

涡旋光束在自由空间中的传输特性

黎芳

北京建筑大学理学院, 北京 100044

摘要 主要研究了在自由空间中涡旋光束的传输特性。以拉盖尔-高斯光束为例,利用惠更斯-菲涅耳公式和ABCD光学矩阵推出了涡旋光束在自由空间中的传输表达式,并由此分析了几种不同旋转对称光学系统中涡旋光束的特性。研究发现旋转对称的光学系统只会影响光束的衍射特性或曲率半径等,并不会影响涡旋光束的轨道角动量特性。

关键词 物理光学; 轨道角动量; 拉盖尔-高斯光束; 惠更斯-菲涅耳原理; ABCD光学矩阵

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP52.012603

Propagation Characteristic of Vortex Beam in the Free Space

Li Fang

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China

Abstract The propagation characteristic of optical vortex beams in the free space is studied. By using the Huygens-Fresnel formula and ABCD optical matrix, the propagation expression of the Laguerre-Gaussian beams in the free space is derived. The properties of vortex beams in several different rotationally symmetric optical systems are analyzed. The result shows that the rotationally symmetric optical system just influences the diffraction properties or radius of curvature of the beam, but does not influence the orbital angular momentum of the vortex beams.

Key words physical optics; orbital angular momentum; Laguerre-Gaussian beam; Huygens-Fresnel principle; ABCD optical matrix

OCIS codes 260.1960; 050.1960; 050.4865; 070.2580

1 引言

近年来光束的轨道角动量逐渐成为国际上的研究热点之一,已经在光学微操纵、生物医学、量子信息编码、光学信息传输等领域^[1-6]得到了广泛的应用。它是指带有相位因子 $\exp(is\theta)$ (s 为拓扑荷,也称角向指数, θ 为方位角)的光束中每个光子具有 $\hbar s$ (\hbar 为约化普朗克常数)的轨道角动量^[7],该类具有轨道角动量的光束也被称为涡旋光束^[8-10]。

从理论上来说涡旋光束携带的拓扑荷 m 为任意整数,可以构成无穷维希尔伯特空间^[11],因此相对于传统的二进制编码,光束的轨道角动量编码能够有效地提高数据传输容量,加上其满足不确定性原理,涡旋光束用于空间通信时还具有防窃听的优点^[12]。基于涡旋光束在信息传输领域具有的非常广阔且重要的应用前景,研究其在空间中的传输特性便显得很重要。本文将主要对涡旋光束在自由空间中的传输特性进行研究。

2 理论推导

最初 Allen 以拉盖尔-高斯(LG)光束为例发现带有相位因子 $\exp(is\theta)$ 的光束具有确定的轨道角动量,经证实拉盖尔-高斯束是涡旋光束中最典型且最易实现的一种^[7]。本文以拉盖尔-高斯光束为例来分析涡旋光束的特性。当 LG 光束在自由空间中传输时,假设 $z=0$ 处为光束发送的初始平面,则初始电场为

收稿日期: 2014-06-25; 收到修改稿日期: 2014-08-05; 网络出版日期: 2014-12-25

基金项目: 北京建筑工程学院科学研究基金(101202107)

作者简介: 黎芳(1984—),女,博士,讲师,主要从事涡旋光束的传输特性及通信应用等方面的研究。

E-mail: lifang@bucea.edu.cn

$$u_0(r, \theta, 0) = E_0 \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^s L_p^s \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} \right) \exp(-is\theta), \quad (1)$$

式中 w_0 为束腰光斑半径, p 为径向指数, L_p^s 为连带拉盖尔多项式, $E_0 = \sqrt{2p!/(p+|s|)! \pi}$ 为归一化常数。

其传输特性利用惠更斯-菲涅耳原理来描述,用 ABCD 传输矩阵理论来描述光束穿过光学系统后的分布。基于二者可以得到在接收平面处涡旋光束场的分布^[13-15]

$$u(\rho, \varphi, z) = -\frac{ik}{2\pi B} \exp(-ikz) \int d^2 r u_0(r, \theta, 0) \exp \left[-\frac{ik}{2B} (D\rho^2 - 2\rho \cdot r + Ar^2) \right], \quad (2)$$

式中 k 是波数, $u_0(r, \theta, 0)$ 为初始平面上的场分布, $r(r, \theta)$ 和 $\rho(\rho, \varphi)$ 分别为初始平面和接收平面上的点向量, 坐标关系如图 1 所示, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 为系统传输矩阵, A 、 B 、 C 、 D 为 4 个矩阵分量。

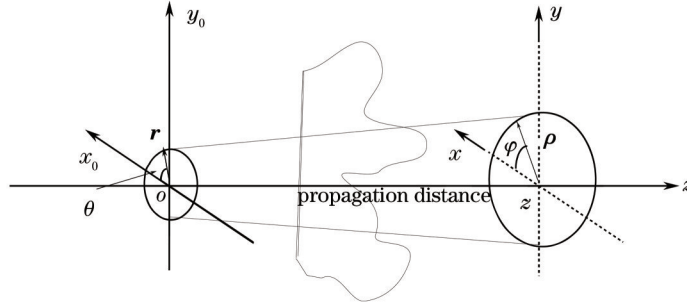


图1 坐标系图

Fig.1 Coordinate system

把(1)式代入(2)式得

$$u(\rho, \varphi, z) = -\frac{ikE_0}{2\pi B} \exp(-ikz) \exp \left(-\frac{ik}{2B} D\rho^2 \right) \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^s L_p^s \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \times \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} - \frac{ikAr^2}{2B} \right) \int_0^{2\pi} \exp \left[-is\theta + \frac{ik\rho r}{B} \cos(\theta - \varphi) \right] d\theta r dr. \quad (3)$$

根据贝塞尔函数的性质有^[16]

$$\exp \left[i \frac{k\rho r}{B} \cos(\theta - \varphi) \right] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l J_l \left(\frac{k\rho r}{B} \right) \exp[il(\theta - \varphi)], \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(l-s)\theta] d\theta = \begin{cases} 2\pi & (l=s) \\ 0 & (l \neq s) \end{cases}, \quad (5)$$

式中 J_l 为 l 阶贝塞尔函数。关于 θ 的积分项可以解出

$$\int_0^{2\pi} \exp \left[-is\theta + \frac{ik\rho r}{B} \cos(\theta - \varphi) \right] d\theta = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l \left(\frac{k\rho r}{B} \right) \exp(-il\varphi) \int_0^{2\pi} \exp[-i(s-l)\theta] d\theta = 2\pi J_s \left(\frac{k\rho r}{B} \right) \exp(-is\varphi), \quad (6)$$

于是(3)式可变为

$$u(\rho, \varphi, z) = -\frac{i^{s+1} k E_0}{B} \exp(-ikz) \exp(-is\varphi) \exp \left(-\frac{ikD\rho^2}{2B} \right) \times \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^s L_p^s \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} - \frac{ikAr^2}{2B} \right) J_s \left(\frac{k\rho r}{B} \right) r dr. \quad (7)$$

再根据贝塞尔函数的性质^[16]

$$\int_0^\infty x^{v+1} \exp(-\beta x^2) L_n^v(\alpha x^2) J_v(\gamma x) dx = 2^{-v-1} \beta^{-v-n-1} (\beta - \alpha)^n \gamma^v \exp \left(-\frac{\gamma^2}{4\beta} \right) L_n^v \left[\frac{\alpha \gamma^2}{4\beta(\beta - \alpha)} \right], \quad (8)$$

式中 v, β 和 α 为指数或系数, 无具体意义, 得到最终接收平面的 LG 光场表达式为

$$u(\rho, \varphi, z) = -\frac{i^{s+1} k E_0}{2^{s+1} B} \left(\frac{\sqrt{2} k \rho}{w_0 B} \right)^s \frac{\left(\frac{ikA}{2B} - \frac{1}{w_0^2} \right)^p}{\left(\frac{ikA}{2B} + \frac{1}{w_0^2} \right)^{p+s+1}} L_p^s \left(\frac{2\rho^2}{\frac{4B^2}{k^2 w_0^2} + A^2 w_0^2} \right) \times \exp \left(-\frac{ik}{2B} D\rho^2 - \frac{\rho^2}{\frac{4B^2}{k^2 w_0^2} + \frac{i2AB}{k}} \right) \exp(-is\varphi) \exp(-ikz). \quad (9)$$

令 $z_0 = kw_0^2/2$, $w = w_0 \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{z_0^2}}$, 于是(9)式化简得

$$u(\rho, \varphi, z) = \frac{w_0 E_0}{w} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w} \right)^s \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right) L_p^s\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \exp(-is\varphi) \exp(-ikz) \times \exp\left[-\frac{ik\rho^2}{2B} \left(D - \frac{A}{A^2 + \frac{B^2}{z_0^2}} \right)\right] \exp\left[i(2p+s+1)\arctan\left(\frac{B}{Az_0}\right)\right], \quad (10)$$

式中 $w = w_0 \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{z_0^2}}$, $z_0 = kw_0^2/2$ 为瑞利距离。以后在分析 LG 光束经过不同的光学系统时,只要知道该光学系统的 ABCD 传输矩阵,便可直接代入(10)式得到透射光束的光场表达式,无需再进行繁琐的公式推导。

3 分 析

以下以几个不同的光学系统为例,分别讨论。

3.1 自由空间

自由空间的传输矩阵为 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 可以得到 LG 光束在自由空间中的传输表达式为

$$u(r, \varphi, z) = E_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{-0.5} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w} \right)^s \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right) L_p^s\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \exp(-is\varphi) \times \exp\left[i(2p+s+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) - i\frac{k\rho^2 z}{2(z^2+z_0^2)} - ikz\right], \quad (11)$$

式中 $w = w_0 \sqrt{1+z^2/z_0^2}$ 。可以看出,得到的表达式与自由空间中的 LG 光束的表达式完全相同。

3.2 薄透镜

当 LG 光束经自由空间传输后再经薄透镜接收后,此时的 ABCD 矩阵为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ -1/f & 1 - z/f \end{bmatrix}, \quad (12)$$

式中 f 为透镜焦距。将(12)式代入(10)式得到光束电场表达式为

$$u(\rho, \varphi, z) = \frac{w_0 E_0}{w} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w} \right)^s \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right) L_p^s\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \exp(-is\varphi) \exp(-ikz) \times \exp\left[i(2p+s+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) - i\frac{k\rho^2 z}{2(z^2+z_0^2)} - \frac{ik\rho^2}{2f}\right], \quad (13)$$

式中 $w = w_0 \sqrt{1+z^2/z_0^2}$ 仍旧不变。由(13)式可以得出 LG 光束经薄透镜传输后,其轨道角动量特性并不发生改变,只有曲率半径发生改变,由原来的 $R(z) = z[1+(z_0/z)^2]$ 变成 $R' = fR(z)/[R(z)+f]$, 两者相比较得 $R' - R = -R^2/(R+f)$ 。考虑光束是向 z 方向传播,因此 $z > 0$, 且曲率半径 $R(z) > 0$ 。则由(13)式得到,当薄透镜为凸透镜即 $f > 0$, 或为凹透镜且 $0 < -f < R(z)$, 即 $z > (-f + \sqrt{f^2 - 4z_0^2})/2$ 时, $R' < R(z)$, 光束的曲率半径变小。而当薄透镜为凸透镜,且满足 $(-f - \sqrt{f^2 - 4z_0^2})/2 < z < (-f + \sqrt{f^2 - 4z_0^2})/2$ 时,光束的曲率半径变大。

3.3 有限孔径

假设 LG 光束经自由空间传输后,再通过一个透射函数为 $\exp(-\rho^2/\sigma^2)$ 的有限孔径,其中 σ 为孔径半径, ABCD 传输矩阵可以表示为^[14]

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2i/k\sigma^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ -2i/k\sigma^2 & 1 - \frac{2iz}{k\sigma^2} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

代入(10)式得到

$$u = \frac{w_0 E_0}{w} \left(\frac{\sqrt{2} \rho}{w} \right)^s \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right) L_p^s\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \exp(-is\varphi) \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right) \exp\left[i(2p+s+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) - i\frac{\rho^2}{w^2} \frac{z}{z_0} - ikz\right], \quad (15)$$

式中 $w = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}$ 。光束穿过一个孔径后,输出光束的表达式为入射前的表达式与孔径的透射函数之积,(15)式即证明该点。

由上述分析可知,旋转对称的光学系统只会影响光束的衍射特性或曲率半径等,并不会影响 LG 光束的轨道角动量特性。正如文献[7]中所述,当初证实 LG 光束之所以会携带轨道角动量是因为其线性动量中具有角向的分量,才使得 LG 光束在传播方向具有确定的轨道角动量,而其线性动量的角向分量是因为光束的电场表达式中具有一项随方位角变化的相位项 $\exp(is\theta)$ 。旋转对称的光学系统不会改变光束的相位随方位角的变化情况,因此不会给 LG 光束的轨道角动量分布带来影响。

上述举例都是基于旋转对称的光学系统,如果是旋转不对称的光学系统或者是在旋转方位角上厚度分布不均匀的光学元件,只要知道其 ABCD 传输矩阵,(10)式仍然适用。但是所得的透射光束的轨道角动量特性会发生改变。因为轨道角动量与旋转方位角有关,而如果光学系统是旋转不对称的话,也就意味着在不同的方位角上,光学系统所引起的透射光束的相位也不同,因此其相位因子 $\exp(is\theta)$ 必然发生改变,也即光束所携带的轨道角动量不再是发射前的 s 。

4 结 论

推导了拉盖尔-高斯光束经过旋转对称的光学系统后,透射光束的光场表达式。分析发现旋转对称的光学系统只会影响光束的衍射特性或曲率半径等,并不会影响涡旋光束的轨道角动量特性,说明在利用光束的轨道角动量进行编码传输时,具有较高的可靠性。

参 考 文 献

- 1 Tamburini F, Thid B, Molina-Terriza G, *et al.*. Twisting of light around rotating black holes[J]. *Nature Physics*, 2011, 7(3): 195-197.
- 2 Uchida M, Tonomura A. Generation of electron beams carrying orbital angular momentum[J]. *Nature*, 2010, 464(7289): 737-739.
- 3 Marrucci L, Karimi E, Slussarenko S, *et al.*. Spin-to-orbital conversion of the angular momentum of light and its classical and quantum applications[J]. *Journal of Optics*, 2011, 13: 064001.
- 4 Torres J P, Torner L. Twisted photons[J]. *Nature Physics*, 2007, 3(5): 305-310.
- 5 Li Fang, Jiang Yuesong, Tang Hua, *et al.*. Measuring the azimuthal and radial indexes of Laguerre-Gaussian beams[J]. *Optoelectronics Letters*, 2010, 6(3): 0222-0225.
- 6 Guo Jianjun, Guo Banghong, Cheng Guangming, *et al.*. Research progress on photon orbital angular momentum in quantum communication applications[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2012, 49(8): 080003.
郭建军, 郭邦红, 程广明, 等. 光子轨道角动量在量子通信中应用的研究进展[J]. *激光与光电子学进展*, 2012, 49(8): 080003.
- 7 Allen L, Beijersbergen M, Spreeuw R, *et al.*. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(11): 8185-8189.
- 8 Liu Yongxin, Chen Ziyang, Pu Jixiong. Diffraction characteristics of vortex beams by a fork-shaped grating[J]. *Chinese J Lasers*, 2011, 38(3): 0302012.
刘永欣, 陈子阳, 蒲继雄. 涡旋光束经叉形光栅的衍射特性[J]. *中国激光*, 2011, 38(3): 0302012.
- 9 Liu Xiaoyun, Dai Xuefeng, Shan Liyan, *et al.*. Focusing properties of vortex beam with an axicon[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2012, 49(2): 022601.
刘晓云, 代雪峰, 单丽艳, 等. 单丽艳涡旋光束经过轴锥镜后的聚焦特性[J]. *激光与光电子学进展*, 2012, 49(2): 022601.
- 10 Yang Xiancai, Ding Panfeng. Polarization degree of vortex beams diffracted by circular ring and its propagation[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2011, 48(6): 060501.
杨先才, 丁攀峰. 圆环衍射效应下涡旋光束的偏振度传输[J]. *激光与光电子学进展*, 2011, 48(6): 060501.
- 11 Molina-Terriza G, Torres J, Torner L. Management of the angular momentum of light: preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88(1): 13601.

- 12 Gibson G, Courtial J, Padgett M J, *et al.*. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum[J]. *Optics Express*, 2004, 12(22): 5448-5456.
- 13 Chu X. Propagation of a cosh-Gaussian beam through an optical system in turbulent atmosphere[J]. *Optics Express*, 2007, 15(26): 17613-17618.
- 14 Yura H T, Hanson S G. Optical beam wave propagation through complex optical systems[J]. *J Opt Soc Am A*, 1987, 4(10): 1931-1948.
- 15 Baues P. Huygens' principle in inhomogeneous, isotropic media and a general integral equation applicable to optical resonators[J]. *Optical and Quantum Electronics*, 1969, 1(1): 37-44.
- 16 Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integrals, Series and Products (7th Edition)*[M]. Santiago: Academic Press, 2007.

栏目编辑: 史 敏