

研究一维有限周期光子晶体能带的波叠加理论

蒋和伦 刘启能

重庆工商大学计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067

摘要 利用光的叠加原理推导出一维有限周期光子晶体的透射率公式,建立了一种研究一维有限周期光子晶体能带的新方法——波叠加理论。将波叠加理论和特征矩阵法进行了比较研究,结果表明波叠加理论和特征矩阵法得出的结果是一致的。一维有限周期光子晶体能带的波叠加理论不仅具有特征矩阵法的优点,而且又克服了特征矩阵法的不足。因此波叠加理论是一种研究一维有限周期光子晶体能带的更为有效的方法。

关键词 物理光学; 光子晶体; 能带; 叠加理论; 特征矩阵

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP52.012601

Superposition Theory of One-Dimensional Finite-Period Photonic Crystal Band

Jiang Helun Liu Qineng

Computer Science and Information Engineering College, Chongqing Technology and Business University,
Chongqing 400067, China

Abstract Using the optical coherent superposition principle, the transmittance formula of band is derived for one-dimensional finite-period photonic crystal, and the coherent superposition theory is established. The coherent superposition theory and the characteristic matrix theory are compared and the simulated results are consistent. The coherent superposition theory has advantages of the characteristic matrix theory, and overcomes the lack of the characteristic matrix theory. It is a better way to study band of one-dimensional finite number cycles photonic crystal.

Key words physical optics; photonic crystal; band; superposition theory; characteristic matrix

OCIS codes 220.2560; 220.4830; 260.2160

1 引言

光子晶体的概念是 S.John 和 E.Yablonovitch 于 1987 年提出的^[1-2]。所谓光子晶体就是指折射率在空间呈现周期性变化的人造材料。光子晶体依据其空间周期的维数不同分为一维(1D)光子晶体、二维光子晶体和三维光子晶体。由于一维光子晶体结构简单且研究方便,但又具有二维光子晶体和三维光子晶体的一些基本特征。因此对一维光子晶体的研究成为光子晶体研究领域中的重要课题^[3-9]。当光在光子晶体中传播时会出现能带现象,利用光子晶体的能带可以十分方便地控制光的传播。因此对光子晶体能带的研究倍受人们的重视^[10-15]。

目前研究一维有限周期光子晶体能带最常用方法是特征矩阵法^[10],但是特征矩阵法是一种数值算法,它只能给出一维周期光子晶体能带的数值计算结果,而不能对一维有限周期光子晶体能带产生的原因给出理论的解释。因此作为研究一维有限周期光子晶体能带最基本的特征矩阵法存在明显的不足。本文建立了一种研究一维有限周期光子晶体能带的新方法,它既具有特征矩阵法的优点又能克服特征矩阵法的缺点。

2 模型与理论

设计这样一种一维有限周期光子晶体,它由砷化镓 A 层(其折射率 $n_1 = 3.23$ 、厚度为 d_1)和氧化铝 B 层

收稿日期: 2014-07-11; 收到修改稿日期: 2014-07-12; 网络出版日期: 2014-11-08

基金项目: 重庆市教委科技项目基金(KJ140641)

作者简介: 蒋和伦(1965—),男,副教授,主要从事光电子学方面的研究。E-mail: jianghelun@sina.com

(其折射率 $n_2 = 1.8$ 、厚度为 d_2) 两种介质周期性地交替构成, 形成 $(AB)^N$ 的结构, 周期数 N 有限, 取 $N = 8$, 如图 1 所示。设入射空间和出射空间的介质都为空气。取 $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ 、 $n_1 d_1 = n_2 d_2 = \lambda_0/4$ 。令 $f_0 = c/\lambda_0$ (c 为真空中的光速), 归一化频率 $g = ff_0$, f 为入射光的频率。

为了建立研究一维有限周期光子晶体能带的新方法, 先建立一维有限周期光子晶体的谐振腔模型, 将该光子晶体的前 $N-1$ 个周期等效为薄层 a 作为谐振腔的一个腔壁, 将最后一个周期的 A 层介质作为谐振腔的腔体, 将第一个周期的 B 层介质等效为薄层 b 作为谐振腔的另一腔壁, 如图 2 所示。当光进入谐振腔后会在谐振腔的前后两个平行腔壁间往复地反射, 每往复反射一次会产生一束透射光, 这无限多束透射光会在透射空间产生相干叠加, 这些透射光相干叠加后其合振幅为零的位置就形成了光子晶体的禁带, 这些透射光相干叠加后其合振幅不为零的位置就形成了光子晶体的导带。这就清晰地解释了一维有限周期光子晶体的禁带和导带产生的原因。

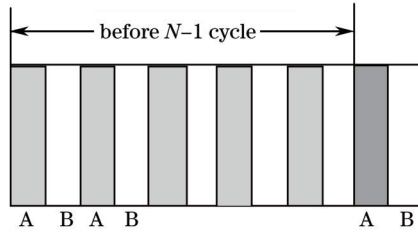


图 1 一维有限周期光子晶体

Fig.1 1D finite-period photonic crystal

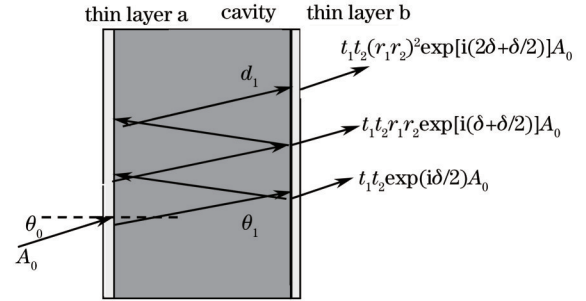


图 2 谐振腔模型

Fig.2 Resonant cavity model

进一步推导谐振腔的透射率公式, 设光以振幅 A_0 入射谐振腔, 光穿过薄层 a 和薄层 b 的透射系数分别为 t_1 和 t_2 , 光在薄层 a 腔壁的反射系数为 r_1 , 在薄层 b 腔壁的反射系数为 r_2 。则第 1 束透射光、第 2 束透射光、第 3 束透射光、...、第 n 束透射光它们的振幅分别为

$$t_1 t_2 \exp(i\delta/2) A_0, t_1 t_2 r_1 r_2 \exp[i(\delta + \delta/2)] A_0, t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 \exp[i(2\delta + \delta/2)] A_0, \dots, t_1 t_2 (r_1 r_2)^{n-1} \exp\{i[(n-1)\delta + \delta/2]\} A_0, \quad (1)$$

它们具有等比数列关系。(1)式中 δ 为光在腔内往返一次的相位差。

$$\delta = 4\pi d_1 \cos \theta_1 / \lambda_1, \quad (2)$$

式中 λ_1 为光在腔内的波长。这些透射光在透射空间叠加后的合振幅 A_i 为

$$A_i = t_1 t_2 \exp(i\delta/2) A_0 + t_1 t_2 r_1 r_2 \exp[i(\delta + \delta/2)] A_0 + t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 \exp[i(2\delta + \delta/2)] A_0 + \dots + t_1 t_2 (r_1 r_2)^{n-1} \exp\{i[(n-1)\delta + \delta/2]\} A_0 = \frac{1 - (r_1 r_2)^n \exp(in\delta)}{1 - r_1 r_2 \exp(i\delta)} \exp(i\delta/2) t_1 t_2 A_0, \quad (3)$$

由于是无限多束透射光相干叠加, 令 $n \rightarrow \infty$, 因 $r < 1$, (3)式的极限为

$$A_i = \frac{1}{1 - r_1 r_2 \exp(i\delta)} t_1 t_2 \exp(i\delta/2) A_0, \quad (4)$$

透射空间的透射率 $T = A_i A_i^* / (A_0 A_0^*)$, 则

$$T = \left[\frac{1}{1 - r_1 r_2 \exp(i\delta)} \exp(i\delta/2) t_1 t_2 \right] \left[\frac{1}{1 - r_1 r_2 \exp(i\delta)} \exp(i\delta/2) t_1 t_2 \right]^* = \frac{(t_1 t_2)^2}{1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos \delta}, \quad (5)$$

式中“*”表示取复共轭。(5)式就是利用光的叠加原理推导出一维有限周期光子晶体中光的透射率公式, 利用(5)式可以研究一维有限周期光子晶体中光能带的特性。值得指出的是, 该光子晶体的前 $N-1$ 个周期的特性是通过(5)式中的 t_1 和 r_1 反映, 该光子晶体的最后一个周期的 B 层的特性是通过(5)式中的 t_2 和 r_2 反映。将这种方法称为一维有限周期光子晶体能带的波叠加理论, 该理论克服了特征矩阵法不能解释光子晶体的禁带和导带产生原因的缺点。

3 波叠加理论与特征矩阵法的比较

TE 波在该一维有限周期光子晶体中的特征矩阵 \mathbf{M} 可以直接用文献[13]中的公式表述:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = (m_1 m_2)^N, \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 & -i \sin \delta_1 / p_1 \\ -i p_1 \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \cos \delta_2 & -i \sin \delta_2 / p_2 \\ -i p_2 \sin \delta_2 & \cos \delta_2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中 $\delta_i = (2\pi/\lambda)n_i d_i \cos \theta_i$ 、 $p_i = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} n_i \cos \theta_i$ (λ 为入射光的波长, θ 为折射角, ε_0 为真空的介电常数, μ_0 为真空的磁导率)。该一维有限周期光子晶体的透射系数 t 和反射系数 r 分别为

$$t = \left| \frac{2p_0}{(M_{11} + M_{12}p_1)p_0 + (M_{21} + M_{22}p_1)} \right|, \quad r = \left| \frac{(M_{11} + M_{12}p_1)p_0 - (M_{21} + M_{22}p_1)}{(M_{11} + M_{12}p_1)p_0 + (M_{21} + M_{22}p_1)} \right|, \quad (8)$$

式中下标 0 表示入射空间、下标 t 表示透射空间, 该一维掺杂光子晶体的透射率 T 为

$$T = \frac{p_t}{p_0} t^2. \quad (9)$$

利用(6)~(9)式可以研究一维有限周期光子晶体中 TE 波的能带特性, 这种研究方法称为特征矩阵法。特征矩阵法是根据光在界面满足的连续边界条件推导出来, 而波叠加理论是根据光的叠加原理推导出来的。由于波的叠加原理是波传播的基本原理, 因此波叠加理论比特征矩阵法的物理意义更加清晰。

3.1 能带结构

固定入射角 $\theta_0 = 0$, 利用波叠加理论和特征矩阵法计算透射率随归一化频率的响应曲线, 分别如图 3 和图 4 所示。比较图 3 和图 4 可知:

1) 波叠加理论和特征矩阵法计算出的一维有限周期光子晶体的禁带 ($T=0$) 和导带 ($T>0$) 的频率范围是一致的。归一化频率 g 在 0.85~1.15 范围内出现了光子晶体的一级禁带, 归一化频率 g 在 2.85~3.15 范围内出现了光子晶体的二级禁带。禁带以外的区域为导带。

2) 波叠加理论和特征矩阵法计算的结果中导带的峰形方面存在一定的差异, 但这并不重要。因为研究能带的本质在于能带的频率结构, 而导带的峰形并不影响能带的频率结构。

为了对波叠加理论和特征矩阵法进行更深入的比较, 下面从一级禁带的频率随折射率的变化特征以及一级禁带的频率随入射角的变化特征两个方面来比较两种方法的结果。

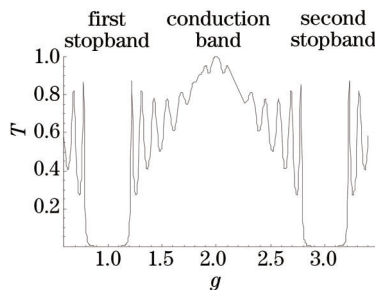


图3 透射率随归一化频率响应曲线(波叠加理论)

Fig.3 Response curves of transmissivity versus normalized frequency (coherent superposition theory)

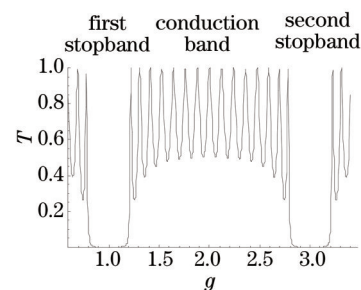


图4 透射率随归一化频率响应曲线(特征矩阵法)

Fig.4 Response curves of transmissivity versus normalized frequency (characteristic matrix theory)

3.2 禁带随折射率的变化

为了便于研究折射率对禁带的影响, 固定 $n_2 = 1.8$ 不变, 研究禁带的归一化频率随 n_1 的变化特征。设光以入射角 $\theta_0 = 0$ 入射, 利用波叠加理论和特征矩阵法计算出一级禁带的归一化频率 g 随 n_1 的响应曲线, 分别如图 5 和图 6 所示。在图 5 和图 6 中白色区域为一级禁带, 黑色区域为导带。比较图 5 和图 6 可知: 波叠加理论和特征矩阵法计算出的一级禁带的归一化频率随折射率的变化规律是一致的。当折射率 $n_1 = 2.5$ 时, 一级禁带的归一化频率的中心 $g_0 = 1$, 一级禁带的归一化频率宽度为 $\Delta g = 0.05$ 。随着折射率 n_1 的增加一级禁带的归一化频率中心不变, 一级禁带的归一化频率宽度逐渐增大。当折射率 n_1 增加到 5 时, 一级禁带的归一化频率的中心仍在 $g_0 = 1$ 处, 一级禁带的归一化频率宽度增加到 $\Delta g = 0.58$ 。

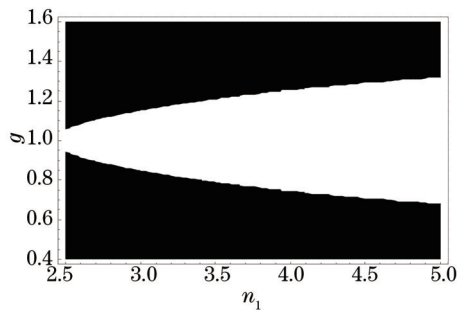


图5 归一化频率随折射率的响应曲线(波叠加理论)

Fig.5 Response curves of normalized frequency versus refractive index (coherent superposition theory)

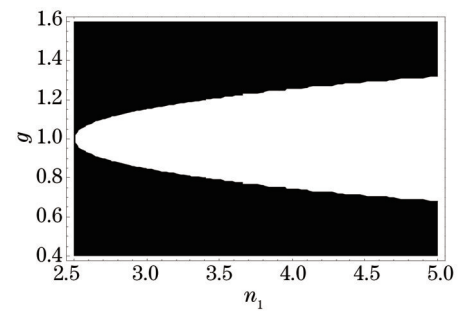


图6 归一化频率随折射率的响应曲线(特征矩阵法)

Fig.6 Response curves of normalized frequency versus refractive index (characteristic matrix theory)

3.3 禁带随入射角的变化

固定 $n_1 = 3.23$ 、 $n_2 = 1.8$, 利用波叠加理论和特征矩阵法计算出一级禁带的归一化频率 g 随入射角 θ_0 的响应曲线, 分别如图7和图8所示。比较图7和图8可知: 波叠加理论和特征矩阵法计算出一级禁带的归一化频率随入射角的变化规律也是一致的。当入射角 $\theta_0 = 0$ 时, 一级禁带的归一化频率的中心 $g_0 = 1$, 一级禁带的归一化频率宽度为 $\Delta g = 0.38$ 。随着入射角的增加一级禁带的归一化频率中心向高频方向移动, 一级禁带的归一化频率宽度逐渐增大。当入射角增加到 $\theta_0 = 1.2$ rad 时, 一级禁带的归一化频率的中心增加到 $g_0 = 1.1$, 一级禁带的归一化频率宽度增加为 $\Delta g = 0.51$ 。

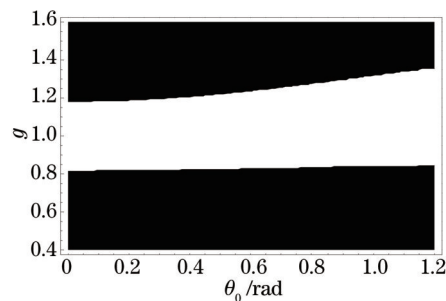


图7 归一化频率随入射角的响应曲线(波叠加理论)

Fig.7 Response curves of normalized frequency versus angle of incidence (coherent superposition theory)

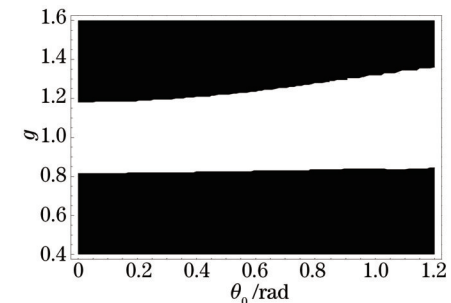


图8 归一化频率随入射角的响应曲线(转移矩阵法)

Fig.8 Response curves of normalized frequency versus angle of incidence (characteristic matrix theory)

从前面的比较和分析中可以得出: 前面建立的一维有限周期光子晶体能带的波叠加理论与特征矩阵法得出的能带的频率结构、能带频率随折射率的变化规律以及能带频率随入射角的变化规律都是一致的。并且波叠加理论还能够清晰地解释能带的产生原因, 克服了特征矩阵法的不足。

4 结 论

通过建立一维有限周期光子晶体的谐振腔模型, 利用光的叠加原理推导出—维有限周期光子晶体的透射率公式, 建立了一种研究—维有限周期光子晶体能带的新方法—波叠加理论。利用波叠加理论和特征矩阵法研究了一维有限周期光子晶体能带的特征, 结果表明波叠加理论和特征矩阵法得出的结果是一致的。—维有限周期光子晶体能带的波叠加理论不仅具有特征矩阵法的优点, 而且又克服了特征矩阵法的不足。因此波叠加理论是一种研究—维有限周期光子晶体能带的更为有效的方法。

参 考 文 献

- 1 E Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics[J]. Phys Rev Lett, 1987, 58(20): 2059-2062.
- 2 Sajeev John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices[J]. Phys Rev Lett, 1987, 58(23): 2486-2489.
- 3 Wang Rui, Zhang Cunxi, Nie Yihang. Band structure and propagation properties of one-dimension anisotropy photonic

- crystals[J]. *Acta Photnica Sinica*, 2007, 36(1): 89–93.
王 瑞, 张存喜, 聂一行. 一维各向异性光子晶体的带隙结构和传输特性[J]. *光子学报*, 2007, 36(1): 89–93.
- 4 Li Rong, Ren Kun, Ren Xiaobin, *et al.*. Angular and wavelength selectivity of band gaps of holographic photonic crystals for different polarizations[J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53(8): 2520–2525.
李 蓉, 任 坤, 任晓斌, 等. 一维光子晶体带隙结构对不同偏振态的角度和波长响应[J]. *物理学报*, 2004, 53(8): 2520–2525.
- 5 Liu Qineng. Defect modes of Ag-doped photonic crystal[J]. *Semiconductor Optoelectronics*, 2009, 30(5): 702–706.
刘启能. 金属掺杂一维光子晶体的缺陷模特性[J]. *半导体光电*, 2009, 30(5): 702–706.
- 6 Liu Qineng. A new simple and convenient method for study of properties forbidden band of one-dimensional photonic crystal[J]. *Acta Photnica Sinica*, 2007, 36(6): 1031–1034.
刘启能. 一种简便的研究一维光子晶体禁带特征的新方法[J]. *光子学报*, 2007, 36(6): 1031–1034.
- 7 Liu Qineng. Effect of impurity absorption on one-dimensional photonic crystal defect mode[J]. *Chinese J Lasers*, 2007, 34(6): 777–780.
刘启能. 杂质吸收对一维光子晶体缺陷模的影响[J]. *中国激光*, 2007, 34(6): 777–780.
- 8 Liu Qineng. Resonance theory of the defect mode of 1-D doping photonic crystal[J]. *Acta Photnica Sinica*, 2012, 41(4): 446–450.
刘启能. 一维掺杂光子晶体缺陷模的共振理论[J]. *光子学报*, 2012, 41(4): 446–450.
- 9 Liu Qineng. Total reflection through effect of light in 1D photonic crystal[J]. *Acta Photnica Sinica*, 2011, 40(2): 232–236.
刘启能. 光在一维光子晶体中的全反射贯穿效应[J]. *光子学报*, 2011, 40(2): 232–236.
- 10 Liu Qineng. Analytical study on total reflection tunnel effect of 1-D photonic crystal[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(2): 0219002.
刘启能. 一维光子晶体的全反射隧穿效应的解析研究[J]. *光学学报*, 2012, 32(2): 0219002.
- 11 Liu Qineng. Interference theory of the defect mode in one-dimensional doped photonic crystal[J]. *Chinese J Lasers*, 2013, 40(8): 0806001.
刘启能. 一维掺杂光子晶体缺陷模的干涉理论[J]. *中国激光*, 2013, 40(8): 0806001.
- 12 Yu Jianli, Shen Hongjun, Ye Song, *et al.*. Design of novel highly efficient photonic crystal multi-channel drop filter[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(11): 1106003.
余建立, 沈宏君, 叶 松, 等. 一种新型高效光子晶体多信道下载滤波器的设计[J]. *光学学报*, 2012, 32(11): 1106003.
- 13 Gong Lixia, Liu Guiqiang, Huang Kuan, *et al.*. Influence of the disorders induced by the doped dielectric spheres on the optical properties of photonic crystals[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(9): 0916005.
龚丽霞, 刘桂强, 黄 宽, 等. 介质球掺杂导致的无序效应对光子晶体光学性能的影响[J]. *光学学报*, 2012, 32(9): 0916005.
- 14 Liu Qineng. Field distribution of polarized light of defect mode in one-dimensional doping photonic crystal[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(11): 1116001.
刘启能. 一维掺杂光子晶体中偏振光缺陷模的光场分布[J]. *光学学报*, 2013, 33(11): 1116001.
- 15 Liu Qineng, Liu Qin. *Transmission Theory of Photonic and Phononic Crystal*[M]. Beijing: Science Press, 2013. 125–162.
刘启能, 刘 沁. *光子、声子晶体的传输理论*[M]. 北京: 科学出版社, 2013. 125–162.
- 16 Ji Jiarong. *Higher Optical Tutorial*[M]. Beijing: Science Press, 2007. 133–137.
季家镛. *高等光学教程*[M]. 北京: 科学出版社, 2007. 133–137.

栏目编辑: 王晓球