

# 可调支撑力对光学元件面形的影响

吴志会 王东平 华洋洋 倪明阳 东立剑

中国科学院长春光学精密机械与物理研究所应用光学国家重点实验室超精密光学工程研究中心, 吉林 长春 130033

**摘要** 可调支撑装置是高精度光学元件的常用支撑结构。分析了可调支撑装置支撑力调节对光学元件面形的影响规律。建立可调支撑装置的力学模型,利用有限元法计算光学元件的变形,并对光学元件面形进行 Zernike 多项式拟合。不同工况下分析结果表明:均匀支撑时光学元件面形均方根(RMS)最小,可调支撑力变化时,引入的光学元件面形 RMS 以及主要 Zernike 多项式系数均与支撑力线性相关,与光学元件的初始支撑状态无关。建立 Fringe Zernike 系数随任意支撑力变化的敏感度矩阵,采用该矩阵预测随机工况下光学元件支撑力调整后面形,预测调节面形与有限元仿真调节面形基本一致,RMS 误差优于 0.3%,为可调支撑装置的设计与装调提供理论依据。

**关键词** 光学器件;可调支撑结构;面形;有限元法;Zernike 多项式

**中图分类号** TH74 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP52.122201

## Influence of Adjustable Supporting Force on Surface Shape of Optical Element

Wu Zhihui Wang Dongping Hua Yangyang Ni Mingyang Dong Lijian

Engineering Research Center of Extreme Precision Optics, State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun, Jilin 130033, China

**Abstract** Adjustable optic mount is commonly used in the structure design of high precision optical system. Surface shape of optical element influenced by the supporting force adjustment is researched. Mechanical model of the adjustable mount is established, deformation of optical element is calculated with finite element method, and the surface shape is fitted with Zernike polynomials. The analysis results in different working conditions show that the root mean square (RMS) of surface shape is minimized when optical element is under uniform support; when supporting force changes, it causes linear variety of RMS and main Zernike polynomial coefficients of surface shapewhich is independent at the initial working condition of optical element. Finally, sensitivity matrix of Zernike polynomial coefficients changed by every supporting force is established, then estimation of surface shape due to support force adjustment in a new random working condition is made, the estimated result is similar to the finite element analysis surface shape, and the error of RMS is less than 0.3%, so the estimating method is able to guide the design and assembly of adjustable optic mount.

**Key words** optical devices; adjustable optic mount; surface shape; finite element method; Zernike polynomials

**OCIS codes** 120.4640; 120.4880; 200.4880; 220.4880

## 1 引言

高精度光学系统对光学元件面形有着极其苛刻的要求,尤其是光刻投影物镜对光学元件面形精度均方根值(RMS)要求达到纳米甚至亚纳米级别<sup>[1-3]</sup>。为了实现上述高精度面形要求,必须克服光学元件自重引起的变形对光学元件面形的影响,一种常见的方法是对光学元件采用多点支撑<sup>[4]</sup>。在多点支撑装置中,为了保证光学元件自重变形引起的面形变化最小,一种思路是将支撑装置设计为固定式,这一类装置对机械结构的加工提出严格的公差要求,其优点是装调简单,但是加工难度较大<sup>[5]</sup>;另外一种思路是将支撑装置设计为可调式,较大的放松机械加工公差要求,最终通过装调实现理想支撑,其关键在于如何准确掌握装调过程中光学元件面形变化的规律。

收稿日期: 2015-05-20; 收到修改稿日期: 2015-07-08; 网络出版日期: 2015-10-25

基金项目: 国家重大专项 02 专项(2009ZX02205)

作者简介: 吴志会(1987—),男,硕士,助理研究员,主要从事光机结构设计方面的研究。E-mail: wuzh@sklao.ac.cn

目前外力对光学元件面形影响的研究主要集中在主动光学领域,陈新东等<sup>[6]</sup>研究了主动光学元件在驱动器作用力下面形变化的静态以及动态特性,陈夫林等<sup>[7]</sup>对大口径薄面镜在不同俯仰角度支撑下的面形进行主动校正,郭抗等<sup>[8]</sup>研究在调整光学元件位置时如何避免驱动器作用力引起的面形变化。本文重点研究支撑装置在结构装调过程中光学元件的面形变化,采用有限元法(FEA)和Zernike多项式拟合方法研究在随机工况下支撑力变化对光学元件面形的影响规律。

## 2 支撑装置力学模型

如图1所示,可调支撑装置由3点固定支撑以及9点可调柔性支撑构成,3点固定支撑采用间隔120°周向均匀分布,可调柔性支撑在固定支撑之间周向均匀分布。镜片与镜框的固定支撑通过胶粘剂或者其他方式进行连接,调整可调支撑实现支撑力大小的调节。

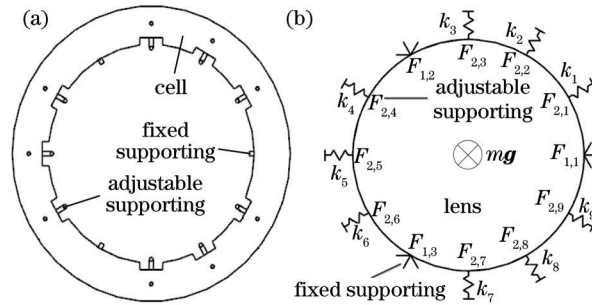


图1 可调支撑装置示意图。(a) 支撑装置;(b) 力学模型

Fig.1 Scheme of adjustable optic mount. (a) Optic mount; (b) mechanical model

固定支撑以及可调支撑的支撑力满足力平衡以及力矩平衡方程组<sup>[9]</sup>可表示为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 F_{1,i} + \sum_{s=1}^9 F_{2,s} = mg \\ \mathbf{F}_{1,1} \times \mathbf{d}_1 + mg \times \mathbf{d}_{g1} + \sum_{s=1}^9 \mathbf{F}_{2,s} \times \mathbf{d}_s^{2,3} = 0, \\ \mathbf{F}_{1,2} \times \mathbf{d}_2 + mg \times \mathbf{d}_{g2} + \sum_{s=1}^9 \mathbf{F}_{2,s} \times \mathbf{d}_s^{1,3} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中  $F_{1,i}$  为第  $i$  个固定支撑的支撑力,  $F_{2,s}$  为第  $s$  个可调支撑的支撑力,  $\mathbf{d}_1$  为固定支撑1到固定支撑2与固定支撑3连线距离矢径,  $\mathbf{d}_2$  为固定支撑2到固定支撑1与固定支撑3连线距离矢径,  $\mathbf{d}_{g1}$  光学元件重心到固定支撑2与固定支撑3连线距离矢径,  $\mathbf{d}_{g2}$  光学元件重心到固定支撑1与固定支撑3连线距离矢径,  $\mathbf{d}_s^{2,3}$  为第  $s$  个可调支撑到固定支撑2与固定支撑3连线距离矢径,  $\mathbf{d}_s^{1,3}$  为第  $s$  个可调支撑到固定支撑1与固定支撑3连线距离矢径。

在均匀支撑情况下:

$$F_{1,i} = F_{2,s} = mg/12 = f, \quad (2)$$

式中  $f$  为平均支撑力大小。

实际装调过程中,由于固定支撑力很难测量,当可调支撑的支撑力满足:

$$F_{2,s} = f. \quad (3)$$

将(3)式代入方程组(1)可求解出  $F_{1,i} = f = F_{2,s}$ , 满足均匀支撑条件。考虑实际加工与装调误差,根据胡克定律,可调支撑的支撑力大小由下式确定:

$$F_{2,s} = k_s \cdot x_s, \quad (4)$$

式中  $x_s$  为第  $s$  个可调支撑相对于自然状态下的形变,  $k_s$  为第  $s$  个可调支撑柔性结构的刚度。由于机械加工完成后  $k_s$  一般为固定值,因此在一般采用调节可调支撑位置改变其形变  $x_s$  从而改变支撑力大小  $F_{2,s}$ , 将(4)式代入到方程组(1)可求解固定支撑力  $F_{1,i}$ , 最终获得所有固定支撑点以及可调支撑点的支撑力,即光学元件的受力状态由9个可调支撑力完全确定。

## 3 面形计算方法

以如图2所示的弯月镜片为例,对其进行3点固定支撑、9点可调支撑下的支撑面形分析。在NX

Nastran中建立如图3所示的有限元模型,镜片施加重力载荷,镜片材料为融石英,材料属性如表1所示。在NX Nastran中求解镜片在满足(2)式即均匀支撑情况下的重力变形。以镜片上表面为例,采用最小二乘法对其进行36项Fringe Zernike多项式拟合<sup>[10-11]</sup>,在分析镜片面形时,除掉piston( $Z_1$ )、tilt( $Z_2$ 、 $Z_3$ )以及power( $Z_4$ )项的影响,只考虑Zernike  $Z_5$ - $Z_{36}$ 项,图4为Zernike拟合后镜片上表面的面形图,表2为镜片Fringe Zernike各项系数,面形成分中以球差 $Z_9$ 以及高级球差 $Z_{16}$ 为主,其他项均较小。

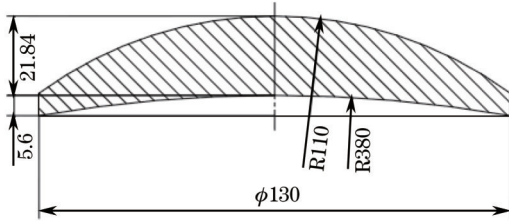


图2 镜片几何尺寸

Fig.2 Dimension of lens

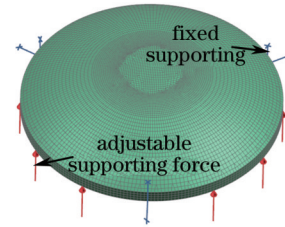


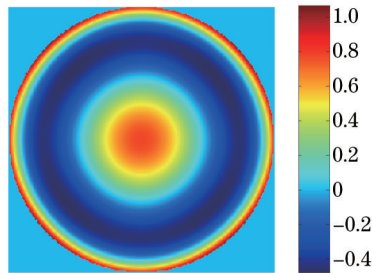
图3 有限元模型

Fig.3 Finite element model

表1 材料属性

Table 1 Material properties

Material	Fused silic
Young's modulus /MPa	7300
Poisson's ration	0.17
Density /(kg/m <sup>3</sup> )	2205



RMS: 0.40118 /nm

图4 均匀支撑下的面形

Fig.4 Surface shape under uniform supporting

表2 均匀支撑下的Fringe Zernike  $Z_5$ - $Z_{36}$ 系数Table 2 Fringe Zernike  $Z_5$ - $Z_{36}$  coefficients of lens under uniform supporting

Zernike term	Coefficient	Zernike term	Coefficient	Zernike term	Coefficient	Zernike term	Coefficient
5	-0.0009	13	0.0005	21	-0.0006	29	0.0102
6	-0.0014	14	-0.0009	22	-0.001	30	0.0009
7	0.000	15	0.0005	23	-0.0021	31	0.0013
8	0.0003	16	0.1234	24	0.0009	32	-0.0007
9	0.8896	17	-0.0407	25	-0.0118	33	-0.0009
10	-0.001	18	0.0084	26	0.0006	34	-0.0023
11	0.0011	19	0.0012	27	0.0048	35	0.001
12	0.0004	20	0.002	28	-0.0554	36	-0.0311

## 4 面形变化规律

实际工程应用中,受到加工与装调误差、应力变形等因素的影响,无法在初始即实现均匀支撑。因此,按照多种随机初始支撑状态分析支撑面形随镜片支撑力变化的规律,由于可调支撑力  $F_{2,s}$  大小全部确定之后代入(3)式即可求解出3个固定支撑点的支撑力大小  $F_{1,i}$ ,因此只需确定  $F_{2,s}$  的大小便可以完全确定镜片的支撑状态。各个初始状态的可调支撑力按照下式定义:

$$F_{2,k} = u_k f (k = 1, 2, \dots, 9), \quad (5)$$

其中  $u_k$  为可调支撑力  $F_{2,k}$  的波动因子, 工况 1 中  $u_k = 1$ ; 工况 2 与工况 3 在  $0 \leq u_k \leq 2$  范围内, 按照同余法<sup>[12]</sup>分别随机生成  $u_k$ , 确定可调支撑力  $F_{2,k} (k = 1, 2, \dots, 8)$  大小, 产生一组非均匀随机支撑, 并定义初始工况下  $u_9 = 0$ , 后续通过改变  $u_9$  研究面形随支撑力的变化规律。三组工况的可调支撑力波动因子  $u_k$  如表 3 所示。

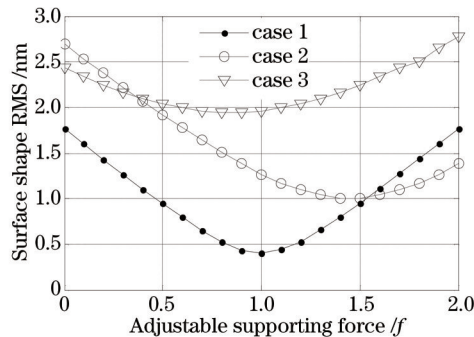
表 3 可调支撑力波动因子

Table 3 Undulate factor of adjustable support force

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$
Case1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Case2	1.35	1.22	0.63	0.44	0.9	1.5	0.6	1.2	0
Case3	0.77	0.31	1.15	1.34	0.53	1.6	0.91	0.76	0

#### 4.1 绝对面形 RMS 值变化规律

按照上述三种初始状态, 以  $F_{2,9}$  为例, 分析其在  $0 \sim 2f$  范围内变化时, 镜片上表面绝对面形(即支撑面形) RMS 值的变化规律。从图 5 可以看到在三种工况中, 绝对面形 RMS 值均有局部最小点, 且 RMS 值随着  $F_{2,9}$  偏离局部最小点程度的增加而变大; 对比不同的工况, 仅在工况 1 中, 当  $F_{2,9} = f$  时, 即均匀支撑条件下绝对面形 RMS 值最小, 此时即为镜片的理想支撑状态。

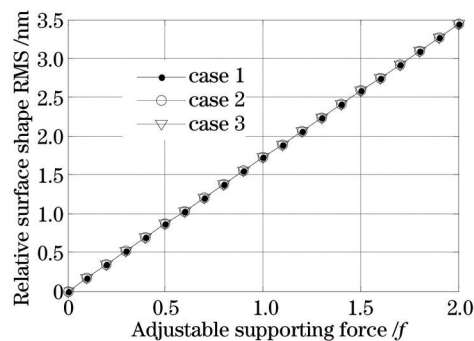
图 5 镜片绝对面形 RMS 随  $F_{2,9}$  的变化规律Fig.5 RMS of absolute surface shape versus  $F_{2,9}$ 

#### 4.2 相对面形 RMS 值变化规律

为了进一步研究上表面面形 RMS 值与可调支撑力  $F_{2,9}$  变化规律, 在三种工况下分别进行 Zernike 面形相减, 即按照下式进行处理:

$$Z_{\text{relative}}^n = Z_{\text{absolute}}^n - Z_{\text{initial}}^n, \quad (6)$$

式中  $Z_{\text{absolute}}^n$ ,  $Z_{\text{initial}}^n$ ,  $Z_{\text{relative}}^n$  均为 36 项 Fringe Zernike 系数矩阵, 分别为  $F_{2,9}$  变化时的上表面绝对面形、初始状态时的上表面绝对面形以及二者作差之后的相对面形所对应的 Fringe Zernike 系数矩阵,  $n=1, 2, 3$ , 分别表示三种不同初始工况。由相对面形的 Zernike 系数矩阵  $Z_{\text{relative}}^n$  可得到其所对应的 RMS 值。从图 6 中可以看出, 不同的工况下, 相对面形 RMS 值均随可调支撑力  $F_{2,9}$  的变化呈线性变化, 且相对面形 RMS 值与初始工况无关。

图 6 镜片相对面形 RMS 随  $F_{2,9}$  的变化规律Fig.6 RMS of comparative surface shape versus  $F_{2,9}$



### 4.3 相对面形 Zernike 系数变化规律

分别按照(6)式计算不同工况下  $F_{2,9}=f$  以及  $F_{2,9}=2f$  时的  $Z_{\text{relative}}^n$ , 如图 7 所示, 在不同的工况以及支撑力下, 相对面形 Fringe Zernike 中主要成分为像散  $Z_5$ 、 $Z_6$ 、三叶  $Z_{10}$ 、 $Z_{11}$ 、四叶  $Z_{17}$ 、 $Z_{18}$ 、五叶  $Z_{26}$ 、 $Z_{27}$  以及部分高级像散等, 彗差  $Z_7$ 、 $Z_8$ 、球差  $Z_9$  以及高级彗差、高级球差基本接近于 0, 这说明可调支撑力在变化的过程中主要影响像散以及多叶像差, 而彗差和球差对支撑力大小的变化相对来说不敏感。

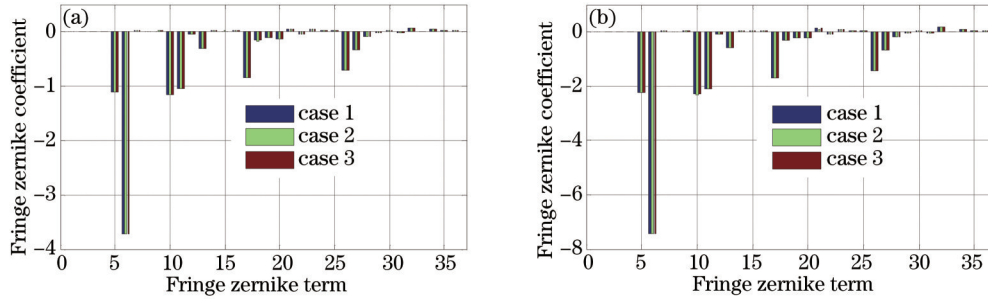


图 7 镜片相对面形 Fringe Zernike 系数。(a)  $F_{2,9}=f$ ; (b)  $F_{2,9}=2f$

Fig.7 Fringe Zernike coefficients of relative surface shape. (a)  $F_{2,9}=f$ ; (b)  $F_{2,9}=2f$

在图 8 中分析了像散以及多叶像差 Fringe Zernike 系数随可调支撑力  $F_{2,9}$  的变化规律, 可以看到各阶 Fringe Zernike 系数均与可调支撑力大小呈明显的线性关系, 且与初始状态无关, 这也较好的说明了相对面形 RMS 值均随可调支撑力  $F_{2,9}$  的变化呈线性变化的原因。

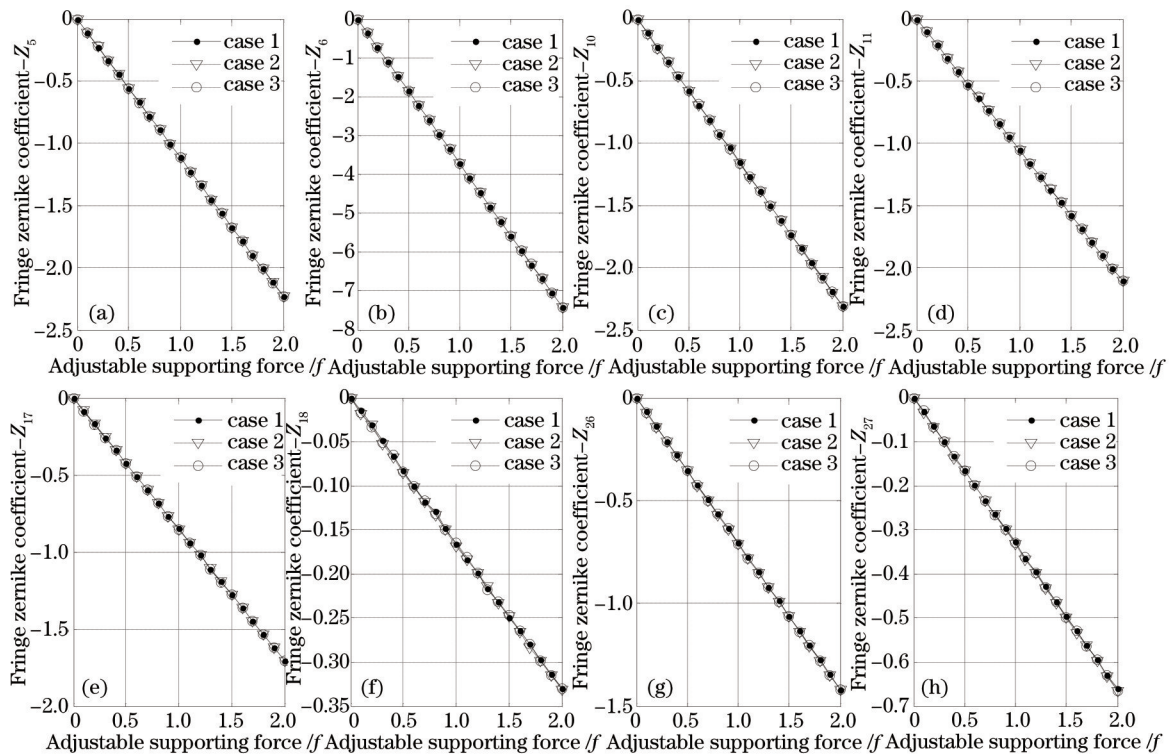


图 8 镜片相对面形主要 Fringe Zernike 系数变化规律。(a)  $Z_5$ ; (b)  $Z_6$ ; (c)  $Z_{10}$ ; (d)  $Z_{11}$ ; (e)  $Z_{17}$ ; (f)  $Z_{18}$ ; (g)  $Z_{26}$ ; (h)  $Z_{27}$

Fig.8 Characteristic of main Fringe Zernike coefficients of relative surface shape. (a)  $Z_5$ ; (b)  $Z_6$ ; (c)  $Z_{10}$ ; (d)  $Z_{11}$ ; (e)  $Z_{17}$ ;

(f)  $Z_{18}$ ; (g)  $Z_{26}$ ; (h)  $Z_{27}$

## 5 调节面形预测

按照与  $F_{2,9}$  同样的分析方法, 计算对其余各个可调支撑力对面形的影响敏感度, 也得出可调支撑力与面形之间的线性规律。根据以上规律, 任意工况下的相对面形中的 Fringe Zernike 系数可以按照下式计算:

$$Z_{\text{relative}} = \sum_k \sum_r C(k,r) \times \Delta F_{2,k}, \quad (7)$$

式中  $r$  为 Fringe Zernike 系数的序号,  $C(k,r)$  为第  $r$  项 Fringe Zernike 系数随  $F_{2,k}$  变化的敏感度(即直线变化斜率),  $\Delta F_{2,k}$  为可调支撑力的变化量。

将(7)式代入(6)式,即可以计算支撑力调节之后的光学元件面形,可得:

$$Z_{absolute} = Z_{initial} + Z_{relative} = Z_{initial} + \sum_k \sum_r C(k,r) \times \Delta F_{2,k}, \tag{8}$$

仅考虑主要 Zernike 多项式系数,修正后的敏感度矩阵  $C^*$  中的各元素满足下式:

$$C^*(k,r) = \begin{cases} C(k,r) (r = 5, 6, 10, 11, 17, 18, 26, 27) \\ 0 (\text{rest}) \end{cases}, \tag{9}$$

支撑力调节之后的光学元件面形可以按照下式进行预测:

$$Z_{absolute} = Z_{initial} + \sum_k \sum_r C^*(k,r) \times \Delta F_{2,k}. \tag{10}$$

按照(5)式重新随机产生一组新的可调支撑力波动因子定义光学元件的初始支撑状态,如表 4 中工况 4 所示,初始支撑条件下镜片面形 RMS 为 0.67 nm,调节后可调支撑力如表 4 中工况 5 所示。采用(10)式预测调节后的面形如图 9(b)所示,预测调节后面形 RMS 为 4.370 nm,有限元仿真调节后面形为 4.379 nm,如图 9 (c)所示,预测调节面形与仿真调节面形形状基本一致,RMS 值之间的相对误差优于 0.3%,从表 5 可以看出误差主要来源于敏感度矩阵  $C^*$  的简化为 0 的各项 Fringe Zernike 系数。以上结果说明(10)式能够有效预测光学元件的调节面形。

表 4 调节前后可调支撑力波动因子

Table 4 Undulate factor of adjustable support force before and after adjust

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$
Case 4	0.96	0.84	1.17	1.21	1.05	0.73	0.98	1.33	0.6
Case 5	1.13	0.52	0.88	1.63	1.43	0.85	1.05	1.14	2.6

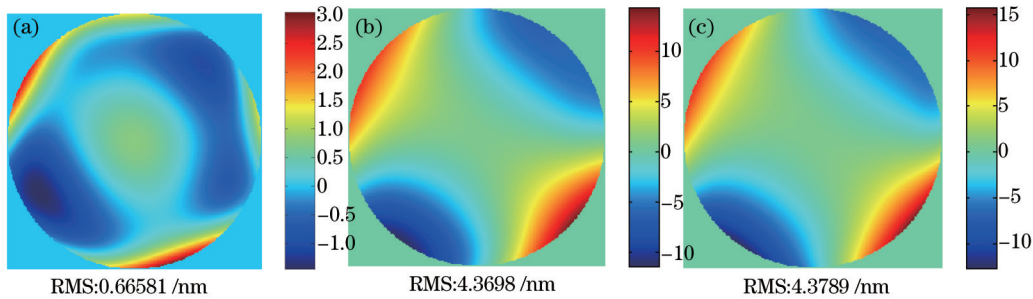


图 9 调节前后面形。(a) 初始面形; (b) 预测调节后的面形; (c) 有限元仿真调节后的面形

Fig.9 Absolute surface shape before and after adjust. (a) Initial surface; (b) estimated surface; (c) surface after FEA

表 5 预测 Zernike 系数  $Z_5-Z_{36}$  与有限元仿真结果对比

Table 5 Comparison estimated Fringe Zernike  $Z_5-Z_{36}$  coefficients with FEA

Zernike term	Estimated /nm	FEA /nm	Zernike term	Estimated /nm	FEA /nm	Zernike term	Estimated /nm	FEA /nm
5	3.2423	3.2490	16	0.1352	0.1170	27	-0.3237	-0.3445
6	-9.8556	-9.8541	17	-0.7066	-0.7598	28	-0.1238	-0.0144
7	0.0319	-0.0054	18	-0.1661	-0.1447	29	-0.0109	0.0184
8	0.0079	-0.0089	19	-0.2533	-0.0100	30	0.0061	-0.0081
9	0.9001	0.8852	20	-0.0583	0.0940	31	-0.0190	0.0244
10	-2.5820	-2.5793	21	0.1516	-0.0258	32	0.1413	-0.0264
11	-0.4407	-0.4442	22	-0.1100	-0.0099	33	-0.0128	-0.0020
12	0.3459	-0.0493	23	0.0572	-0.0094	34	0.0664	-0.0086
13	-0.7982	-0.0742	24	0.0147	-0.0161	35	0.0166	-0.0187
14	0.0457	-0.0078	25	0.0021	-0.0195	36	-0.0149	-0.0396
15	0.0116	-0.0125	26	-0.8730	-0.8842			

## 6 结 论

对光学元件可调支撑结构进行力学分析,建立其有限元模型,并采用该模型求解均匀支撑与随机支撑状态下的光学元件变形,采用Zernike多项式对上表面面形进行拟合,研究光学元件面形变化规律。研究表明:光学元件在均匀支撑状态下的面形RMS值最小;单个可调支撑力变化时,光学元件变形引起的相对面形RMS值与可调支撑力线性相关,且这种线性关系与光学元件的初始支撑状态无关;相对面形中的Fringe Zernike系数的变化主要以像散以及多叶像差为主,对应的各阶Fringe Zernike系数与可调支撑力线性相关,且与光学元件的初始支撑状态无关,各阶Fringe Zernike系数的变化规律较好的解释了光学元件面形RMS随支撑力变化呈线性关系的原因。最后将上述线性关系推广至任意支撑力,获取任意支撑力在随机工况下的Fringe Zernike系数随支撑力变化的敏感度矩阵,初始支撑状态下光学元件面形RMS为0.67 nm,支撑力调节后预测面形RMS为4.370 nm,有限元仿真面形为4.379 nm,二者误差小于0.3%,面形形状基本一致。这说明采用敏感度矩阵能够准确预测全部支撑力调节后的光学元件面形变化结果,对可调支撑结构的设计、装调等提供理论支撑,具有重要的参考价值。

## 参 考 文 献

- 1 Tian Wei, Wang Ping, Wang Rudong, *et al.*. Simulation and experimental research of 193nm projection lithography lens supporting[J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(8): 0816002.  
田 伟,王 平,王汝冬,等. 193 nm光刻投影物镜单镜支撑仿真分析及实验研究[J]. 中国激光, 2012, 39(8): 0816002.
- 2 Zhang Dejiang, Liu Liren, Xu Rongwei, *et al.*. Finite element analysis for wavefront error of lenses induced by gravity [J]. Acta Optica Sinica, 2005, 25(4): 538-541.  
张德江,刘立人,徐荣伟,等. 透镜自重变形引起波像差的有限元分析[J]. 光学学报, 2005, 25(4): 538-541.
- 3 Wang Hui, Zhou Feng, Wang Liping, *et al.*. Analysis and metrology of reproducibility of high-precision optic mount[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(12): 1208001.  
王 辉,周 烽,王丽萍,等. 高精度光学元件支撑装置面形复现性分析与测量[J]. 中国激光, 2013, 40(12): 1208001.
- 4 Yoder Paul R. Opto-Mechanical Systems Design: Third Edition[M]. Bellingham: CRC Press, 2006: 125-129.
- 5 Zhao Lei, Gong Yan. Design and analysis for the high-precision lens support structure of objective lens for lithography [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(9): 0922001.  
赵 磊,巩 岩. 光刻物镜中透镜高精度支撑结构的设计及分析[J]. 光学学报, 2012, 32(9): 092001.
- 6 Chen Xindong, Zheng Ligong, Luo Xiao, *et al.*. A deformable mirror with 9 actuated points for low aberration correction-design and experiments[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(3): 0322001.  
陈新东,郑立功,罗 霄,等. 校正低阶像差的9点促动变形镜-设计与实验[J]. 光学学报, 2012, 32(3): 0322001.
- 7 Chen Fulin, Zhang Jingxu, Wu Xiaoxia, *et al.*. Supporting structure of 620 mm thin primary mirror and its active surface correction[J]. Optics and Precision Engineering, 2011, 19(5): 1022-1029.  
陈夫林,张景旭,吴晓霞,等. 620 mm薄镜面的主动支撑结构及面形校正[J]. 光学 精密工程, 2011, 19(5): 1022-1029.
- 8 Guo Kang, Gong Yan. Effect of adjusting force on surface figure of optical element in axial adjustment mechanism[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(11): 1123001.  
郭 抗,巩 岩. 轴向调节机构中调节力对光学元件面形的影响[J]. 光学学报, 2013, 33(11): 1123001.
- 9 Luo Xin, Liu Yuan, Shen Yiping, *et al.*. Influence of non-uniform supporting forces on deformation of large-aperture optical lenses[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition), 2013, 31(8): 1-5.  
罗 欣,刘 远,沈意平,等. 支撑力非均匀性对大口径光学镜片面形的影响[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2013, 31(8): 1-5.
- 10 Shan Baozhong, Wang Shuyan, Niu Hanben, *et al.*. Zernike polynomial fitting method and its application[J]. Optics and Precision Engineering, 2002, 10(3): 318-323.  
单宝忠,王淑岩,牛憨笨,等. Zernike多项式拟合方法及应用[J]. 光学 精密工程, 2002, 10(3): 318-323.
- 11 Meng Xuan, Qiao Yanfeng, He Fengyun, *et al.*. Analyzing primary mirror deformation of photo-electronic theodolite using Zernike annular polynomial[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 50(7): 1-7.  
孟 轩,乔彦峰,何锋赞,等. Zernike环多项式分析光电经纬仪主镜变形[J]. 激光与光电子学进展, 2016, 50(7): 1-7.
- 12 Yang Guohai, Zhang Guozhi. Generating random variables[J]. Application of Statistics and Management, 2006, 25(2): 244-252.  
杨振海,张国志. 随机数生成[J]. 数理统计与管理, 2006, 25(2): 244-252.