两个不同光栅的 Lau 效应

郑智姚金朱岱巍林伟华

武汉大学物理科学与技术学院,湖北 武汉 430072

摘要 对两个不同光栅形成的Lau条纹分布进行了理论分析与实验研究。一般用于推导Lau条纹强度分布函数的方法比较复杂,其中基于交叉谱密度函数推导Lau条纹强度分布函数的方法相对简单。对该方法推导两个全同光栅Lau条纹强度分布函数的过程进行了仔细研究,并寻求将该方法进一步推广应用于两个不同光栅。探讨了该方法在光栅常数相同但占空比不同的两光栅情况下的适用性,并获得了光栅位置前后互换两种情况下简化的Lau条纹强度分布函数,理论计算得到了实验结果的验证。因此,基于交叉谱密度函数的部分相干光理论可用于推导光栅常数相同、占空比不同的两个光栅的Lau条纹分布函数。

关键词 相干光学;双光栅;Lau效应;傅里叶变换

中图分类号 O436.1 文献标识码 A doi: 10.3788/LOP51.090501

Lau Effect of Two Different Gratings

Zheng Zhi Yao Jin Zhu Daiwei Lin Weihua

School of Physics and Technology, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China

Abstract The field distributions of Lau fringes for two different gratings are theoretically and experimentally investigated. The majority of the methods that are used to deduce the intensity distribution function of the Lau effect are rather complicated, among these, the method based on the cross-spectral density function is relatively easy. The process of deducing the intensity distribution function of Lau fringes generated by double identical gratings is studied based on the method, and the method is tried to be applied in a more general situation, two different gratings. The feasibility of the method in the situation of two gratings with the same grating constant but different duty ratios is discussed, and the simplified intensity distribution functions of two cases, in which the arranged positions of the two gratings are swapped, are achieved. The theoretical predictions are well demonstrated by the experimental results. Thus, the partially coherent theory based on the cross- spectral density function also works in the situation with two gratings of the same grating constant and different duty ratios.

Key words coherence optics; double gratings; Lau effect; Fourier transformation **OCIS codes** 050.1950; 030.1670; 090.1970

1 引 言

双光栅系统较单光栅衍射系统复杂,能实现更为丰富的物理现象和效应^[1-4],目前在精确测量和控制等方面有广泛应用^[5-13]。Lau效应是在众多双光栅效应中较早观察到的一种,最初是由法国人Lau^[2]利用扩展光源照明前后平行放置间距为 $p^2/(2\lambda)$ (p 为光栅常数, λ 为入射光波长)整数倍的两个全同光栅时,在无穷远处观察到高对比度的条纹。目前,已有多个科研机构利用不同的理论方法对该现象进行解释,如Jahns等^[14]利用标量衍射理论解释 Lau条纹,Gori等^[15-16]利用部分相干光理论解释 Lau条纹的产生,并将两光栅的间距由 $p^2/(2\lambda)$ 的整数倍推广到更为普遍的 $\alpha p^2/(\beta\lambda)$ ($\alpha \ \pi \ \beta$ 为互质整数)。Patorski等^[17-18]基于 Talbot 效应解释 Lau 效应,并将 Lau条件推广到两个不同周期光栅。Swanson等^[19]利用光栅成像理论将 Lau条件扩展到任意光栅。目前基

收稿日期: 2014-04-03; 收到修改稿日期: 2014-04-14; 网络出版日期: 2014-07-25

基金项目:国家自然科学基金(J1210061,61205166)、武汉大学开放型实验资助项目

作者简介:郑 智(1993—),女,本科生,主要从事微纳光子学器件设计方面的研究。E-mail: 2268036172@qq.com

导师简介:林伟华(1977—),男,博士,副教授,主要从事微纳光子学器件设计方面的研究。

E-mail: linwh_whu@hotmail.com(通信联系人)

激光与光电子学进展

于高对比度的Lau条纹提出了一些应用,如测量折射率^[20]、测量透镜焦距^[21]、光学编码^[22]以及表面断面图测量^[8]等。尽管目前已经有理论推导涉及到可利用两个不同的光栅实现Lau效应,但利用基于交叉谱密度函数的部分相干光理论解释Lau条纹的产生机理仅限于两个全同光栅^[15-16],本文通过仔细研究该方法推导过程发现文献[16]中的方法也可以很好地应用于推导光栅常数相同、占空比不同的两个光栅产生的Lau条纹的强度分布函数,并且利用该方法获得的物理图像更为直观。

2 基于部分相干理论的Lau效应条纹强度分布函数

观察 Lau 效应的实验装置如图 1 所示,非相干光拓展光源(波长为 λ)照明平行放置间距为 z_0 的两个光栅(光栅常数相同,占空比任意)。入射光首先透过光栅 G₁[光栅常数为 p,其透光部分宽度为 $2a_1$,占空比为 $R_1 = 2a_1/p$,透射函数 $g(x_1)$ 的基本形式为矩形函数,满足 $|g(x_1)|^2 = g(x_1) = g(x_1 + p)$],然后经过一个菲涅耳衍射 过程到 G₂[光栅常数与 G₁相同,其透光部分宽度为 $2a_2$,占空比为 $R_2 = 2a_2/p$,透射函数 $t(x_2)$ 基本形式也是矩形函数,满足 $|t(x_2)|^2 = t(x_2 + p)$],再经透镜 L在焦平面屏 P上形成条纹分布。基于交叉谱密度函数简单 给出推导 Lau 条纹光强分布函数的过程¹¹⁶:

$$W_{G_1}^{(-)}(x_1, x_1', \omega) = i_{\omega}(x_1)\delta(x_1 - x_1'), \qquad (1)$$

式中 $W_{c_1}^{(\cdot)}$ 表示在频率为 ω 的扩展光照明情况下,在光栅 G_1 前表面的 x_1 与 x_1 点交叉谱密度函数, $i_{\omega}(x_1)$ 为 x_1 处光强,是正实函数, $\delta(x_1 - x_1)$ 则为一维Dirac δ 函数。

入射光透过G1,经过菲涅耳衍射在光栅G2前表面的x2与x2点交叉谱密度函数为

$$W_{G_{2}}^{(-)}(x_{2}, x_{2}^{'}, \omega) = \exp\left[\frac{\mathrm{i}k(x_{2}^{2} - x_{2}^{'2})}{2z_{0}}\right]_{-\infty}^{\infty} i_{\omega}(x_{1}) |g(x_{1})|^{2} \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k(x_{2} - x_{2}^{'})x_{1}}{z_{0}}\right] \mathrm{d}x_{1},$$
(2)

式中 z_0 为光栅间距,波矢 $k=2\pi/\lambda$ 。由G₁透射函数所满足的条件,(2)式可写为

$$W_{c_2}^{(-)}(x_2, x_2, \omega) = \exp\left[\frac{\mathrm{i}k(x_2^2 - x_2^{'2})}{2z_0}\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} i_{\omega}(x_1) \exp\left\{-\mathrm{i}x_1\left[\frac{k(x_2 - x_2)x_1}{z_0} - \frac{2\pi n}{p}\right]\right\} \mathrm{d}x_1, \tag{3}$$

式中n为整数,

$$c_{n} = \frac{1}{p} \int_{-p/2}^{p/2} g(x_{1}) \exp(-i2\pi n x_{1}/p) dx_{1}.$$
 (4)

入射光再透过G2,在透镜焦平面上的条纹的光强分布为

$$I(x_3) = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n b_n \exp\left(\frac{i\pi\lambda z_0 n^2}{p^2}\right) \exp\left(\frac{-i2\pi n x_3 z_0}{pf}\right),\tag{5}$$

式中C为常数,f为透镜L的焦距,

$$b_n = \int_{-\infty}^{\infty} t(x_2) t \left(x_2 + \frac{\lambda z_0 n}{p} \right) \exp\left(\frac{i2\pi n x_2}{p} \right) dx_2.$$
(6)

从上述推导过程可以看出,光强分布公式与光栅常数直接相关,而与两个光栅的占空比没有直接联系,因此,可以直接应用于光栅常数相同但占空比不同的两个光栅 Lau条纹强度分布的计算。但从(5)式中并不能直接分析光强的分布,需根据具体情况对(5)式作进一步简化。下面以上述公式为基础,讨论分析公式应





激光与光电子学进展

用在光栅常数相同但占空比不同的两个光栅情形下的简化。

- 3 两个不同光栅的Lau条纹强度分布函数在不同情况下的简化 考虑光栅常数同为p的两个光栅,占空比不同,一个为0.5,另一个为0.1。分两种情况来讨论。
- **3.1** G₁, G₂占空比分别为 R₁=0.5, R₂=0.1 在这种情况下,两光栅间距为 $z_0 = \alpha p^2 / (\beta \lambda)$,只要 $\beta < 10$,就满足 $2a_2 < p/\beta$ 这个条件。可以得到 $t(x_2)t\left(x_2 + \frac{n\lambda z_0}{p}\right) = \begin{cases} 0, & n\alpha/\beta \text{ is a non-integer,} \\ t(x_2), & n\alpha/\beta \text{ is an integer.} \end{cases}$ (7)

另外,光栅 G₂的透射函数可写为
$$t(x_2) = \sum_{m=-l(N-2)/2]}^{l(N-1)/2} \operatorname{rect}\left(\frac{x_2 - mp}{2a_2}\right)$$
。当 $n\alpha/\beta$ 为整数时,可以将(6)式简化为

$$b_n = \begin{cases} 2a_2N, & n = 0, \\ N \int\limits_{-p/2}^{p/2} \operatorname{rect}\left(\frac{x_2}{2a_2}\right) \exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi nx_2}{p}\right) \mathrm{d}x_2, & n \neq 0, \end{cases}$$
(8)

式中N为趋于无穷的整数。

为了不失一般性,设定 $\alpha = 1$,用 $\beta n'$ (其中 n' 为整数)代替 n,则(8)式和(4)式可写为

$$b_{n'} = \begin{cases} 2a_2N, & n' = 0, \\ \frac{Np}{\beta n'\pi} \sin\left(\frac{2\pi\beta n'a_2}{p}\right), & n' \neq 0, \end{cases}$$
(9)

$$c_{n'} = \begin{cases} 2a_1/p, & n' = 0, \\ \frac{1}{\beta n'\pi} \sin\left(\frac{2\pi\beta n'a_1}{p}\right), & n' \neq 0. \end{cases}$$
(10)

因此,得到透镜L焦平面上条纹的强度分布为

$$I(x_3) = pNC\left[\left(\frac{2a_1}{p}\right)\left(\frac{2a_2}{p}\right) + \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{2q}{\left(\beta n'\pi\right)^2} \sin\left(\frac{2\pi\beta n'a_2}{p}\right) \sin\left(\frac{2\pi\beta n'a_1}{p}\right) \cos\left(\frac{2\pi\beta n'x_3z_0}{pf}\right)\right],\tag{11}$$



图 2 G₁占空比为 $R_1 = 0.5$, G₂占空比为 $R_2 = 0.1$, $\alpha = 1$ 时 Lau条纹强度分布的 [(a),(c),(e)]理论计算和[(b),(d),(f)]实验测量 Fig.2 [(a),(c),(e)] Calculated and [(b),(d),(f)] experimental intensity distribution of Lau fringe as G₁ and G₂ with duty ratios of $R_1 = 0.5$ and $R_2 = 0.1$, respectively, and $\alpha = 1$

式中 $q=1(\, \ \alpha \cdot \beta \,)$ 两偶数时) 或 $q=(-1)^{n'}(\, \ \alpha \cdot \beta \,)$ 奇数时)。

图 2(a),2(c)和 2(e)分别给出了当 β =1,2,3时光强分布的理论计算结果(图中纵坐标用同一强度归一化),图 2(b),2(d)和 2(f)分别给出了 β =1,2,3时的实验测量结果(实验中两光栅的光栅常数均为 p=500 µm, 用钠光灯照明 λ = 589.3 nm),可以看出理论计算结果与实验相当吻合,只有 β = 2 时的实验结果[图 2(d)]中 有对比度很低的条纹,与理论计算有非常微小的差别。

3.2 G_1, G_2 占空比分别为 $R_1 = 0.1, R_2 = 0.5$

当光栅间距满足 $z_0 = \alpha p^2/(\beta \lambda)$,为了不失一般性,仍设 $\alpha = 1$,如果 $\beta = 1$ 或2时,则 $2a_2 < p/\beta$ 这个条件仍能 成立,可以看到 $t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 相较于 $t(x_2)$ 在 x_2 轴移动 p 的整数倍或 p/2 的奇数倍[图 3(a),3(b)],则对应的 $t(x_2) \cdot t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 就等于 $t(x_2)$ 或 0。因此,在这两种情况下焦平面 P上的强度分布仍由(11)式给出。图 4(a)和 4(c)分别给出了 $\beta = 1$ 和2时的计算结果(图中纵坐标用同一强度归一化),图 4 (b)和4(d)是相应的实验结果。



图3 $t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 相对于 $t(x_2)$ 在 x_2 轴移动不同距离时 $t(x_2) \cdot t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 的分布。(a)移动 p的整数倍; (b)移动 p/2的奇数倍; (c)移动其他任意距离

Fig.3 Schematic of the results of $t(x_2) \cdot t(x_2 + \lambda z_0 n/p_1)$ as $t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ moves different distances away from $t(x_2)$ along

the x, axis. (a) Shift integer multiples of p; (b) shift odd integer multiples of p/2; (c) shift other arbitrary distances

当 $\beta \ge 3$ 时,不能满足 $2a_2 < p/\beta$ 这个条件,因此 $t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 相对于 $t(x_2)$ 在 x_2 轴上移动的距离不再是 p 的整数倍或 p/2 的奇数倍[图 3(c)],那么 $t(x_2) \cdot t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 将会变成一个新的周期性函数 $t'(x_2)$ 。在此仅讨论 $\beta = 3$ 的情况。为了得到正确的结果,将(5)式分解成3个部分。

在第1部分中, $t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 相较于 $t(x_2)$ 在 x_2 轴移动 p 的整数倍, 即 mp (m 为整数), 此时, $t(x_2) \cdot t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 依旧等于 $t(x_2)$ 。将n 换成 3n', 得到:

$$b_{n'} = \begin{cases} 2a_2 N, & n' = 0, \\ \frac{Np}{3n'\pi} \sin\left[\frac{2\pi(3n')a_2}{p}\right], & n' \neq 0. \end{cases}$$
(12)

则第1部分的光强分布为

$$I_{1}(x_{3}) = pNC\left[\left(\frac{2a_{1}}{p}\right)\left(\frac{2a_{2}}{p}\right) + \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n'}}{(3n'\pi)^{2}} \sin\left(\frac{2\pi 3n'a_{2}}{p}\right) \sin\left(\frac{2\pi 3n'a_{1}}{p}\right) \cos\left(\frac{2\pi 3n'x_{3}z_{0}}{pf}\right)\right].$$
(13)



图 4 G₁占空比为 $R_1 = 0.1$, G₂占空比为 $R_2 = 0.5$, $\alpha = 1$ 时 Lau条纹强度分布的[(a),(c),(e)]理论计算和[(b),(d),(f)]实验测量 Fig.4 [(a),(c),(e)] Calculated and [(b),(d),(f)] experimental intensity distribution of Lau fringe as G₁ and G₂ with duty ratios of $R_1 = 0.1$ and $R_2 = 0.5$, respectively, and $\alpha = 1$

在第2部分中, $t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 相对于 $t(x_2)$ 沿 x_2 轴正方向移动 (m + 1/3)p,则 $t(x_2) \cdot t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 将变成一 个新的函数,可得

$$t'(x_2) = \sum_{m=-[(N-1)/2]}^{[(N-1)/2]} \operatorname{rect}\left(\frac{x_2 - p/6 - mp}{2a_3}\right),\tag{14}$$

式中 2a3=p/6。因此可以得到

$$b_n = \frac{Np}{n\pi} \exp\left(\frac{in\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi na_3}{p}\right),\tag{15}$$

再用 3n'-2 代替 n,那么第2部分的光强分布为

$$I_{2}(x_{3}) = \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{2pNC}{\left[(3n'-2)\pi\right]^{2}} \sin\left[\left(\frac{2\pi(3n'-2)a_{3}}{p}\right)\right] \sin\left[\left(\frac{2\pi(3n'-2)a_{1}}{p}\right)\right] \cos\left[\frac{(3n'-2)^{2}\pi}{3} - \frac{(3n'-2)\pi}{3} - \frac{2\pi(3n'-2)x_{3}z_{0}}{pf}\right]$$
(16)

在第3部分, $t(x_2 + \lambda z_0 n/p)$ 相对于 $t(x_2)$ 沿 x_2 轴负方向移动 (m + 1/3)p,因此,可以得到

$$t'(x_2) = \sum_{m=-[(N-1)/2]}^{[(N-1)/2]} \operatorname{rect}\left(\frac{x_2 + p/6 - mp}{2a_3}\right),\tag{17}$$

$$b_n = \frac{Np}{n\pi} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi na_3}{p}\right),\tag{18}$$

再用 3n'-1代替 n,那么第3部分的光强分布为

$$I_{3}(x_{3}) = \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{2pNC}{\left[(3n'-1)\pi\right]^{2}} \sin\left[\left(\frac{2\pi(3n'-1)a_{3}}{p}\right)\right] \sin\left[\left(\frac{2\pi(3n'-1)a_{1}}{p}\right)\right] \cos\left[\frac{(3n'-1)^{2}\pi}{3} - \frac{5(3n'-1)\pi}{3} - \frac{2\pi(3n'-1)x_{3}z_{0}}{pf}\right].$$
(19)

将(13)、(16)、(19)式相加,计算得到 β =3时的光场分布如图 4(e)所示[图 4(a),4(c)和 4(e)纵坐标同一强度 归一化],与实验结果图 4(f)所示非常吻合。虽然 β =3时,总光强是3部分之和,但其光强最大值仅比 β =1

时稍大一些,而前者的条纹分布周期是后者的3倍[图4(e)和图4(a)]。

4 两光栅位置交换的光强分布比较

比较 3.1 节与 3.2 节所述情况, 3.2 节相当于交换了 3.1 节光栅 G₁和光栅 G₂ 的位置,可以发现当 β = 1,2 时, 交换两光栅的位置后, 其产生的场强分布并无变化[图 2(a),2(b)和图 4(a),4(b), 图 2(c),2(d)和图 4(c),4 (d)]。这是由于当 α = 1, β = 1,2 时, 满足 $2a_2 < p/\beta$, (11)式适用于这两种情况, 而在(11)式中 a_1 与 a_2 交换位置后并不改变其结果, 因此在此种情况下交换前后光栅并不影响前后场强分布。 β = 3 时, 交换两光栅的位置后, 其后的场强分布并不相同[图 2(e),2(f)和图 4(e),4(f)], 其主要原因是在 3.1 节中仍满足 $2a_2 < p/\beta$, 但在 3.2 节中不满足 $2a_3 < p/\beta$ 这个条件, 此时场强分布是(13)、(16)、(19)式 3式之和。

5 结 论

研究了基于部分相干性原理推导的两个全同光栅 Lau条纹分布函数,并将其推广应用于推导两个不同 光栅(光栅常数相同,占空比不同)的 Lau条纹分布,在互换两光栅前后位置的两种情况下对理论公式进行化 简得到容易求解的表达式,理论计算结果均得到实验验证。讨论了交换两光栅前后位置 Lau条纹发生改变 的原因,若交换光栅位置前后都满足 2a₂ < p/β 条件,交换光栅并不改变两光栅产生的 Lau条纹,此时的场强 分布关于 a₁ 与 a₂ 是对称的,但是当交换光栅位置后第2个光栅不能满足 2a₂ < p/β 条件时,此时交换光栅就 会得到不同的 Lau条纹。

参考文献

1 H F Talot. Facts relating to optical science [J]. Phil Mag, 1836, 9(56): 401–407.

- 2 E Lau. Beugungserscheinungen and dopperlrastern [J]. Ann Phys, 1948, 6: 417-423.
- 3 Gu Quwu. Moire phenominon, interferometry and holography [J]. Acta Optica Sinica, 1981, 1(2): 135–142.

顾去吾.莫尔现象、干涉术和全息术[J].光学学报, 1981, 1(2): 135-142.

4 Zhang Hailian, Gu Quwu. Achromatic effect of white light double grating diffraction interference [J]. Acta Optica Sinica, 1993, 13(9): 818-823.

张海联, 顾去吾. 双光栅白光衍射干涉的消色效应[J]. 光学学报, 1993, 13(9): 818-823.

5 Tan Qiaofeng, Yan Yingbai, Jin Guofan, *et al.*. The double gratings beam collimation measure system and its precision analysis [J]. Practical Measurment Technology, 1997, (3): 10–13.

谭峭峰,严瑛白,金国藩,等.双光栅准直测量系统及其精度分析[J].实用测试技术,1997,(3):10-13.

6 Zhao Hong, Chen Wenyi, Tan Yushan. Three-dimensional contouring by using quai-sine characteristic of Moire pattern [J]. Acta Optica Sinica, 1994, 14(8): 834-837.

赵 宏,陈文艺,谭玉山.利用莫尔条纹的准正弦特性的三维轮廓术[J].光学学报,1994,14(8):834-837.

- 7 Chen Shuibo. Velocity measurement by Doppler shift of double gratings [J]. Physics Experimentation, 2007, 27(7): 6-9. 陈水波. 利用双光栅的多普勒频移测速度[J]. 物理实验, 2007, 27(7): 6-9.
- 8 M Thakur, C Quan, C J Tay. Surface profiling using fringe projection technique based on Lau effect [J]. Opt & Laser Tech, 2007, 39(3): 453-459.
- 9 Zhang Peng, Zhou Huijun, Wang Sihui. Amplitude modulation of resultant light signal in measuring of tiny displacement with double gratings [J]. Research and Exploration in Laboratory, 2009, 28(2): 15–19.

张 鹏,周惠君,王思慧. 激光双光栅法测微小位移中光拍信号的振幅调制[J]. 实验室研究与探索, 2009, 28(2): 15-19.

10 Bai Long, Yang Huayong, Luo Hong. Study on fiber Bragg grating-based geophone [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(11): 110601.

白 龙,杨华勇,罗 洪.光纤布拉格光栅地听器设计研究[J].激光与光电子学进展, 2012, 49(11): 110601.

11 Kong Peng, Tang Yuguo, Bayanheshig, *et al.*. Double- grating minitype flat- field holographic concave grating spectrograph [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(1): 0105001.

孔 鹏, 唐玉国, 巴音贺希格, 等. 双光栅切换微型平场全息凹面光栅光谱仪[J]. 光学学报, 2013, 33(1): 0105001.

12 Ma Youchun, Liu Hongyu, Yang Yuanhong, *et al.*. Experimental research on dynamic strain sensing of superimposed fiber Bragg gratings based on random non-uniform sampling [J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(7): 0705002.

激光与光电子学进展

马游春, 刘红雨, 杨远洪, 等. 基于随机非均匀采样的重叠双光栅动态应变传感实验研究[J]. 中国激光, 2013, 40(7): 0705002. 13 Wei Jingbo, Hu Guijun, Du Yang, *et al.*. High power all-optical gain-clamped fiber amplifier [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(7): 0706012.

魏敬波, 胡贵军, 杜洋, 等. 全光增益控制高功率光纤放大器[J]. 光学学报, 2013, 33(7): 0706012.

- 14 J Jahns, A W Lohmann. The Lau effect (a diffraction experiment with incoherent illumination) [J]. Opt Commun, 1979, 28(3): 263–267.
- 15 F Gori. Lau effect and coherence theory [J]. Opt Commun, 1979, 31(1): 4-8.
- 16 R Sudol, B J Thompson. Lau effect: Theory and experiment [J]. App Opt, 1981, 20(6): 1107-1116.
- 17 K Patorski. Incoherent superposition of multiple self-imaging Lau effect and Moire fringe explanation [J]. Opt Acta, 1983, 30(6): 745-758.
- 18 S C Som, A Satpathi. The generalized Lau effect [J]. J Mod Opt, 1990, 37(7): 1215–1226.
- 19 G J Swanson, E N Leith. Analysis of the Lau effect and generalized grating imaging [J]. J Opt Soc Am A, 1985, 2(6): 789–793.
- 20 J C Bhattacharya. Refractive index measurement [J]. Opt & Laser Tech, 1987, 19(1): 29–32.
- 21 S Prakash, S Singh, A Vermaa. Low cost technique for automated measurement of focal length using Lau effect combined with Moire readout [J]. J Mod Opt, 2006, 53(14): 2033-2042.
- 22 D Crespo, J Alonso, T Morlanes, et al.. Optical encoder based on the Lau effect [J]. Opt Eng, 2000, 39(3): 817-824.