse Representation of Signals

Yang Chuping Cai Wenxi Weng Jiawen

Department of Physics, South China Agricultural University, Guangzhou, Guangdong 510642, China

Abstract In order to apply compressed sensing technique to a non-sparse signal in transform domains, a novel method is presented to improve the sparsity of the non-sparse representation of a signal. The method employs a movable window function to decompose the non-sparse representation of a signal in transform domains into multiple window-cutting representation, as long as the width of each window function is far less than the length of the signal, and then each window-cutting representation has good sparsity. The compressed sensing of non-sparse representation is realized by the sparse window-cutting representations. The detailed theoretical analysis using Gaussian and rectangle window functions is presented and the experimental results of both noise-free image and noise-added image demonstrate that the method is valid.

Key words image processing; compressed sensing; non-sparse representation; window-cutting representation; sparsity; signal reconstruction

OCIS codes 100.3008; 100.3010; 100.2960

1 引言

考虑到压缩传感在稀疏信号采样、传输和储存方面的优势^[1-4],自2006年以来压缩传感吸引了越来越多的注意,在全息压缩^[5]、图像加密^[6]、成像技术^[7-10]、降噪^[11]、语音处理^[12]等方面得到了广泛的应用。适合压缩传感的信号必须满足的一个关键条件是信号的稀疏性,可以是空域上的稀疏,也可以是某个变换域上的稀疏。但是,大量信号在空域上几乎是非稀疏信号。因此,为了能够适用于压缩传感,更多的是借助一些变换域实现信号在另一个空间里的稀疏表达。为此,各种各样的变换域被不断地提出和应用,从传统的傅里叶变换、小波变换,到后来提出的多尺度几何分析^[13],诸如 Contourlet、Curvelet、Bandelet、Ridgelet,正交基集合^[14]和冗余字典^[15-16]等。

信号的稀疏表达需要选择合适的变换域。事实上,不存在对各种信号都普遍适用的变换域,每个变换域能适用的信号总是具有针对性的。因此,在变换域上非稀疏表达的信号就无法应用压缩传感技术。

本文的分析表明,对信号在某个变换域上的非稀疏表达,如果采用一个可移动的窗口函数把该信号的非稀疏表达分割成几个部分,每个部分称为窗截表达,控制窗口的宽度,可以使每个窗截表达具有良好的稀

收稿日期: 2014-09-09; 收到修改稿日期: 2014-10-16; 网络出版日期: 2015-02-06

基金项目: 国家自然科学基金(61307011)、广东省自然科学基金(9151064201000035)

作者简介: 杨初平(1970—),男,博士,副教授,主要从事光电信息处理方面的研究。E-mail: yangchp@scau.edu.cn

疏性,从而通过稀疏的窗截表达实现变换域非稀疏信号压缩传感处理。

2 压缩传感基础

如果空域上的非稀疏信号 \mathbf{x} 在正交变换域 $\psi = \{\psi_i\}_{i=1}^N$ 上可以表示为

$$\mathbf{x} = \psi \mathbf{a} = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i = \sum_{i=1}^k a_i \psi_i, \quad (1)$$

式中稀疏系数 $a_i = \langle \mathbf{x}, \psi_i \rangle$ 。如果只有 k 个系数不等于零, $k \ll N$, 则称信号为正交变换域上的 k 稀疏信号。采用一个 M 行 N 列的测量矩阵 $\phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ ($M \ll N$) 对信号 \mathbf{x} 进行测量,可以得到一个测量结果 \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \phi \mathbf{a}, \quad (2)$$

依靠合适的算法可以从测量结果 \mathbf{y} 中提取出高精度或高概率的重构信号 \mathbf{a} , \mathbf{a} 和 \mathbf{x} 是等价的两个信号。压缩传感的前提是信号具有良好的稀疏性。

3 窗截表达的稀疏性

窗截表达就是信号在某个变换域上的非稀疏表达与窗口函数的乘积。若空域信号表示为 $f(x)$, 在某个变换域上的非稀疏表达为 $F(\omega)$, 由于它的非稀疏性,而无法适用于压缩传感。窗截表达为 $F(\omega)g(\omega - b)$, $g(\omega - b)$ 为窗口函数。高斯窗口函数和矩形窗口函数分别表示为

$$G(\omega - b) = \exp\left[-\frac{(\omega - b)^2}{2a^2}\right], \quad (3)$$

高斯窗口函数的半峰全宽(FWHM)为 Δ , 窗口尺度因子为 a , 可以移动的中心点为 b 。矩形窗口函数的宽度为 a , 中心点为 b :

$$r\left(\frac{\omega - b}{a}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega - b| < a/2 \\ 1/2, & |\omega - b| = a/2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}, \quad (4)$$

采用中心点间隔等于高斯窗口 FWHM 或者矩形窗口宽度的不同位置的窗口函数截取信号的非稀疏表达后,则原始信号的非稀疏表达与不同位置的窗截表达满足如下关系

$$\sum_{i=1} F(\omega)g(\omega - b_i) = \begin{cases} \sum_{i=1} F(\omega)G(\omega - b_i) \approx \sum_{i=1} F(\omega - b_i) = F(\omega), & G(\omega - b_i) \approx 1, |\omega - b_i| \leq \Delta/2 \\ \sum_{i=1} F(\omega)r\left(\frac{\omega - b_i}{a}\right) = \sum_{i=1} F(\omega - b_i) = F(\omega), & r\left(\frac{\omega - b_i}{a}\right) = 1, |\omega - b_i| \leq a/2 \end{cases}, \quad (5)$$

由(5)式可知,只要可移动窗口函数的中心点间隔等于高斯窗口 FWHM 或者矩形窗口宽度,所有窗截表达之和等于(或约等于)原始信号的非稀疏表达。在各个窗截表达中只有窗口范围内是非零值,其他信号值很小、接近零(对高斯窗口)或为零(对矩形窗口),对于一定长度的信号,只要窗口函数的宽度比较窄,每个窗截表达就是一个含有大量零元素和少量非零元素的序列,这是稀疏信号的特征,因而每个窗截表达具有良好的稀疏性,可以根据(2)式进行压缩传感处理。这时令 $\mathbf{a} = \sum_{i=1} F(\omega)g(\omega - b_i)$, (2)式可改写为

$$\mathbf{y} = \phi \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \phi \mathbf{a} = \phi \sum_{i=1} [F(\omega)g(\omega - b_i)] = \sum_{i=1} [\phi F(\omega)g(\omega - b_i)] = \sum_{i=1} \mathbf{y}_i, \quad (6)$$

式中 $\mathbf{y}_i = \phi F(\omega)g(\omega - b_i)$, 对每个稀疏的窗截表达 $F(\omega)g(\omega - b_i)$ 压缩传感、重建、累加就可以获得完整的原始信号的非稀疏表达。

以离散傅里叶变换(DCT)作为变换域,具体操作过程表示如下:1) 每行空域信号进行离散傅里叶变换得到变换谱;2) 移动窗口函数对变换谱无缝截取成多个窗截表达;3) 分别对每个窗截表达压缩和重建,累加得到每行信号完整重建变换谱;4) 对重建变换谱进行逆傅里叶变换得到空域信号。

4 实 验

为了验证上述方法的有效性,以无噪图片和加噪图片为实验对象。高斯随机矩阵为测量矩阵,信号重构采用正交匹配追踪算法(OMP)。信号采样率为10%。原始信号的变换域采用离散余弦变换(DCT)。分别

采用高斯函数和矩形函数提取窗截表达,对每个窗截表达进行压缩传感、重建,然后累加得到完整的原始信号在DCT上的表达并逆变换得到重建图片。

4.1 无噪和加噪信号重建结果

高斯函数、矩形函数和某行原始信号的离散余弦变换谱曲线如图1所示,通过移动窗口可以把变换谱截取成多个窗截表达。高斯窗口尺度因子 $a=0.05$ 时,FWHM $\Delta=4$ pixel,可移动中心点取值为 $b=1,5,9,\dots$,相邻中心点间隔为4 pixel。矩形函数宽度为4 pixel,可移动中心点取值为 $b=1,5,9,\dots$,相邻中心点间隔为4 pixel。

尺寸为256 pixel×256 pixel的原始无噪图片如图2(a)所示。每行信号的离散傅里叶变换谱分别采用高斯函数和矩形函数截取后,压缩重建结果如图2(b)、(c)所示。每行信号的离散傅里叶变换谱没有使用窗口函数截取,其压缩重建结果如图2(d)所示。

尺寸为256 pixel×256 pixel的原始加噪图片如图3(a)所示。高斯随机噪声灰度平均值是25,偏差也是25。每行信号的离散傅里叶变换谱分别采用高斯函数和矩形函数截取后,压缩重建结果如图3(b)、(c)所示。每行信号的离散傅里叶变换谱没有使用窗口函数截取,其压缩重建结果如图3(d)所示。

把图2(b)、(c)与图2(d)比较,或者把图3(b)、(c)与图3(d)比较,从直观形象或者 R_{PSN} (表示峰值信噪比)值来看,无论对无噪还是加噪信号,采用窗口函数截取后的压缩重建结果总是好于不采用窗口函数截取的压缩重建结果;对加噪信号的非稀疏表达,采用窗口函数截取后也能很好地进行压缩重建。

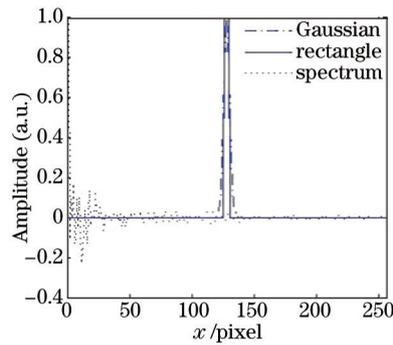


图1 两个窗口函数曲线和信号变换谱

Fig.1 Curves of two window functions and signal transform spectrum



图2 (a) 原始无噪信号; (b) 采用高斯窗口; (c) 采用矩形窗口; (d) 无窗口

Fig.2 (a) Original noise-free image; (b) using Gaussian window; (c) using rectangle window; (d)no window

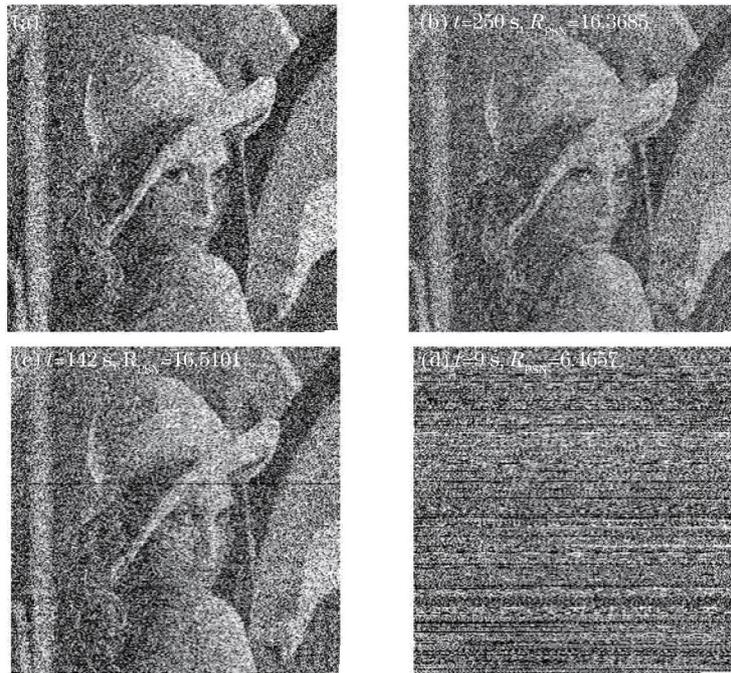


图3 (a) 原始加噪信号; (b) 采用高斯窗口; (c) 采用矩形窗口; (d) 无窗口

Fig.3 (a) Original noise-added image; (b) using Gaussian window; (c) using rectangle window; (d) no window

4.2 改变窗口宽度的结果

高斯窗口尺度因子设置为 $a = 0.01$ 时, FWHM 为 1 pixel, 可移动中心点取值为 $b = 1, 2, 3, \dots$, 相邻中心点间距为 1 pixel; 矩形窗口宽度是 1 pixel, 可移动中心点取值为 $b = 1, 2, 3, \dots$, 相邻中心点间距为 1 pixel。分别对加噪图片图 3(a) 进行处理。对应高斯窗口的重建图片、第 128 行的原始信号与重建信号的比较分别如图 4(a)、(b) 所示; 对应矩形窗口的重建图片、第 128 行的原始信号与重建信号的比较分别如图 5(a)、(b) 所示。

对相同的加噪实验对象, 把采用高斯窗口函数、对应不同窗口 FWHM 时的实验结果[图 3(b)与图 4(a)]以及采用矩形窗口函数、对应不同窗口宽度的实验结果[图 3(c)与图 5(a)]比较发现: 通常认为每行变换谱分解出来的窗截表达数量越多, 压缩重建时间将越长; 实际情况却是窗口宽度减小了, 分解出来的窗截表达数量增多, 但所用时间反而更少, 重建结果更佳。这是因为窗口越小, 窗截表达的稀疏性越好, 导致压缩重建速度更快, 效果更好。

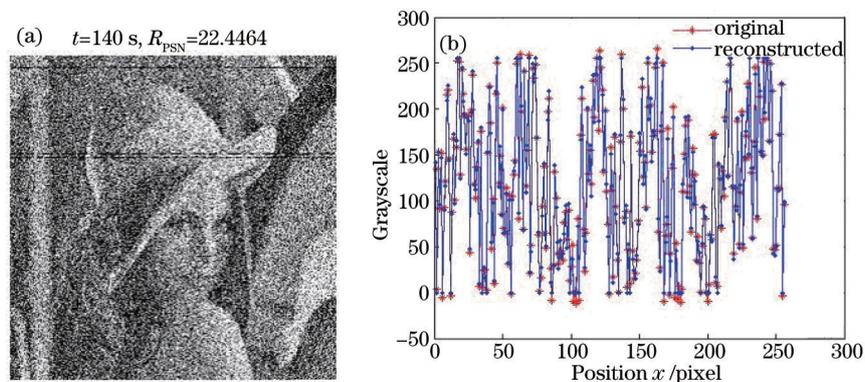


图4 (a) 用高斯窗口的重建结果; (b) 第 128 行的重建信号和原始信号

Fig.4 (a) Reconstructed results with Gaussian window; (b) reconstructed signal and original signal in the 128th row

实现结果还发现: 采用高斯窗口与采用矩形窗口比较, 虽然高斯窗口的 FWHM 等于矩形窗口的宽度, 但是, 对于不同的无噪图片, 如图 2(b)与(c), 对于相同的加噪实验对象, 如图 3(b)与(c), 或者图 4(a)与图 5(a)比较, 图 4(b)与图 5(b)比较, 对应矩形窗口的压缩重建时间少, R_{psn} 值总是优于对应高斯窗口的。这是由于对采用矩形窗口分解得到的窗截表达, 除了窗口范围内是非零信号外, 其他信号严格为零; 而高斯窗口除了

FWHM范围内的信号,其他信号不是严格为零,这影响窗截表达的稀疏性;因而矩形窗口截取的窗截表达稀疏性好于高斯窗口截取的窗截表达。

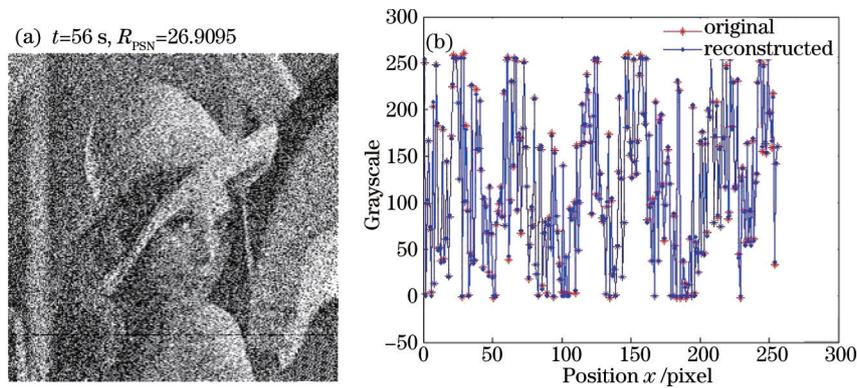


图5 (a) 用矩形窗口的重建结果; (b) 第128行的重建信号和原始信号

Fig.5 (a) Reconstructed results with rectangle window; (b) reconstructed signal and original signal in the 128th row

4.3 不同噪声强度重建结果

高斯窗口尺度因子设置为 $a=0.02$ 时,FWHM为2 pixel,可移动中心点取值为 $b=1,3,5,\dots$,相邻中心点间距为2 pixel;矩形窗口宽度是2 pixel,可移动中心点取值为 $b=1,3,5,\dots$,相邻中心点间距为2 pixel。给原始无噪图像分别加上三种不同强度高斯随机噪声,相应的噪声灰度平均值分别是50、75、125,偏差均为25,加噪后分别如图6(a)~(c)所示。每行信号的离散傅里叶变换谱采用高斯函数和矩形函数截取后压缩重建结果分别如图7(a)~(c)和图8(a)~(c)所示。



图6 (a) 原始加噪图像噪声灰度平均值50,偏差25; (b) 噪声灰度平均值75,偏差25; (c) 噪声灰度平均值125,偏差25

Fig.6 (a) Original noise-added image noise mean is 50, deviation is 25; (b) noise mean is 75, deviation is 25; (c) noise mean is 125, deviation is 25

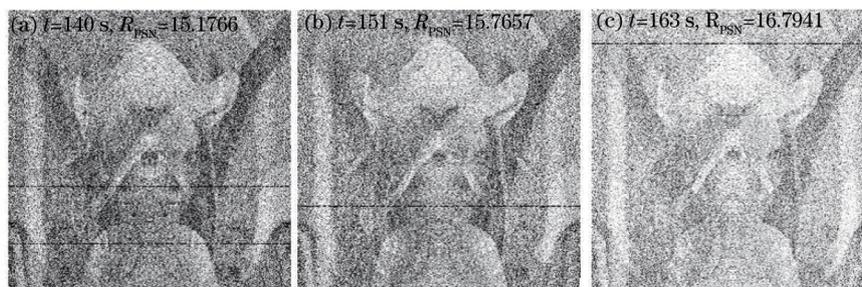


图7 使用高斯窗口的加噪图像重建结果。(a) 噪声灰度平均值50,偏差25; (b) 噪声灰度平均值75,偏差25; (c) 噪声灰度平均值125,偏差25

Fig.7 Reconstruction results of noise-added images with Gaussian window. (a) Noise mean is 50, deviation is 25; (b) noise mean is 75, deviation is 25; (c) noise mean is 125, deviation is 25

由图7(a)~(c)和图8(a)~(c)可知,虽然噪声强度增大,但每行信号变换谱采用相同的窗口函数进行截取,从 R_{PSN} 值看来,压缩重建效果基本不变。本来噪声的引入导致信号在变换域中的稀疏性恶化,但由于采用窗口函数进行截取,当信号长度一定时,信号稀疏性只决定于窗口宽度,只要窗口宽度一定,每个截取信号的稀疏性保持不变,不随着噪声增大而改变,从而保证重建结果基本不变。从重建时间和 R_{PSN} 值看来,与

采用高斯窗口截取后压缩重建结果图7(a)~(c)比较,采用矩形窗口截取后重建效果图8(a)~(c)更好。

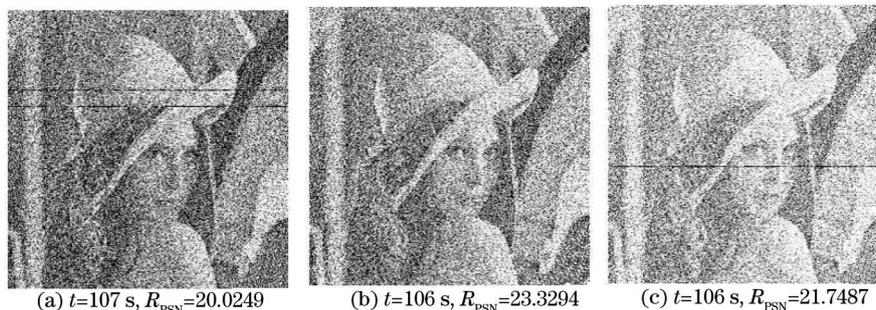


图8 使用矩形窗口的加噪图像重建结果。(a) 噪声灰度平均值 50, 偏差 25; (b) 噪声灰度平均值 75, 偏差 25; (c) 噪声灰度平均值 125, 偏差 25

Fig.8 Reconstruction results of noise-added images with rectangle window. (a) Noise mean is 50, deviation is 25; (b) noise mean is 75, deviation=25; (c) noise mean is 125, deviation is 25

5 结 论

采用可移动窗口函数把信号在某个变换域的非稀疏表达截取成多个稀疏性好的窗截表达,通过窗截表达实现对非稀疏表达的压缩传感。采用窗口函数进行截取,当信号长度一定时,信号稀疏性只决定于窗口宽度,只要窗口宽度一定,每个截取信号的稀疏性也保持不变。噪声的存在不影响每个窗截表达的稀疏性,也不影响信号的压缩重建。采用窗截函数截取后增加了压缩重建时间,一般认为同一个信号截取出来的窗截表达越多,压缩重建时间越多,实际情况是采用宽度更小的窗口进行分解不仅可以获得稀疏性更好的窗截表达,而且信号重建效果更好,重建速度加快。当高斯窗口半高宽度与矩形窗口宽度相等时,与矩形窗口截取的窗口表达比较,高斯窗口截取的每个窗截表达稀疏性差,因而重建效果也差。

参考文献

- 1 E J Candès. Compressive sampling[C]. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2006, 3: 1433-1452.
- 2 E J Candès, J Romberg, T Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE T Inform Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- 3 E J Candès, J Romberg. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions[J]. Found Comput Math, 2006, 6(2): 227-254.
- 4 D L Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE T Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- 5 Pei Hui, Yang Zhenya, Zheng Chujun. Phase-shifting on axis Fourier transform digital holography[J]. Lasers & Optoelectronics Progress, 2013, 50(4): 040901.
裴 慧, 杨振亚, 郑楚君. 基于压缩传感的相移同轴傅里叶变换数字全息[J]. 激光和光电子学进展, 2013, 50(4): 040901.
- 6 Liu Xiaoyong, Cao Yiping, Lu Pei. Research on optical image encryption technique with compressed sensing[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(3): 0307002.
刘效勇, 曹益平, 卢 佩. 基于压缩感知的光学图像加密技术研究[J]. 光学学报, 2014, 34(3): 0307002.
- 7 Ma Yanpeng, Wang Yanan, Wang Yikun, *et al.*. Study on single-pixel detection computational imaging technology based on compressed sensing[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(12): 1211007.
马彦鹏, 王亚南, 王义坤, 等. 基于压缩感知的单点探测计算成像技术研究[J]. 光学学报, 2013, 33(12): 1211007.
- 8 Zhang Shuo, Wang Jie, Wang Jincheng, *et al.*. Simple calculation method for three dimensional imaging based on compressed sensing[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(1): 0111004.
张 硕, 王 杰, 王金成, 等. 基于压缩感知的三维物体成像的简单计算方法[J]. 光学学报, 2013, 33(1): 0111004.
- 9 He Jing, Liu Cheng, Gao Shumei, *et al.*. Microscopic PIE imaging with theory of compressive sensing[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(5): 0511008.
何 婧, 刘 诚, 高淑梅, 等. 基于压缩感知理论的PIE显微成像研究[J]. 光学学报, 2014, 34(5): 0511008.
- 10 Lu Minghai, Shen Xia, Han Shensheng. Ghost imaging via compressive sampling based on digital micromirror device[J].

- Acta Optica Sinica, 2011, 31(7): 0711002.
陆明海, 沈 夏, 韩申生. 基于数字微镜器件的压缩感知关联成像研究[J]. 光学学报, 2011, 31(7): 0711002.
- 11 Yang Fan, Zhao Ruizhen, Hu Shaohai. Adaptive algorithm for image denoising based on correlation properties of contourlet coefficients[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(2): 357-361.
杨 帆, 赵瑞珍, 胡绍海. 基于Contourlet系数相关特性的自适应图像去噪算法[J]. 光学学报, 2009, 29(2): 357-361.
- 12 Sun Linhui, Yang Zhen, Ye Lei. Speech compression and reconstruction based on adaptive multiscale compressed sensing theory[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 40-45.
孙林慧, 杨 震, 叶 蕾. 基于自适应多尺度压缩感知的语音压缩与重构[J]. 电子学报, 2011, 39(1): 40-45.
- 13 M N Do, M Vetterli, The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation[J]. IEEE T Image Process, 2005, 14(12): 2091-2106.
- 14 G Peyrè. Best basis compressed sensing[J]. IEEE T Signal Proces, 2010, 58(5): 2613-2622.
- 15 H Rauhut, K Schnass, P Vandergheynst. Compressed sensing and redundant dictionaries[J]. IEEE T Inform Theory, 2008, 54(5): 2210-2219.
- 16 Liu Danhua, Shi Guangming, Zhou Jiashe. New method for signal sparse decomposition over a redundant dictionary[J]. Journal of Xidian University, 2008, 35(2): 228-232.
刘丹华, 石光明, 周佳社. 一种冗余字典下的信号稀疏分解新方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2008, 35(2): 228-232.

栏目编辑: 苏 芬