基于 BPSK 改进的大气光通信混合 MPPM 调制方案

梁路阳¹ 蒙 文¹ 李云霞¹ 张文杰¹ 韩晓飞² ¹空军工程大学信息与导航学院,陕西西安 710077

²中国人民解放军 93514 部队,河北 遵化 064200

摘要 针对大气光通信中常规多脉冲位置调制(MPPM)的光调制方式,提出了一种由二进制相移键控(BPSK)改进的 混合多脉冲调制方案。本方案中,BPSK调制后的光脉冲在 BPSK-MPPM 混合帧中传输,信息被携带在所发送光脉 冲的位置与相位中,利用光脉冲位置变化来传输更多的比特。研究了改进的系统模型、传输信道、带宽利用率、传输 效率和信道容量,并与常规方案性能指标做了比较。仿真结果表明,改进方案的带宽利用率和传输效率高于常规方 案,并且在有保护时隙的混合 MPPM 帧结构中,信道容量也会提高。

关键词 光通信; 二进制相移键控; 多脉冲位置调制; 带宽利用率; 传输效率;信道容量 中图分类号 TN929.11 文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP52.100605

Hybrid MPPM Modulation Scheme Based on Modified BPSK in Atmospheric Optical Communication

Liang Luyang¹ Meng Wen¹ Li Yunxia¹ Zhang Wenjie¹ Han Xiaofei²

¹Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China ²Unit 93514 of Chinese People's Liberation Army, Zunhua, Hebei 064200, China

Abstract Considering the conventional multi-pulse pulse position modulation (MPPM) in free atmosphere optical communication, a hybrid MPPM modulation scheme based on modified binary phase shift keying (BPSK) is proposed. In the scheme, BPSK-modulated optical pulses are transmitted in a BPSK-MPPM hybrid frame and as the transmitted information is carried by both position and phase of the transmitted pulse, the change of optical pulse position is used to transmit more bits. The modified system model, channel transmission characteristics, bandwidth utilization, transmission efficiency and channel capacity are researched and measured, which are also compared with those of traditional schemes. Simulation results show that bandwidth utilization and transmission efficiency of the proposed scheme are higher than those of the ordinary schemes. In addition, the channel capacity in the hybrid MPPM frame construction including protected slots is also higher than that of the ordinary schemes.

Key words optical communications; binary phase shift keying; multi-pulse pulse position modulation; bandwidth utilization; transmission efficiency; channel capacity

OCIS codes 060.2605; 060.4510; 060.4080

1 引 言

脉冲位置调制技术是光通信中一种重要调制方案^[1],其中一种方式是多脉冲位置调制(MPPM)。MPPM 可以用来提高普通单脉冲位置调制(PPM)方式的带宽利用效率^[2-3]。文献[4]提出了高效功率光通信中的多 脉冲位置调制。通常情况下,无论是 PPM 还是 MPPM 已被广泛用于强度调制/直接检测(IM/DD)系统。然 而,为了使接收机具有更好的灵敏度,相干检测需在大范围内使用(包括零差检测和外差检测)^[5-6]。对于散 粒噪声限制系统,外差检测接收机的灵敏度比直接检测接收机的灵敏度高出3 dB^[7]。

许多文献提出了光通信中关于脉冲位置和相位的混合调制思路。文献[8]研究了常规接收机和量子接收机的二进制相移键控与双脉冲相位调制(BPSK-2PPM)相结合的混合调制方案,并对其进行了性能比较。文献[9]提出了另一种PPM与二进制相移键控的副载波强度调制(BPSK-SIM)相结合的混合调制。在

收稿日期: 2015-04-13; 收到修改稿日期: 2015-05-29; 网络出版日期: 2015-08-18

作者简介:梁路阳(1990—),男,硕士研究生,主要从事大气激光通信调制与编码方面的研究。E-mail: x_311@qq.com 导师简介:蒙 文(1966—),男,副教授,主要从事激光信息网络技术方面的研究。E-mail: mengwen_mw@126.com

相同的平均发射功率和比特率条件下,该方案的误码率(BER)性能优于 BPSK-SIM 和 PPM 的 BER。文献 [10]提出的方案结合了偏振复用正交相移键控(PDM-QPSK)和 MPPM 调制,该方案研究了光学预放大接收 机的记录灵敏度。文献[11]研究了在42.8 Gb/s速率下长距离传输的 PM-2PPM-QPSK 调制(PM 表示相 位调制)。文献[12]研究了混合频移键控(FSK)的 MPPM 并将这项技术用于高灵敏度的光传输。

为了进一步同时提高相位调制和脉冲位置调制的性能,本文提出了基于 BPSK 改进的混合 MPPM 调制 方案,将相位调制与脉冲位置调制相结合,以便利用这2种方案的优点。本文提出的方案中,信息比特编码 在发射脉冲的相位和位置2方面同时进行,而且在混合帧中对 BPSK 和 MPPM 均进行相干检测(零差检测或 者外差检测)。采用相位调制的主要优点是增加混合方案的带宽利用率。通过使相位调制与脉冲位置调制 相结合,平均发射功率将会进一步降低,从而在一个合理的接收灵敏度范围内得到相对高的带宽利用率。

2 系统与传输信道模型

2.1 混合调制系统模型

在BPSK调制中,一般情况下发射的是小功率的连续脉冲流。而在本文的改进方案中,发射出少量高功率BPSK脉冲,充分利用这些脉冲的位置信息来传输更多的比特。设帧长度为*M*(即时隙数),混合帧中调制后的光脉冲数量为*n*_H。在常规MPPM调制中同样的帧长度下设光脉冲数为*n*_m。在混合帧中,*n*_H个光脉冲使用BPSK调制,常规BPSK、MPPM帧结构和BPSK改进的MPPM混合帧结构如图1~3所示。



Fig.3 BPSK-based modified MPPM frame structure

对于单脉冲 PPM 而言,设每个信息帧被分成 *M*个相等时隙。在发送端,*M*个时隙中的一个时隙产生光脉冲,用光脉冲位置表示被传送的信息,所以,一个信息帧可以传送 lb *M* bit 信息。

对于 MPPM 而言,若干个光脉冲在一个信息帧中的多个时隙传输(如图 2)。设常规 MPPM 在 *M* 时隙上的 *n* 个光脉冲组合关系为 *N*,则有

$$N = C_{M}^{n} = \frac{M!}{n!(M-n)!} \,. \tag{1}$$

由于组合数中 $C_{M}^{n} = C_{M}^{M-n}$,所以当n = M-n,即n = M/2时,N取得最大值。根据多个光脉冲的组合情况将 产生 C_{M}^{n} 种 MPPM 信号,每个信息帧中传输 lb C_{M}^{n} bit 信息,最大信息量为 lb $C_{M}^{M/2}$ bit。

相移键控是利用光载波的相位变化来传递数字信息,振幅、频率和偏振方向保持不变。在BPSK中一般 使用初始相位0和 π 分别表示二进制"0"和"1"。BPSK可表达为¹³

$$E_{\text{BPSK}}(t) = A \cos(\omega t + \varphi_n), \qquad (2)$$

式中 φ_n 表示第n个符号的绝对相位,表示为

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 , \text{ sending}^{\circ} 0^n \\ \pi, \text{ sending}^{\circ} 1^n \end{cases}$$
(3)

没出现"0"相位的概率为p,故(2)式可以改写为

$$E_{\rm BPSK}(t) = \begin{cases} A \cos \omega t , & \text{for probability } p \\ -A \cos \omega t , & \text{for probability } 1 - p \end{cases}$$
(4)

100605 - 2

设连续 BPSK 符号流帧长度为 M,即帧大小为 M bit(如图 1 所示),而在改进的方案中,由于添加了 MPPM 调制(如图 3 所示),设每个信息帧传输信息量为 I_H,则有

$$I_{H} = n_{H} + \ln C_{M}^{n_{H}}, \qquad (5)$$

式中n_H为混合帧中光脉冲数。为保证混合方案传输的信息比特不小于常规BPSK方案,则有

$$n_H + \ln C_M^{n_H} \ge M_{\max} \,, \tag{6}$$

式中Mmax为混合帧长度的最大值。

2.2 有保护时隙的 MPPM 帧结构和信道模型

设在一个信息帧中共有*M*个时隙,帧长度为*T*,则时隙宽度 $\tau = T/M$, τ 单位为s。信息帧由保护时隙和 传信时隙2部分组成,设传信时隙个数为*m*,其中有*n*个光脉冲(假设每个光脉冲占满整个时隙),记作(*m*,*n*) MPPM。在改进方案中,普通光脉冲经过调制变成 BPSK光脉冲,这样可以得到*k*= C_m^n 个脉冲的组合。假设 这*k*种组合在信道中被传输的概率相等,被传输的信息量为lb*k*bit。图4表示具有保护时隙的*n*脉冲光 BPSK-MPPM 帧结构。前*q*个时隙没有信息传输,被称为保护时隙*T*_q^[14-15],保护时隙的长度由脉冲激光器的 本身属性决定。后*m*+*q*(*n*-1)个时隙称为传信时隙*T*₁(*T*₁ = τ [*m*+*q*(*n*-1)]),其中有*q*(*n*-1)个时隙也是和之前所 述的保护时隙一样。



图4 (m,n) BPSK-MPPM 帧结构

Fig.4 (*m*, *n*) BPSK-MPPM frame structure 下面用*P*进制删除信道模型来模拟(*m*, *n*) BPSK-MPPM。脉冲激光器接通时,脉冲中的光子数量服从

泊松分布,设光子每秒平均产生的速率为
$$s$$
,光接收机检测到无光子的概率为 ε ,则有

$$\varepsilon = \exp(-s\tau) \,. \tag{7}$$

假设在n个脉冲所在时隙中有若干个时隙未检测到光子存在,那么接收到这样的帧信号存在的信道被称为删除信道^[16-17],而且这种帧不能被传送。P进制删除信道模型如图5所示。



图5 P进制删除信道模型

Fig.5 P-ary erasure channel model

设输入符号为X_i, *i*={1,2…,*P*},输出符号为Y_j, *j*={1,2,…,*P*,*E*}, 信道转移概率为

$$p_{yx}(x|x) = 1 - \varepsilon , \qquad (8)$$

$$p_{YX}(E|x) = \varepsilon , \qquad (9)$$

$$p_{Y|X}(y|x) = 0 , \qquad (10)$$

式中 $p_{yx}(x|x)$ 表示检测到光子存在的概率,此时 Y=X; $p_{yx}(E|x)$ 表示检测到无光子存在的概率,(10)式表示 只有上述2种情况存在。对于n个光脉冲,概率为 p^n 。

3 改进方案的系统特性

3.1 带宽利用率比较

设信息帧长度为T,其中包含时隙数为M,且每个时隙被光脉冲完全占用,并设时隙宽度为 τ ,则 τ 可表示为

$$\tau = \frac{T}{M} \,. \tag{11}$$

由(11)式可以看出,随着M的增加,时隙宽度越来越窄。设占用带宽为B,则

$$B = \frac{M}{T} . \tag{12}$$

由(11)、(12)式可以看出,随着M的增加, τ 减小而B增加,所以当信息帧长度固定时,M的增加将导致带宽的扩张。设信息比特率为R,信息量为I,则

$$R = \frac{I}{T} \,. \tag{13}$$

带宽利用率为

$$\eta = \frac{R}{B} \quad . \tag{14}$$

对于 MPPM, $I_{\text{MPPM}} = \text{lb} C_{M}^{n}$ bit, 代人(13)式, 并将结果和(12)式代人(14)式, 可得

$$\eta_{\rm MPPM} = \frac{\text{lb } C_M^n}{M} \,. \tag{15}$$

同理,对于混合BPSK-MPPM方案,利用(5)式并且令n_H=n,得到带宽利用率

$$\eta_{H} = \frac{n + \ln C_{M}^{n}}{M} \,. \tag{16}$$

当时隙数固定时,比较2种调制方案的带宽利用率。设时隙数M=16,仿真结果如图6所示。

从仿真图中可以看到,2种方案在时隙数固定时,随着信息帧中光脉冲数增加,带宽利用率开始增加,到 达最大值点后下降。常规方案中,当*n*=8时,η最大值为85.3%,改进方案中,在*n*_H=11时,带宽利用率达到最 大144.3%,在理论上超过了100%。可以明显看出,改进方案的带宽理论上可以被完全利用,带宽利用率要高 于常规方案。

当每信息帧中光脉冲数固定时,比较了2种方案的带宽利用率。分别固定光脉冲数*n*=2与*n*=3,结果如 图7所示。可以看到,2种方案在光脉冲数固定时,随着信息帧时隙数在一定范围内增加,η减小,并且改进 方案η优于常规方案。



BPSK-modified MPPM

X: 8 Y: 0.8532

9 11 13

MPPM



3.2 传输效率比较

1.6

b 1.4 1.2 1.0 1.0 0.6 0.4 0.2

0<u></u>

3

每光子传输的比特数为传输效率^[18]。对于 MPPM,设传输效率为 ξ_{MPPM} ,则有

15

$$\xi_{\rm MPPM} = \frac{\rm lb \ C_{\rm M}^n}{\lambda n} \,, \tag{17}$$

式中λ表示一个光脉冲包含光子数均值。同理,改进方案的传输效率为

X: 11

Y: 1.443

$$\xi_{\rm H} = \frac{n + \ln C_{\rm M}^n}{\lambda n}$$

(18)

固定 λ 比较 2 种方案的传输效率,分别设 λ =100 和 λ =1000,结果如图 8 所示。可以看出在光子数均值 相同的情况下,改进方案传输效率要优于常规方案。当 λ 数值越小,ξ 越高,而且当每帧光脉冲数 n 在一定 范围内增加时,2 种方案的传输效率差距逐渐加大。



图8 传输效率与每帧光脉冲数的关系

Fig.8 Relationship between transmission efficiency and pulse number per frame

3.3 信道容量分析

在大气激光通信中,信道容量是衡量通信性能的重要参数,研究信道容量就是研究信道中能够传输信息量的最大值。在MPPM信道模型中,根据模型可推导出在BPSK光脉冲具有保护时隙的MPPM信道容量表达式,本文分析比较了常规MPPM方案和改进方案在信道容量上的关系。

设信道平均信息量为I(X;Y),信源输入概率分布为p(x),则定义该信道容量C为[19]

$$C = \max_{y(Y)} \{ I(X; Y) \} = \max_{y(Y)} \{ H(X) - H(X|Y) \},$$
(19)

式中X和Y分别表示信道输入与输出,H(X)表示输入信源X的熵,H(X|Y)表示信源X到达信宿Y的条件熵。 由图5所示的信道模型可得到此信道转移概率矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} (1-\varepsilon)^n & 0 & 0 & \cdots & 1-(1-\varepsilon)^n \\ 0 & (1-\varepsilon)^n & 0 & \cdots & 1-(1-\varepsilon)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 1-(1-\varepsilon)^n \\ 0 & 0 & \cdots & (1-\varepsilon)^n & 1-(1-\varepsilon)^n \end{bmatrix}_{P \times P+1}.$$
(20)

由信息论可知,此信道矩阵对应的信道为准对称信道,准对称离散信道的信道容量可表示为

$$C = \text{lb} r - H(p'_1, p'_2, \cdots, p'_s) - \sum_{k=1}^n N_k \text{ lb} M_k, \qquad (21)$$

式中r是输入符号集个数; (p_1, p_1, \dots, p_s) 是准对称信道矩阵中的行元素。设此信道矩阵可划分为n个互不相交的子集, N_k 是第k个子矩阵 Q_k 中的行元素之和, M_k 第k个子矩阵 Q_k 中的列元素之和。在矩阵Q中,划分2个不相交的子矩阵 Q_1 和 Q_2 :

$$Q_{1} = \begin{bmatrix} (1-\varepsilon)^{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-\varepsilon)^{n} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (1-\varepsilon)^{n} \end{bmatrix}_{p \times p}, \qquad (22)$$
$$Q_{2} = \begin{bmatrix} 1-(1-\varepsilon)^{n} \\ 1-(1-\varepsilon)^{n} \\ \vdots \\ 1-(1-\varepsilon)^{n} \end{bmatrix}_{p \times 1}. \qquad (23)$$

对于常规MPPM方案,信道容量C_{MPPM}可表示为

$$C_{\text{MPPM}} = \text{lb } k - \{(1 - \varepsilon)^n \text{ lb } (1 - \varepsilon)^{-n} + [1 - (1 - \varepsilon)^n] \text{lb } [1 - (1 - \varepsilon)^{-n}]\} - \{(1 - \varepsilon)^n \text{ lb } (1 - \varepsilon)^n + [1 - (1 - \varepsilon)^n] \text{lb } \{k[1 - (1 - \varepsilon)^n]\}\} = (1 - \varepsilon)^n \text{ lb } k$$
(24)

即表明信道容量等于光接收机检测到所有光子的概率与传输信息量的乘积。将(7)式代入(24)式可得

$$C_{\rm MPPM} == \left[1 - \exp(-s\tau)\right]^n \, \text{lb} \, k = \left[1 - \exp\left(-s\frac{T_{\iota}}{m + (n-1)q}\right)\right]^n \, \text{lb} \, C_m^n \,.$$
(25)

同理可得 BPSK 改进后信道容量

$$C_{\mu} = \left[1 - \exp\left(-s\frac{T_{\mu}}{m + (n-1)q}\right)\right]^{n} (n + \ln C_{m}^{n}).$$
(26)

固定传信时隙长度 T_i=10⁻⁴s,传信时隙个数 m=128,保护时隙个数为 p=32,分别在光子每秒平均产生的 速率 s=10[°]和 s=10[°]的情况下比较 2 种方案信道容量与每帧光脉冲数的变化关系,结果如图 9 所示。从图中 可以看出,随着每信息帧光脉冲数的增加,信道容量先增大后减小;在 s=10[°]且每帧光脉冲数相同的情况下, 改进方案信道容量最大值比常规方案大 41.8 bit/symbol,并且随光脉冲数增加两者差距加大,当 s=10[°]时,2 种方案最大值相差 74.9 bit/symbol。











图11 信道容量与传信时隙数的关系

Fig.11 Relationship between channel capacity and transmitting slot number

固定传信时隙长度 T_i=10⁻⁴s,保护时隙个数为 q=32,分别在光子每秒平均产生速率 s=10⁹和 s=10¹⁰以及 光脉冲数 n=4和 n=3的情况下,比较2种方案信道容量与传信时隙个数之间的关系,如图 10、图 11所示。可 以看出,随着传信时隙数的增加,信道容量先增加后减小;而且在光子每秒平均产生速率较大时,信道容量 随着传信时隙数的增多而在很大范围内持续增加;随着光脉冲数增加,信道容量越来越大。

从以上仿真结果可以看出,提出的改进方案在传信时隙个数、光子每秒平均产生速率*s*和光脉冲数目改 变的情况下,信道容量均大于常规MPPM方案,并且在*s*较大时,随着每信息帧光脉冲数的增加,信道容量增 幅会越来愈大。

4 结 论

提出了一种改进的二进制相移键控(BPSK)改进的混合多脉冲调制方案,目的是为了改善大气激光通信 中常规 MPPM 调制方案的性能。提出了混合调制的系统模型和信道模型,研究了系统模型的带宽利用率、 传输效率特性,并进行了分析仿真;研究了改进方案的信道容量,推导了改进方案的信道容量表达式,并在 改变系统模型参数的情况下,对改进方案和常规方案的信道容量进行了仿真比较分析。

仿真结果表明,在给定条件下,改进方案带宽利用率达到最大144.3%,在理论上超过了100%;在光子数均值相同的情况下,改进方案传输效率要优于常规方案;当*s*=10°且*n*=3时,改进方案信道容量最大值多出2.94 bit/symbol,*s*不变且*n*=4时,改进方案信道容量最大值多了3.91 bit/symbol。

改进方案在带宽利用率、传输效率和信道容量方面均优于常规方案,为大气激光通信的调制方法提出 了新的思路,具有较强的理论和实际应用价值。下一步研究方向为尽快在物理上实现这种二进制相移键控 改进的混合多脉冲调制方案,然后使用更高阶调制对常规方案进行改进,如4PSK、DPSK和QPSK等。

参考文献

- 1 Sugiyama H, Nosu K. MPPM: A method for improving the band-utilization efficiency in optical PPM[J]. J Lightwave Technol, 1989, 7(3): 465-471.
- 2 Aoki N, Ohtsuki T, Sasase I. Performance analysis of multi-pulse pulse position modulation using avalanche photodiode in optical intersatellite links[J]. IEICE Trans Commun, 1996, E79–B(1): 52–56.
- 3 Singh J, Jain K. Performance analysis of BPPM and *M*-ary PPM optical communication systems in atmospheric turbulence [J]. IETE Technol Rev, 2008, 25(4): 146–153.
- 4 Karlsson M, Agrell E. Multilevel pulse-position modulation for optical power-efficient communication[J]. Opt Express, 2011, 19(26): B799-B804.
- 5 Atkin E, Fung S. Performance analysis of coded optical PPM system using direct and coherent detection[C]. IEEE Proc Communication, Speech and Vision, 1990, 137(4): 226–232.
- 6 Selmy H, Shalaby M, Kawasaki Zen-Ichiro. Proposal and performance evaluation of a hybrid BPSK-modified MPPM technique for optical fiber communications systems[J]. J Lightwave Technol, 2013, 31(22): 3535-3545.
- 7 Vilnrotter V, Lau C. Quantum detection and channel capacity for communications applications[C]. SPIE, 2002, 4635: 103-115.
- 8 Faridzadeh M, Gholami A, Ghassemlooy Z, *et al.*. Hybrid PPM–BPSK subcarrier intensity modulation for free space optical communications[C]. Proc 16th Eur Conf Netw Opt Commun, 2011: 36–39.
- 9 Liu X, Wood T, Tkach R, *et al.*. Demonstration of record sensitivity in an optically pre-amplified receiver by combining PDM-QPSK and *M*-ary pulse-position modulation[J]. J Lightwave Technol, 2012, 30(4): 406–413.
- 10 Sjodin M, Eriksson T, Andrekson P, *et al.*. Long-haul transmission of PM-2PPM-QPSK at 42.8 Gbit/s[C]. Proc Opt Fiber Commun, 2013: 1-3.
- 11 Simon M, Vilnrotter V. Performance analysis and tradeoff for dualpulse PPM on optical communications channels with direct detection[J]. IEEE Trans Commun, 2004, 52(11): 1969–1979.
- 12 Park H. Performance bound on multiple-pulse position modulation[J]. Opt Rev, 2003, 10(3): 131–132.
- 13 Fan Changxin, Cao Lina. Communication Principle (Six Edition) [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2006: 188– 189.

樊昌信,曹丽娜.通信原理(第6版)[M].北京:国防工业出版社,2006:188-189.

14 Ma Ning, Li Xiaoyi, Yang Gang, *et al.*. A novel dual-amplitude fixed length digital pulse interval modulation scheme[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2014, 51(9): 090602.

马 宁,李晓毅,杨 刚,等.一种新型的双幅度定长脉冲间隔调制方式[J].激光与光电子学进展,2014,51(9):090602.

15 Wu Xiaojun, Wang Hongxing, Liu Min. Affect analysis of receiving aperture on bit-error rate performance in free space optical communication system under different visibilities[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(10): 1006003.

吴晓军,王红星,刘 敏.不同能见度下接收孔径对无线光通信误码率性能影响分析[J].光学学报,2013,33(10):1006003.

16 Xie Mengqi, Ke Xizheng. Effect of atmospheric turbulence on the signal-to-noise ratio of free space optical system[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2013, 50(11): 110102.

解孟其, 柯熙政. 大气湍流对无线光通信系统信噪比的影响研究[J]. 激光与光电子学进展, 2013, 50(11): 110102.

- 17 Garrammone G, Paolini Enrico, Matuz Balazs, *et al.*. Non-binary low-density parity-check codes for the *q*-ary erasure channel[C]. IEEE ICC 2013-Communications Theory, 2013: 3258-3263.
- 18 Qin Ling, Ke Xizheng. Analysis of optical MPPM channel capacity without background noise[J]. Opto-Electronic Engineering, 2007, 34(7): 107-110.

秦 岭, 柯熙政. 无背景噪声下的光 MPPM 信道容量分析 [J]. 光电工程, 2007, 34(7): 107-110.

19 Cao Xuehong, Zhang Zongcheng. Information Theory and Coding (Second Edition) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009: 35-45.

曹雪虹,张宗橙.信息论与编码(第2版)[M].北京:清华大学出版社,2009:35-45.