

# 双曲余弦高斯光束在梯度折射率介质中的束腰宽度及其位置

黄永超<sup>1</sup> 蔡达锋<sup>1</sup> 张廷蓉<sup>2</sup>

<sup>1</sup>内江师范学院工程技术学院, 四川 内江 641112

<sup>2</sup>四川师范大学物理与电子工程学院, 四川 成都 610066

**摘要** 为了研究梯度折射率介质中双曲余弦高斯光束的束腰及其位置, 推导出了双曲余弦高斯光束在梯度折射率介质中的传输场, 并运用空间二阶矩的定义解出了光斑尺寸、束腰宽度及位置的表达式, 讨论了梯度折射率介质对双曲余弦高斯光束的光斑尺寸、束腰宽度及位置的影响。研究表明: 梯度折射率介质中光斑尺寸随传输距离的增加出现了周期性变化, 周期由折射率系数决定; 随偏心参数的增大, 束腰宽度先逐渐减小再逐渐增大后趋于稳定; 并且发现偏心参数决定光斑尺寸振荡幅度。

**关键词** 物理光学; 双曲余弦高斯光束; 梯度折射率介质; 广义衍射积分法; 光斑尺寸

中图分类号 O435 文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP52.022601

## Beam Waist Width and Waist Location of Cosh-Gaussian Beams in a Gradient-Index Medium

Huang Yongchao<sup>1</sup> Cai Dafeng<sup>1</sup> Zhang Tingrong<sup>2</sup>

<sup>1</sup>College of Engineering and Technology, Neijiang Normal University, Neijiang, Sichuan 641112, China

<sup>2</sup>Institute of Physics and Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610066, China

**Abstract** In order to study beam waist width and waist location of cosh-Gaussian beams in a Gradient-index medium, the propagation field of cosh-Gaussian beams in a gradient-index medium is deduced, and expressions of spot size, beam waist width and waist location by using the definitions of second-order moment are presented. Based on the expressions, the influence of the Gradient-index medium on the spot size, beam waist width and waist location are mainly discussed. The results show that spot size cyclical changes in a Gradient-index medium with increasing distance from the propagation, and the cycle is determined by gradient-index parameters. With increasing eccentric parameters, beam waist width first decreases then increases and stabilizes at last, and the spot size oscillation amplitude is determined by eccentric parameters.

**Key words** physical optics; cosh-Gaussian beams; gradient-index medium; generalized diffraction integral; spot size

**OCIS codes** 260.2065; 260.2160; 260.2710

## 1 引言

梯度折射率光学介质在光纤耦合器、光通信、光学设计应用开发等方面具有广泛的应用前景。研究梯度折射率介质具有理论和实际的双重意义。科研人员对梯度折射率介质的特性及其应用做了深入的研究<sup>[1-5]</sup>。由于梯度折射率光学介质在激光束作用下将产生非线性现象, 因此已成为一个非常热门的课题, 人们对激光束在梯度折射率介质中的传输做了广泛研究。2011年, 宋宏远等<sup>[6-7]</sup>研究了余弦高斯光束和平顶高斯光束在梯度折射率介质中的传输, 结果表明: 轴上光强具有周期性变化的特征; 2013年, 周国泉<sup>[8]</sup>研究了洛伦兹高斯光束在梯度折射率介质中的传输, 指出了归一化光强的分布呈周期性变化; 同年, 刘莉等<sup>[9]</sup>研究了双曲正弦高斯光束在梯度折射率介质中的传输, 指出横向光场分布受梯度折射系数和光束参量的影响; 2014年, 黄永超等<sup>[10]</sup>研究

收稿日期: 2014-08-18; 收到修改稿日期: 2014-08-25; 网络出版日期: 2015-01-13

作者简介: 黄永超(1979—), 男, 硕士, 讲师, 主要从事激光光学方面的研究。E-mail: huangyongchaocs@163.com

了空心高斯光束在梯度折射率介质中的传输,研究表明:空心高斯光束在梯度折射率介质中传输时,光束形状保持不变。

双曲余弦高斯光束(ChGB)是厄米余弦高斯光束的特例<sup>[11]</sup>,它可看作是具有相同束宽的两偏心高斯光束的合成,并且ChGB在直角坐标系下各轴上光强为零,但是各象限中ChGB的光强分布具有明显的对称性,基于此,研究ChGB具有重要意义。但是迄今为止,对ChGB在梯度折射率介质中的束腰及位置的变化规律的研究鲜有报道。本文推导出ChGB在折射率径向分布介质中的传输光场,运用空间二阶矩的定义解出束腰及位置的表达式,并数值模拟介质中ChGB的束腰及位置的变化规律,为其在实际应用中提供理论参考。

## 2 ChGB通过梯度折射率介质的传输场表达式

在 $z=0$ 平面上的传输场可以表示为<sup>[11-12]</sup>

$$E(x_0, 0) = A_0 \exp\left(-\frac{x_0^2}{w_0^2}\right) \cosh(\Omega x_0), \quad (1)$$

式中 $w_0$ 表示ChGB光束的束腰宽度, $\Omega$ 为与双曲余弦函数项相关的参数, $\cosh$ 为双曲余弦函数。ChGB通过梯度折射率介质从源平面到观察平面 $z$ 之间的光学系统用传输矩阵表示为<sup>[11]</sup>

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta z & \sin \beta z / \beta \\ -\beta \sin \beta z & \cos \beta z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中 $A, B, C, D$ 为一阶光学系统的变换矩阵元, $\beta$ 为梯度折射率系数。当ChGB通过这一光学系统的传输时,可由广义惠更斯-菲涅耳衍射积分描述为<sup>[13]</sup>

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda B}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x_0, 0) \exp\left[-\frac{ik}{2B}(Ax_0^2 - 2x_0x + Dx^2)\right], \quad (3)$$

式中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数, $\lambda$ 为波长。选取径向梯度分布的介质作为研究对象,其径向分布的折射率可表示为<sup>[7]</sup>

$$n = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 x^2\right), \quad (4)$$

式中 $n_0$ 表示介质轴上的折射率。将(1)式代入(3)式,可得ChGB通过梯度折射率介质的传输场为

$$E(x', z) = A_0 \sqrt{\frac{q_0}{Aq_0 + B}} \exp\left[\frac{Ba^2}{4(Aq_0 + B)}\right] \exp\left(-\frac{q_0}{q_1} x'^2\right) \cosh\left(\frac{aq_0}{Aq_0 + B} x'\right), \quad (5)$$

式中 $x' = x/\omega_0$ 为相对坐标, $q_0$ 表示 $z=0$ 平面上基模高斯光束的复参量, $q_1$ 表示 $z$ 平面上的基模高斯光束的复参量,并且通过梯度折射率介质的传输场仍具有双曲函数特征,

$$q_0 = \frac{ikw_0^2}{\lambda}, \quad (6)$$

$$q_1 = \frac{B + Aq_0}{D + Cq_0}, \quad (7)$$

$$a = w_0 \Omega, \quad (8)$$

其中, $a$ 为偏心参数。将(2)代入(5)式,由 $I(x', z) = E(x', z) \times E^*(x', z)$ ,其中 $E^*(x', z)$ 表示 $E(x', z)$ 的共轭,可得ChGB在梯度折射率径向分布的介质中任意一点的光强分布为

$$I(x, z) = \frac{1}{2} \sqrt{K} \exp\left[\frac{a^2 \sin^2(\beta z)}{2T}\right] \exp(-2Kx'^2) \times \left\{ \cosh[2a \cos(\beta z) Kx'] + \cos\left[\frac{2a \sin(\beta z) Kx'}{\beta Z_0}\right] \right\}, \quad (9)$$

式中 $T = \sin^2(\beta z) + Z_0^2 \beta^2 \cos^2(\beta z)$ ,  $K = Z_0^2 \beta^2 / T$ 为变量, $Z_0 = \pi w_0^2 / \lambda$ 为共焦参量(瑞利长度)。当 $a=0$ 时,ChGB退化为基模高斯光束的光强分布。

由空间二阶矩定义可以得到

$$\sigma_x^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 I(x, z) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(x, z) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x' - \bar{x}')^2 I(x', z) dx'}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(x', z) dx'}, \quad (10)$$

式中  $\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xI(x,z)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(x,z)dx}$ ,  $\bar{x}'$  是空间一阶矩, 因为 ChGB 具有对称性, 因此  $\bar{x}' = 0$ 。将(9)式代入(10)式, 根据积分公式<sup>[14]</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp(-pt^2 \pm qt) dt = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left( 1 + \frac{q^2}{2p} \right) \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right), \quad (11)$$

计算得

$$\sigma_x^2 = \frac{w_0^2}{4} \left\{ (1 + a^2 - F) \cos^2(\beta z) + (1 - F) \left[ \frac{\sin(\beta z)}{\beta Z_0} \right]^2 \right\}, \quad (12)$$

式中  $t$  为自变量,  $p$  和  $q$  为常系数,  $F = \frac{a^2}{\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) + 1}$ 。

光斑尺寸  $W(z)$  与二阶矩关系式为

$$W^2(z) = 4\sigma_x^2. \quad (13)$$

将(12)式代入(13)式整理得

$$W^2(z) = w_0^2 \left\{ \left[ \frac{1-F}{\beta^2 Z_0^2} - (1+a-F) \right] \sin^2(\beta z) + 1 + a^2 - F \right\}. \quad (14)$$

根据(14)式, 令  $\frac{dW(z)}{dz} = 0$ , 解得 ChGB 在梯度折射率介质中传输时的束腰位置为

$$z_m = \frac{\pi}{\beta} \left( \frac{1}{2} + m \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

由(15)式可知, 束腰位置在传输方向上具有周期性, 周期由折射系数  $\beta$  决定。将(15)式代入(14)式可以得到束腰宽度为

$$W_0 = \frac{w_0}{\beta Z_0} \sqrt{1-F} = \frac{\lambda}{\pi w_0 \beta} \sqrt{1-F}. \quad (16)$$

由(16)可知, 在传输方向上束腰宽度与  $z$  无关, 与波长  $\lambda$  成正比, 与折射率系数  $\beta$  和瑞利长度  $Z_0$  成反比, 并且与 ChGB 的偏心参数  $a$  成非线性关系。

### 3 数值计算及分析

通过(9)式数值计算模拟, 可以得到 ChGB 在梯度折射率介质中传输时同一观察面 ( $z = 15 \text{ mm}$ ) 上的光强分布曲线, 如图 1 所示, 取折射率系数  $\beta = 0.45 \text{ mm}^{-1}$  (计算中取  $\lambda = 632 \text{ nm}$ ,  $w_0 = 0.96 \text{ mm}$ ), 研究发现: 当偏心参数  $a = 0$  时, 光强呈基模高斯分布, 与直接分析(9)式一致, 这是因为 ChGB 退化为了基模高斯光束。当偏心参数  $a$  增大, 光强出现双峰并且逐渐具有空心分布(暗中心)的特征, 而且光强逐渐在加强; 从图 1 中还可以发现, 因介质折射率的空间分布, 导致在同一观察面上光斑随偏心参数  $a$  增大而增大, 并且暗斑区域也在增大。

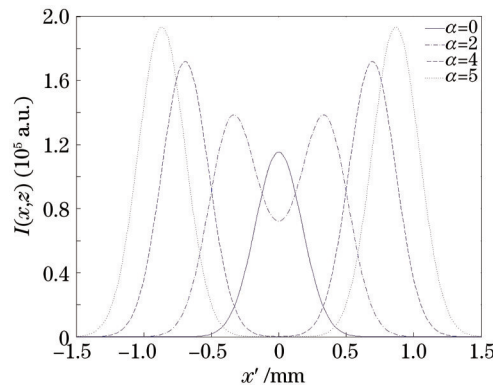


图 1  $z = 15 \text{ mm}$  平面上的光强分布

Fig.1 Intensity distributions at the plane  $z = 15 \text{ mm}$

通过(14)式可以得到光斑尺寸随传输距离的变化,结果如图2所示。当折射率系数( $\beta = 0.1 \text{ mm}^{-1}$ )一定时,由图2分析可知,随传输距离的增加,光斑尺寸出现周期性变化,并且光斑尺寸变化的周期由 $\pi/\beta$ 决定,与(15)式分析结果一致,这是因为折射率的空间分布导致了光束出现了周期性自聚焦;从图2中还可以发现,随偏心参数 $a$ 的增大,光斑尺寸位置不变,周期性不变,但是光斑尺寸的振荡幅度在逐渐增加。表明随偏心参数 $a$ 的增大,光束在发散。

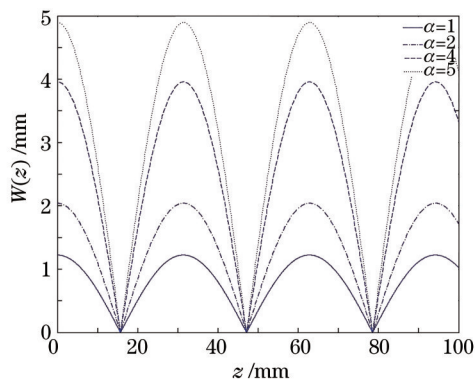


图2 光偏心参数 $a$ 取不同值时,光斑尺寸随传输距离的变化

Fig.2 Spot size versus propagation distance for different eccentric parameters  $a$

为进一步说明折射率系数 $\beta$ 对光斑尺寸的影响,图3给出了折射率系数 $\beta$ 取不同值时,光斑尺寸随传输距离 $z$ 的变化。由图3可知,当偏心参数( $a=2$ )一定,ChGB在梯度折射率介质中传输时,随折射率 $\beta$ 的增大,光斑尺寸的振荡周期发生了变化,并且折射率系数 $\beta$ 越大,振荡周期越小,这表明随折射率系数 $\beta$ 的增大,在传输方向上周期被压缩,但是光斑尺寸的振荡幅度没有变化。

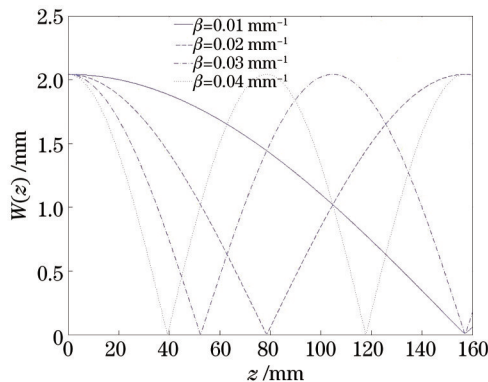


图3 当折射率系数 $\beta$ 取不同值时,光斑尺寸随传输距离 $z$ 变化

Fig.3 Spot size versus propagation distance for different index parameters  $\beta$

图4给出了在同一传输面( $z=15 \text{ mm}$ )上光斑随偏心参数 $a$ 的变化,由图4可知,随偏心参数 $a$ 增大,光斑尺寸逐渐增大,并且在偏心参数 $a < 1$ 时,光斑增大趋势是非线性的,当 $a=0$ 时,光斑尺寸最小;但是在

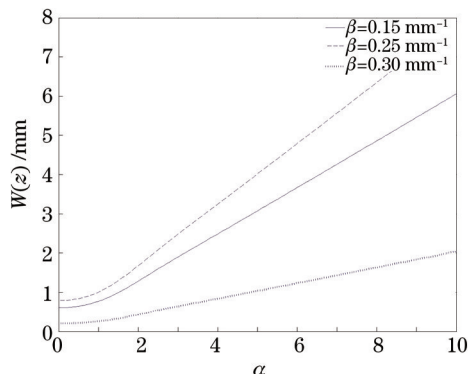


图4 光斑尺寸随偏心参数 $a$ 的变化

Fig.4 Spot size versus eccentric parameter  $a$

$a > 1$  时, 光斑尺寸增大趋势是线性的, 因此, 当  $a \rightarrow \infty$  时, ChGB 不会聚焦, 是发散的。由图 2、图 3 和图 4 可知, 光斑尺寸的振荡幅度由偏心参数  $a$  确定。

通过(16)式可以得到束腰宽度随折射率  $\beta$  的变化, 结果如图 5 所示。由图 5 可知, 随折射率系数  $\beta$  增大, 束腰宽度逐渐减小。但是  $\beta \rightarrow \infty$  时, 束腰宽度趋于零但是并不等于零, 这说明 ChGB 在轴上光强为零, 这与 ChGB 的特性一致; 但是  $\beta \rightarrow 0$  时, 束腰宽度  $W_0 \rightarrow \infty$ , 即 ChG 光束通过均匀介质时, 变得发散不能聚焦。

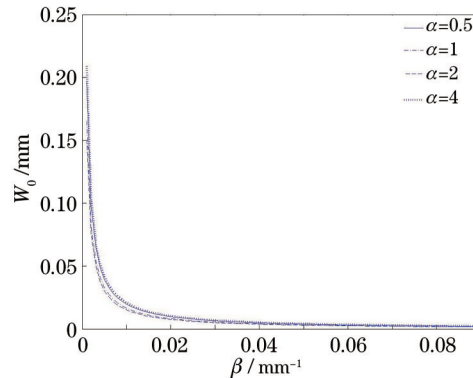


图 5 束腰宽度随折射率系数  $\beta$  的变化

Fig.5 Beam waist width versus index parameter  $\beta$

为了说明偏心参数  $a$  对束腰宽度的影响, 图 6 给出了束腰宽度随偏心参数  $a$  的变化。由图 6 可知, 当折射率参数  $\beta$  一定时, 随偏心参数  $a$  增大, 束腰宽度先逐渐减小后逐渐增大, 当偏心参数  $a$  增大到一定的值时, 束腰宽度回到初始值并趋于稳定, 此时光束已被准直; 从图 6 中还可以发现, 偏心参数  $a$  不变时, 随折射率  $\beta$  增大, 束腰宽度减小。

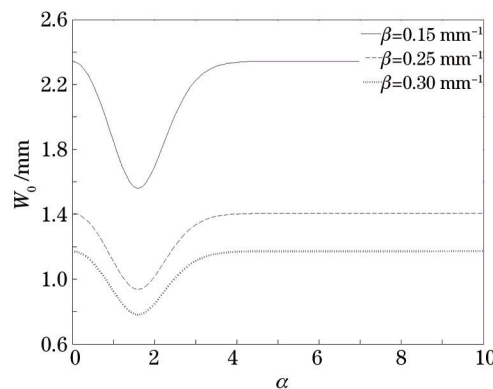


图 6 束腰宽度随偏心参数  $a$  的变化

Fig.6 Beam waist width versus eccentric parameter  $a$

## 4 结 论

研究了 ChGB 在梯度折射率介质中的传输特性, 利用广义惠更斯-菲涅耳衍射积分法推导出了 ChGB 在梯度折射率介质中的传输场强分布表达式, 运用空间二阶矩的定义计算出了光斑尺寸、束腰宽度及其位置的表达式。研究表明: 在同一观察面上, 光强随着偏心参数  $a$  的增大出现了空心分布, 因此可以通过控制偏心参数  $a$  对光束整形; 随传输距离的增加, 光斑尺寸出现了余弦平方的变化规律, 光斑尺寸振荡幅度由偏心参数  $a$  确定, 因此通过传输控制可以得到余弦平方变化的光信号; 当  $\beta$  一定时, 光束的束腰宽度随偏心参数增加, 从最大值先逐渐减小到最小值, 再逐渐增加到最大值, 当束腰宽度回到最大值后就趋于稳定; 双曲余弦高斯光束在梯度折射率介质中传输时具有的周期性与双曲正弦高斯光束在梯度折射率介质中传输的周期性一致, 并且束腰宽度随折射率系数变化也一致。由于 ChGB 对于描述大功率半导体激光器的光场有着重要的意义, 因此这些结论对大功率半导体激光器的开发应用具有一定的参考意义。

## 参 考 文 献

- 1 Sicgman A E. Lasers [M]. California: University Science Books, 1986. 586-589.

- 2 M Ballav, A R Chowdhury–Chaos. A generalized nonlinear Schrödinger equation and optical soliton in a gradient index cylindrical media [J]. *Solitons & Fractals*, 2007, 31(4):794–803.
- 3 John H Sorebo, Robert D Lorenz. Web inspection using gradient-indexed optics [J]. *Proc of IEEE*, 2005, 41(6): 1476–1482.
- 4 Ballav M, Chowdhury A R. A generalized nonlinear Schrödinger equation and optical soliton in a gradient index cylindrical media [J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2007, 31(4): 794–803.
- 5 A D Yablon, R T Bise. Low-loss high-strength microstructured fiber fusion splices using GRIN fiber lenses [J]. *IEEE*, 2005, 17(1): 118–120.
- 6 Song Hongyuan, Zhang Tingrong, Cheng Senhui, *et al.*. Propagation properties of flattened Gaussian beams in gradient-index medium [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2011, 23( 10): 2630–2633.  
宋宏远, 张廷蓉, 陈森会, 等. 平顶高斯光束在梯度折射率介质中的传输特性[J]. *强激光与粒子束*, 2011, 23(10): 2630–2633.
- 7 Song Hongyang, Zhang Tingrong, Cheng Senhui, *et al.*. Propagation properties of cosine-Gaussian beams in gradient-index medium[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2011, 23(4): 890–894.  
宋宏远, 张廷蓉, 陈森会, 等. 余弦高斯光束在梯度折射率介质中的传输特性[J]. *强激光与粒子束*, 2011, 23(10): 890–894.
- 8 Zhou Guoquan. Propagation of Lorentz-Gaussian beams in gradient-index media [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2013, 1(25): 42–46.  
周国泉. 洛伦兹高斯光束在梯度折射率介质中的传输[J]. *强激光与粒子束*, 2013, 1(25): 42–46.
- 9 Liu Li, Hao Zhongqi. Propagation of sinh-Gaussian beams in gradient-index medium [J]. *Laser Technology*, 2013, 37(1): 126–129.  
刘 莉, 郝中骐. 双曲正弦高斯光束在梯度折射率介质中的传输[J]. *激光技术*, 2013, 37(1): 126–129.
- 10 Huang Yongchao, Li Changjin, Zhang Xinlong. Propagation properties of hollow Gaussian beams in gradient-index media [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2014, 51(3): 032601  
黄永超, 黎昌金, 张新龙. 空心高斯光束在梯度折射率介质中的传输[J]. *激光与光电子学进展*, 2014, 51(3): 032601.
- 11 Casperson L W, Tovar A A. Hermite sinusoidal Gaussian beams in complex optical systems [J]. *J Opt Soc A m A*, 1998, 15(9): 954–963.
- 12 Baida Lü, Bin Zhang, Hong Ma. Beam-propagation factor and mode coherence coefficients of hyperbolic-cosine-Gaussian beams [J]. *Opt Lett*, 1999, 24(10): 640–642.
- 13 Collins S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics [J]. *J Opt Soc Am*, 1970, 60(9): 1168–1177.
- 14 Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms* [M]. New York: Mc Graw Hill, 1954.

栏目编辑: 史 敏