

光纤光阱力计算的近似条件及误差分析

熊威 肖光宗* 韩翔 张尧楷 黄云 罗晖

国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南长沙 410073

摘要 光纤光镊技术利用光纤出射的光束捕获和操控粒子,其飞速发展对光阱力的理论研究提出了更高的要求。采用射线光学模型对光纤光阱中的米氏微球所受到的光阱力进行数值模拟,讨论了光阱力计算中可采用的近似条件及其应用范围,比较了在近似条件下与直接计算情况下结果的差异,分析了微球与光纤端面之间的距离对近似计算的影响。理论分析和模拟计算表明,当微球与光纤端面之间的距离大于临界值时,可对计算模型中光束在微球表面的入射角、入射点的方位角等角度参量作近似处理,该结论为简化光纤光阱力计算提供了理论依据。

关键词 激光技术;光阱力;数值模拟;光纤光镊;近似条件

中图分类号 TN249 文献标识码 A doi: 10.3788/LOP51.081404

Analysis of Approximate Conditions and Error of Trapping Forces in a Fiber Optical Trap

Xiong Wei Xiao Guangzong Han Xiang Zhang Yaokai Huang Yun Luo Hui

*College of Optoelectronic Science and Engineering, National University of Defense Technology,
Changsha, Hunan 410073, China*

Abstract Fiber optical tweezers capture and control particles with fiber output beam. The fast development of fiber optical tweezers puts forward higher requirements to the theoretical study of trapping forces. Numerical simulation of trapping forces of Mie particle whose diameter is larger than the free-space wavelength is done, the approximate conditions in trapping forces calculating and its applied range are discussed, the result of direct calculating and the result calculated under the approximate conditions are obtained and compared. Influence on approximate calculating caused by the distance between particle and fiber end is analyzed. The numerical results show that when the distance between particle and fiber end is larger than a certain value d , which is related to radius of waist beam, some angle parameters such as the incidence angle and the azimuthal angle can be approximated, and the conclusion provides theoretical reason for simplified fiber optical trapping force calculating.

Key words laser technique; trapping forces; numerical simulation; fiber optical tweezers; approximate conditions

OCIS codes 140.3510; 170.4520; 350.4855; 080.1753

1 引言

光镊自诞生以来就一直广受关注,它可以产生皮牛级的微小力以及实现纳米级位移的测量,因此在生物学、医学、物理学以及纳米科技等领域有重要应用^[1]。

传统的光镊系统通常由一个倒置的显微镜改装而成,激光束扩束后填满显微镜物镜,在物镜焦平面形成最小的光斑以捕获微粒。光纤光镊系统是利用光纤出射的光束代替由显微物镜聚焦的光束,相比于基于显微镜的光镊系统,具有结构简单、操纵灵活、工作范围大等特点。随着垂直腔面发射半导体激光器(VCSEL)技术的进步,光纤光镊朝着微型化、多功能化发展。已有研究者将多根单模光纤组装在一个微型芯片上,实现光阱的多轴集成^[2]。光阱力场的计算和分析是光纤光镊系统的理论和实验基础。光纤光镊的飞

收稿日期: 2014-01-15; 收到修改稿日期: 2014-03-04; 网络出版日期: 2014-07-23

作者简介: 熊威(1990—),男,硕士研究生,主要从事光学检测方面的研究。E-mail: dolarx@sina.com

导师简介: 黄云(1970—),男,硕士,教授,主要从事镀膜和光学检测技术等方面的研究。E-mail: hyun101@sina.com

*通信联系人。E-mail: xiaoguangzong@163.com

速发展对光纤光阱力计算方法的理论研究提出了更高的要求。

根据微粒半径 r 和入射激光波长 λ 的大小关系,可分别采用射线光学模型、瑞利模型和 EM 模型来分析光阱力^[3],它们分别适用于米氏区($r \gg \lambda$)、瑞利区($r \ll \lambda$)和中间区域,相应地有多种光阱力计算方法,包括几何光学近似计算、广义洛伦兹米氏散射理论、T 矩阵方法、时域有限差分法等。射线光学模型是通过计算每一条光线与微粒的相互作用从而得到整个微粒的受力情况。由于射线光学模型只需要采用几何光学理论,因此比较简单。传统的光纤光阱力射线光学模型很多都是从 Erkin 和 Scott 的研究发展而来^[4],但是该模型对于不在光轴上的微粒,空间角度的分析比较复杂,受力方向往往通过特定空间位置判断,计算比较繁琐^[5],在此基础上发展了一些新的分析方法^[6],简化了光线作用力的计算。

本文基于传统的光线追迹方法,建立射线光学模型,针对空间角度计算复杂的问题,重点研究角度的近似方法,分析近似计算条件及产生的误差,为简化光纤光阱力计算提供理论依据。

2 射线光学模型的基本原理

根据折射定律,当一束光入射到微球上时,会产生反射和折射,光子的动量就会发生改变,由动量守恒定理可知微球的动量也会发生改变,微球在一定方向上就会受到力的作用。

如图 1 所示,一条光线入射到微球上的某一点,入射角为 α_i ,微球受到的力可被分解成互相垂直的两个部分,分别是散射力(由微球表面的反射引起)和梯度力(由微球表面的折射引起),图中的 \mathbf{s} 和 \mathbf{g} 是沿散射力和梯度力方向的单位矢量^[7]。这两个力可以分别表示为^[8]

$$d\mathbf{F}_s = \mathbf{s} \frac{n_1}{c} q_s dP, \quad (1)$$

$$d\mathbf{F}_g = \mathbf{g} \frac{n_1}{c} q_g dP, \quad (2)$$

式中 n_1 是微球周围介质折射率, c 为真空光速, dP 是入射光线的功率。对于一束高斯光束, dP 可以表示为

$$dP = I \cos \theta dS = \frac{2P_0}{\pi\omega_0^2} \exp\left(\frac{-2r^2}{\omega^2}\right) \cos \theta dS, \quad (3)$$

式中 I 是光强, P_0 是入射光线的总功率, ω_0 是束腰半径, ω 是任意点的光斑半径, dS 是微球上的一个微分面元, θ 是面元 dS 与光轴的夹角。 q_s 和 q_g 与入射到微球上的光动量的微分有关,可以表示为^[8]

$$q_s = 1 + R \cos 2\alpha_i - T^2 \frac{\cos(2\alpha_i - 2\alpha_t) + R \cos 2\alpha_i}{1 + R^2 + 2R \cos \alpha_i}, \quad (4)$$

$$q_g = -R \sin 2\alpha_i + T^2 \frac{\sin(2\alpha_i - 2\alpha_t) + R \sin 2\alpha_i}{1 + R^2 + 2R \cos 2\alpha_i}, \quad (5)$$

式中 α_i, α_t 分别表示光线的入射角和折射角, R, T 为反射率和折射率。

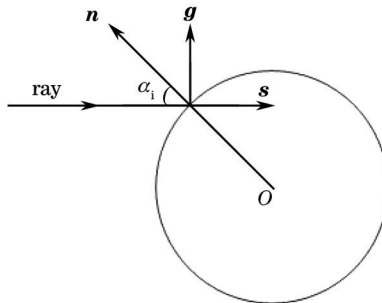


图 1 作用在微球上的光阱力

Fig.1 Trapping forces on the sphere

当一束高斯光束照射到微球上时,考虑一般情况,微球中心不在光轴上,如图 2 所示。从光轴上 A 点出射的一条光线照射在微球上的 M 点,激光光束的传播方向为 z 轴正向,束腰位置位于 xy 平面上,与 z 轴距离为 d , z 轴穿过微球中心, θ 和 φ 为 M 点在以微球圆心为原点的球坐标系中的方位角。任意点 M 的波面曲率半径为

$$R_s = z_m \left[1 + \left(\frac{\rho}{z_m} \right)^2 \right], \quad (6)$$

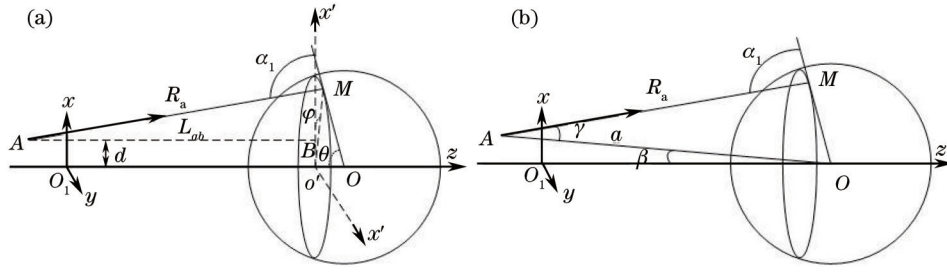


图2 光线入射微球几何示意图

Fig.2 Geometry of a sphere hit by a ray

式中 z_m 是 M 点的 z 轴坐标, $\rho = \pi n_1 w_0^2 / \lambda_0$, w_0 是束腰半径。根据图2的几何关系可求得(1)式与(2)式中 \mathbf{s} 及 \mathbf{g} 的表达式

$$\mathbf{s} = [\hat{\mathbf{x}}(r_0 \sin \theta \cos \varphi - d) + \hat{\mathbf{y}}(r_0 \sin \theta \sin \varphi) + \hat{\mathbf{z}}L_{ab}] / |R_a|, \quad (7)$$

$$\mathbf{g} = (R_a \tan \gamma)^{-1} \left[\hat{\mathbf{x}}(r_0 \sin \theta \cos \varphi) - d + \frac{dR_a}{a \cos \gamma} \right] + \hat{\mathbf{y}}(r_0 \sin \theta \sin \varphi) + \hat{\mathbf{z}} \left[L_{ab} - \frac{R_a(L_{ab} + r_0 \cos \theta)}{a \cos \gamma} \right]. \quad (8)$$

其他参数分别可以表示为

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 \left[1 + (z_m / \rho)^2 \right], \\ z_m &= z_0 - r_0 \cos \theta, \\ L_{ab} &= \pm (R_a^2 - r^2)^{1/2}, \\ r^2 &= d^2 + (r_0 \sin \theta)^2 - 2dr_0 \sin \theta \cos \varphi, \\ a^2 &= d^2 + (r_0 \cos \theta + L_{ab})^2, \end{aligned} \quad (9)$$

式中 w 是 M 点的光斑半径, r_0 是微球半径, z_0 是球心的 z 轴坐标, L_{ab} 是 C 点沿光轴到 M 点所在垂轴平面的距离, φ 是 M 点的垂轴平面内偏离 x 轴的角度。

利用几何光学计算后,得到粒子受到的总的光阱力为

$$\mathbf{F} = \frac{n_1 P_0}{c} \frac{4r_0^2}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \sin \theta \times \cos \theta (sq_s + gq_g) \frac{\exp(-2r^2/\omega^2)}{\omega^2}. \quad (10)$$

将光阱力分解成 x 方向上的 F_x 和 z 方向的 F_z

$$F_z = \frac{n_1 P_0}{c} Q_z, \quad (11)$$

$$F_x = \frac{n_1 P_0}{c} Q_x, \quad (12)$$

其中,

$$Q_z = \frac{2r_0^2}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \sin 2\theta \frac{\exp(-2r^2/\omega^2)}{\omega^2 R_a} \times \left\{ q_s L_{ab} + \frac{q_g}{\tan \gamma} \times \left[L_{ab} - \frac{R_a(L_{ab} + r_0 \cos \theta)}{a \cos \gamma} \right] \right\}, \quad (13)$$

$$Q_x = \frac{2r_0^2}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \sin 2\theta \frac{\exp(-2r^2/\omega^2)}{\omega^2 R_a} \times \left\{ q_s (r_0 \sin \theta \cos \varphi - d) + \frac{q_g}{\tan \gamma} \times \left[r_0 \sin \theta \cos \varphi - d \left(1 - \frac{R_a}{a \cos \gamma} \right) \right] \right\}. \quad (14)$$

Q_z 和 Q_x 可以看做是光阱力效率。以上是在一般情况下计算光阱力,也就是微球中心不在光轴上的情况。当微球中心位于光轴上时, $d=0$, 由于对称性, F_x 为 0。(13)式可简化为

$$Q_z = 2r_0^2 \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \sin 2\theta \frac{\exp(-2r^2/\omega^2)}{\omega^2 R_a} \times (q_s L_{ab} - q_g r_0 \sin \theta). \quad (15)$$

3 近似条件及误差分析

设定微球折射率 $n_2=1.59$, 半径为 $5 \mu\text{m}$, 周围介质折射率 $n_1=1.33$, 使用 980 nm 的半导体激光器, 束腰半径为 $5 \mu\text{m}$, 捕获激光为圆偏振光。考虑双光纤的情况, 两束光相向传播, 束腰位置位于光纤端面上。此时微球受力与两个光纤出射端的距离 s 有关, 因此在计算另一束光的轴向力时用 $s-z_0$ 代替 z_0 。在仿真过程中对某些参量进行归一化, 取 $D=d/w_0, S=s/w_0, Z_0=z_0/w_0$ 。反射率 R 和折射率 T 可表示为

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\alpha_i - \alpha_t)^2}{\sin(\alpha_i + \alpha_t)^2} + \frac{\tan(\alpha_i - \alpha_t)^2}{\tan(\alpha_i + \alpha_t)^2} \right], \quad (16)$$

$$T = 1 - R.$$

当微球完全浸没在光束中时, 入射角 α_i 可以取到最大值 $\alpha_{\max} = \pi/2$, 此时 θ 取最大值 θ_{\max} 。根据图 2 可以得到

$$a^2 = r_0^2 + R_a^2 = d^2 + (L_{\text{ab}} + r_0 \cos \theta_{\max})^2. \quad (17)$$

设此时 $\theta_{\max} = \theta_m$ 。利用 Matlab 可得到微球受到的横向力及轴向力曲线。

3.1 对 θ_{\max} 的近似

观察图 2, 当微球位置较远, 即 $z_0 \gg d$ 时 (假设 $z_0 > d$ 时此条件成立), 忽略离轴距离 d 的影响, 对 θ_{\max} 取近似值

$$\theta_{\max} \approx \theta'_m = \arccos(r_0/z_0), \quad (18)$$

将 θ'_m 代入(14)式及(15)式可以得到取近似值后的光阱力曲线。

3.1.1 横向力计算

计算横向力时, 认为微球位于 $z_0=s/2$ 的位置, 此时两个光束产生的轴向力相互抵消。图 3 是在双光束情况下, (14)式中积分上限分别取 θ_m 和 θ'_m 时微球受到的横向捕获效率 Q_x 随微球的横向偏移量 D 变化的曲线, 可以看出, 当 $S=5$ 时, 两条曲线相差很大, 随着 S 的增大, 两条曲线逐渐靠近, 到 $S=40$ 时基本重合。因此, 当 S 较小时 ($z_0=s/2$ 也较小), $\theta_{\max} \approx \theta'_m$ 的条件是不成立的。

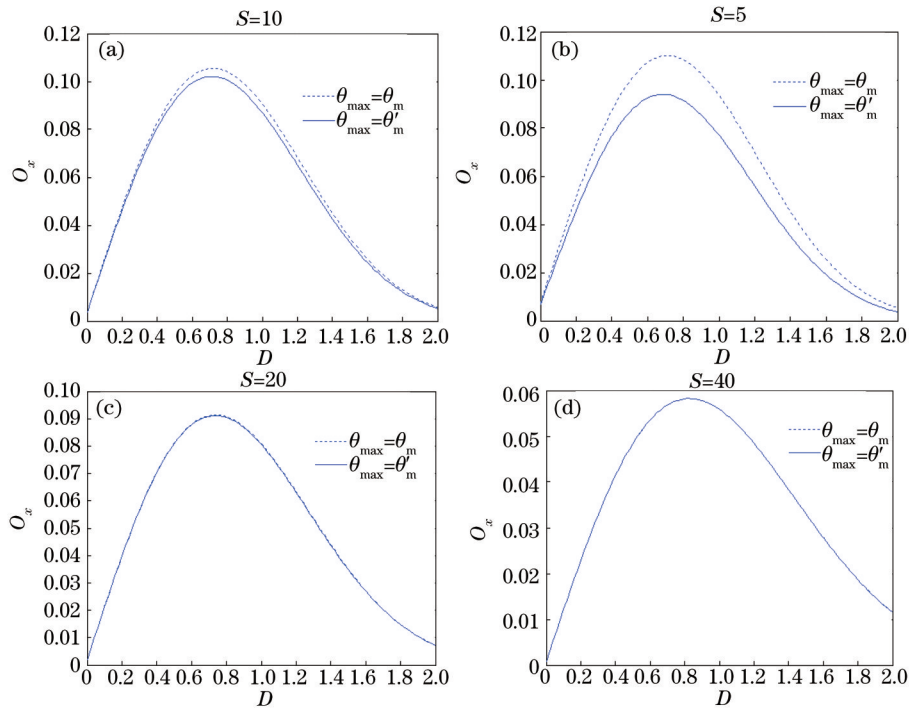


图 3 不同的 θ_{\max} 下计算的双光束横向捕获效率

Fig.3 Transverse trapping efficiency of two beams calculated with different θ_{\max}

3.1.2 轴向力计算

图 4 是(15)式中积分上限分别取 θ_m 和 θ'_m 时微球受到的轴向捕获效率 Q_z 随微球的轴向位置 Z_0 变化的曲

线。微球位置在 $Z_0=S/2$ 附近一段范围内,两曲线是吻合的,但是曲线两端相差很大。对单光束的情况,微球受到的光阱力与 S 无关,如图 5 所示。当 Z_0 大于一定值时,两条曲线基本重合。可以看出, Z_0 较小时, $\theta_{\max} \approx \theta'_m$ 的条件是不成立的。

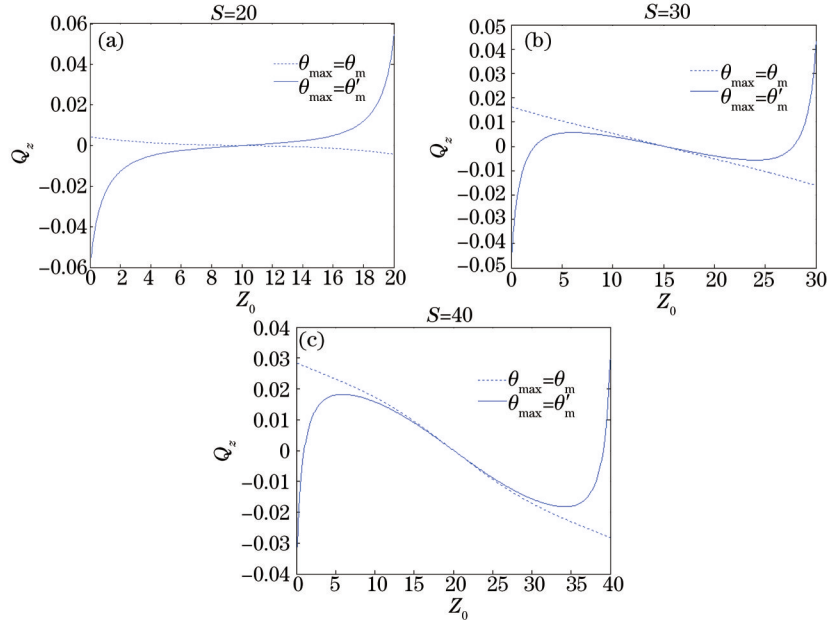


图 4 不同 θ_{\max} 下计算的双光束轴向捕获效率

Fig.4 Axial trapping efficiency of two beams calculated with different θ_{\max}

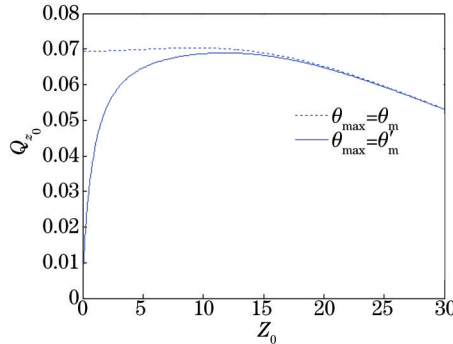


图 5 不同的 θ_{\max} 下计算的单光束轴向捕获效率

Fig.5 Axial trapping efficiency of one beam calculated with different θ_{\max}

因此,根据以上分析可以看出,当 Z_0 在 $S/2$ 附近一段范围时,取 $\theta_{\max} = \theta'_m$ 是可行的,对仿真结果影响不大。根据两个曲线图估计这个范围是 $6 < Z_0 < S-6$,此时,微球与光纤的距离满足 $\Delta z > 30 \mu\text{m}$ 。这是在引用论文中的各参数情况下得出的初步结论,在后面将对这个值进行详细讨论,得到其一般情况下的精确表达式。

3.2 对 α_i 与 γ 的近似

在计算轴向力时,一般考虑微球在轴上的情况,此时 $d=0$ 。考虑 $z_0 \gg d$,此时 $\alpha_i \approx \theta$, $\gamma \approx 0$, (15)式可以简化为

$$Q'_z = \frac{2r_0^2/\omega_0^2}{1+(z_0/\rho)^2} \int_0^{\pi/2} d\theta q_s \sin 2\theta. \tag{19}$$

将此式的结果与(15)式的结果比较,得到如图 6 所示曲线。对不同的微球半径 r_0 , (19)式计算误差也不同。随着 r_0 增大, $Q_z - Q'_z$ 的值相应增大。且对同一种微球,离光纤的距离较远时,取 $\alpha_i \approx \theta$, $\gamma \approx 0$ 计算误差相对较小。

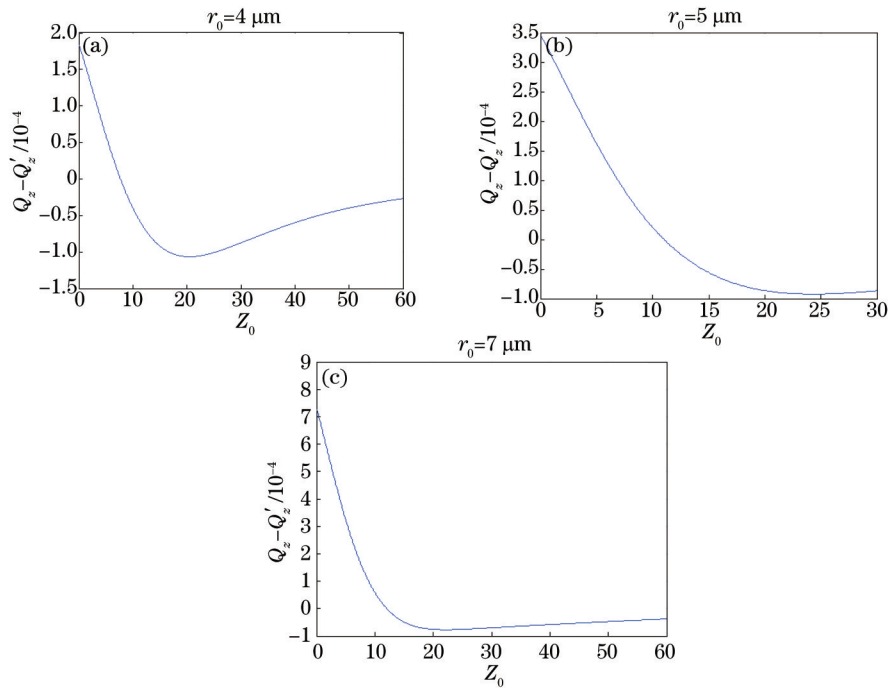


图6 (19)式的计算误差

Fig.6 Calculating error of Equ.(19)

4 分析讨论

通过3.1节的分析发现,在一定范围以内,可以对 θ_{\max} 取近似值,下面就对这个范围进行计算。

在折射率为 n_1 的介质中,高斯光束的半发散角表示为 $\theta_{\text{beam}} = \lambda_0 / (n_1 \omega_0) = 0.147 \text{ rad} = 8.45^\circ$,在计算光阱力时,只有保证微球淹没在光束之中,入射角的最大值 α_{\max} 才能等于 $\pi/2$, θ_{\max} 的求解条件才能成立。设微球与光纤的距离表示为 Δz ,在极限条件下,假设光束最外面的光线刚好与微球相切,则此时 $\Delta z_{\text{lim}} = r_0 / \sin(\theta_{\text{beam}}) = 34 \mu\text{m}$,变换成归一化形式即 $\Delta Z_{\text{lim}} = \Delta z_{\text{lim}} / \omega_0 = 6.8$ 。通过观察3节中的曲线图可以看出,无论是对 θ_{\max} 的近似还是对 α_i 与 γ 的近似,当满足 $6.8 < Z_0 < S - 6.8$ 的条件时,取近似值所作的曲线与直接计算得到的曲线十分接近,可以认为此时取近似值是合理的。 $\Delta z_{\text{lim}} = 34 \mu\text{m}$ 即本论文中给定参数下近似计算的临界值。这个临界值的一般化表示为

$$\delta = \frac{r_0}{\sin(\lambda_0 / n_1 \omega_0)} \quad (20)$$

当 $\Delta z > \delta$ 时,对光阱力的计算过程可采取3.1节及3.2节中的近似。可以看出, δ 是由微球半径、激光波长、介质折射率以及光束束腰半径共同决定的。因此具体到计算时,可先根据实验参数求出 δ 值,在满足近似条件的情况下采用本论文中所给出的近似计算方法。由于在实际进行光学捕获时微球一般位于光阱的中间位置,距离光纤端面较远,因此第3节给出的近似是具有普遍应用价值的。但是对于希望获取微球在光阱中每个位置的完整的受力情况以及不规则微球的受力情况不适用,还需发展新的计算方法。

5 结论

提出了光纤光阱力计算中几个近似方法以及适用条件。仿真结果表明,当光阱中的微球与光纤端面距离大于某一值 δ 时,可以对光束在微球表面的入射角、入射点的方位角等角度参量进行近似,从而在一定程度上简化计算过程。经过理论分析,得出了 δ 与微球半径、激光波长、介质折射率及光束束腰半径有关的结论。这对完善光阱力理论模型,促进光镊技术的发展是十分有意义的。下一步考虑建立更合适的坐标系,进一步简化空间几何运算,并将光镊结构拓展到两捕获激光夹角可变的情况。

参考文献

- 1 Keir C Neuman, Steven M Block. Optical trapping[J]. Review of Scientific Instruments, 2004, 75(9): 2787-2809.
- 2 A Constable, Jinha Kim, J Mervis, *et al.*. Demonstration of a fiber-optical light-force trap[J]. Opt Lett, 1993, 18(21): 1867-1869.
- 3 D Bonessi, K Bonin, T Walker. Optical forces on particles of arbitrary shape and size[J]. J Opt A Pure Appl Opt, 2007, 9(8): S228-S234.
- 4 Erkin Sidick, Scott D Collins, Andre Knoesen. Trapping forces in a multiple-beam fiber-optic trap[J]. Appl Opt, 1997, 36(25): 6423-6433.
- 5 Zhou Jinhua. Theoretical Model of Optical Tweezers and Manipulation of Nanoparticles[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2010. 4-5.
周金华. 光镊的理论模型及纳米颗粒的操纵[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2010. 4-5.
- 6 E Aspnes, T D Milster, K Visscher. Optical force model based on sequential ray tracing[J]. Appl Opt, 2008, 48(9): 1642-1650.
- 7 A Ashkin. Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime[J]. Biophys, 1992, 61(2): 569-582.
- 8 G Roosen, A theoretical and experimental study of the stable equilibrium positions of spheres levitated by two horizontal laser beams[J]. Opt Commun, 1977, 21(1): 189-194.