

# 奇异值方法在大口径反射镜面形分析中的应用

安其昌<sup>1,2</sup> 张景旭<sup>1</sup> 杨飞<sup>1</sup>

<sup>1</sup>中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033

<sup>2</sup>中国科学院大学, 北京 100049

**摘要** 为了更好地分析大口径反射镜的面形,引入奇异值方法来分析系统的重力印透造成的大尺度起伏以及由磨削加工、测量噪声等因素造成的中高频误差。首先对奇异值分解的基本方法以及在反射镜表面评价中的具体应用方法进行了研究;之后利用数值仿真,验证了奇异值分解应用在反射镜表面分析中的可行性;最后,将提出的方法应用在实际的反射镜镜面评价之中,得到系统去除高频误差后的结果。所提出的方法对于低信噪比的大口径反射系统面形评价有较好的指导作用。

**关键词** 测量; 奇异值; 中频误差; 大口径反射镜; 面形评价

**中图分类号** TH751 **文献标志码** A **doi**: 10.3788/LOP51.081204

## Large Aperture Reflection Mirror Figure Analysis with Singular Value

An Qichang<sup>1,2</sup> Zhang Jingxu<sup>1</sup> Yang Fei<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun, Jilin 130033, China

<sup>2</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** We introduce a singular value method to evaluate the mid- and high-frequency error in the large aperture reflecting mirror figure due to gravity print through and noise from processing and measurement. Firstly, we study the singular value method applied to mirror figure evaluation. Then, the feasibility that the singular value method can be applied to the reflecting mirror figure is verified by numerical simulation. Finally, the proposed method is applied to actual evaluation of the reflecting mirror figure, and the results with high-frequency error in the system eliminated are obtained. The proposed method may help evaluate the large aperture reflecting mirror figure with lower signal to noise ratio.

**Key words** measurement; singular value; mid-frequency error; large aperture reflecting mirror; mirror figure evaluate

**OSIC codes** 120.4640; 120.4610; 120.4800; 120.5050

## 1 引言

随着光电子技术的不断发展,大口径光电系统在激光通信、天文光学、空间光学、地基空间目标探测与识别等高新技术领域得到了越来越广泛的应用,其表面面形的检测与评价直接影响制造精度与成像质量<sup>[1-5]</sup>;如果可以按照不同的误差源将误差分离(如重力印透造成的起伏与磨削、测试造成的噪声),就可以对系统性能进行针对性的提高<sup>[6-10]</sup>。随着支撑与加工技术的进步,各种噪声的大小变得越来越接近,为了更好地对大口径反射镜进行调节与评价,需要引入一种合理的分离方法<sup>[11-17]</sup>。

利用奇异值分解滤波是信号处理中对于小信噪比的信号进行信息提取的方法。其基本原理为:将测量

收稿日期: 2014-02-14; 收到修改稿日期: 2014-03-19; 网络出版日期: 2014-06-28

基金项目: 中国科学院三期重大科研专项

作者简介: 安其昌(1988—),男,硕士研究生,主要从事空间机构学方面的研究。E-mail: anjj@mail.ustc.edu.cn

导师简介: 张景旭(1964—),男,博士,研究员,主要从事大型光电望远镜结构总体技术方面的研究。

E-mail: zhangjx@ciomp.ac.cn

本文电子版彩色效果请详见中国光学期刊网 www.opticsjournal.net

得到的信号映射到多维矩阵空间中得到信号多相空间轨道矩阵;之后对其进行奇异值分解,将噪声项滤去;利用奇异值分解的逆过程将滤波后的奇异值矩阵还原,得到缺秩空间中对于空间轨道矩阵的最佳估计。最后,由于多维矩阵空间映射为双射,故可以得到与原来信号等维的滤波后的信号。

将奇异值分解的方法引入大口径反射镜面形的评价之中,将大口径面形数据作为一个随机过程来分析,利用奇异值滤波之后,可以得到系统由于重力印透等原因所造成的低频误差;在支撑可以调节的系统中,可以根据该方法得到的结果对调节进行指导,在被动支撑的系统中,可以根据计算结果在系统出瞳处利用补偿光学元件进行补偿。

本文将反射镜表面数据重新排列为一维向量并作为一个随机过程,利用数值仿真,对添加了50%幅值噪声(信噪比为2)的正弦波前进行了奇异值滤波,验证了奇异值分解的可行性。将该方法应用在实际的反射镜镜面数据之中,得到系统去除高频误差后的结果,其均方根值(RMS)大约为原始波前的80%,应在此基础上对其支撑调节作用进行评价。提出的方法对于低信噪比的大口径反射系统面形评价有较好的指导作用。

## 2 基本推导

奇异值分解是线性代数中一种重要的工具,在信号处理、数理统计中都有重要的应用。

设 $A$ 为 $m \times n$ 阶复矩阵, $A'A$ 的 $n$ 个特征值的算术平方根 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ,称为矩阵的奇异值。必定存在 $m$ 阶酉矩阵 $U$ 与 $n$ 阶酉矩阵 $V$ ,使得 $A = USV'$ ,其中 $S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , $V'$ 为 $V$ 的共轭转置。

对于 $n \times n$ 的实矩阵 $J$ ,必定存在 $n$ 阶正交阵 $P$ 和 $Q$ ,使 $A = PSQ^T$ 。

假设某个随机序列 $x(t), t = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ,将测量得到的信号映射到多维矩阵空间中去得到信号多相空间轨道矩阵 $D_m$ 为

$$D_m = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \cdots & x(n) \\ x(2) & x(3) & \cdots & x(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(n) & x(n+1) & \cdots & x(2n+1) \end{bmatrix}$$

之后对其进行奇异值分解,并将其噪声项滤去;

$$D_m = PSQ^T = P \begin{bmatrix} S_s & 0 \\ 0 & S_n \end{bmatrix} Q^T, \quad (1)$$

式中 $S_s, S_n$ 分别为实际信号与噪声信号所对应奇异值,在某种显著性准则之下,可以将噪声项确定并将其置零得到缺秩空间多相空间轨道矩阵 $\hat{D}_m$ 为

$$\hat{D}_m = P \begin{bmatrix} S_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T.$$

具体来说,定义信号奇异熵

$$E_k = \sum_{i=1}^k \Delta E_i,$$

式中 $\Delta E_i = -\left[ \frac{\sigma_i}{\text{tr}(S)} \right] \ln \left[ \frac{\sigma_i}{\text{tr}(S)} \right]$ , $\text{tr}(S)$ 表示矩阵 $S$ 的秩,利用统计学上的假设检验方法,在使用不同阶次拟合时,将奇异熵显著下降作为假设条件,在一定置信概率下,结合 $F$ 分布,可以得到检验结果。在一般情况下,可以根据最大值设置阈值进行简单的判断。

利用奇异值分解的逆过程将滤波后的奇异值矩阵还原,得到对于空间轨道矩阵的最佳估计。由于多维矩阵空间映射为双射,故可以得到与原来信号等维的滤波后的信号为

$$x'(k) = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{i=\alpha}^{\beta} \hat{D}_m(i, k - i + 1), \quad (2)$$

式中 $\alpha = \max(1, k - n + 1), \beta = \min(n, k)$ 。

## 3 数值仿真

本文方法对于正弦时域信号的处理效果如图1所示,图中的原始信号RMS值为0.70,附加白噪声的

RMS 值为 0.50, 输入信号的 RMS 值为 0.84, 取奇异值阈值为 0.2, 即小于最大奇异值的 20% 的信号都认为是由噪声引入, 并将其置零; 利用奇异值分解的逆过程将滤波后的奇异值矩阵还原, 进而得到与原来信号等维的滤波后的信号; 经过本文方法处理后得到输出信号 RMS 值为 0.72, 与原始值相差 5% 以内。在一般情况下, 尤其是白噪声污染的情况下, 由于噪声代入的奇异值比较接近, 使用阈值法就可以较好地实现滤波; 对于粉红噪声等有色噪声情况, 使用假设检验的方法比较理想。

设有随机过程  $\{X(t), t \in T\}$ , 对于任一  $t \in T$ ,  $X(t)$  的一阶矩  $E[X(t)]$  及二阶矩  $E[X^2(t)]$  都存在, 则称  $\{X(t), t \in T\}$  为二阶矩过程。

一般情况下, 考虑到没有发生破坏时, 利用光学仪器测得大口径望远镜的实际测量系统波前误差  $W(x, y)$  不可能出现能量无限的情况, 即一阶矩及二阶矩一定存在, 故由反射镜表面波像差组成的随机序列为二阶矩过程, 可以进行常规的求矩与分解过程。

标准正弦多项式是在系统谐波分析中较为常见的基底。为了简便起见, 对于无量纲反射镜表面波像差  $W(x, y)$  采用一定数量的正弦基底多项式进行拟合。假设下文中所有波像差的期望为零, 期望非零的情况可以通过时域平移或者频域滤掉直流分量的方法化归为期望为零的情况。

对于标准正弦多项式,

$$\Phi = A \sin(2\pi fx), \quad (3)$$

式中  $f$  为空间频率,  $x$  为空间坐标。  $\Phi$  的 RMS 值  $A/\sqrt{2}$  为定值, 其波前误差如图 2 所示。

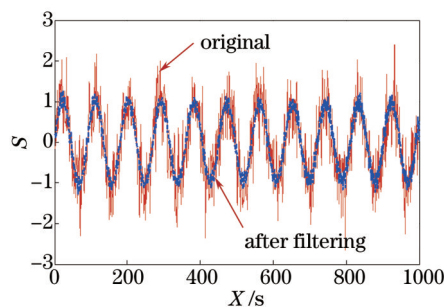


图 1 正弦信号时域图

Fig1 Sine signal in time domain

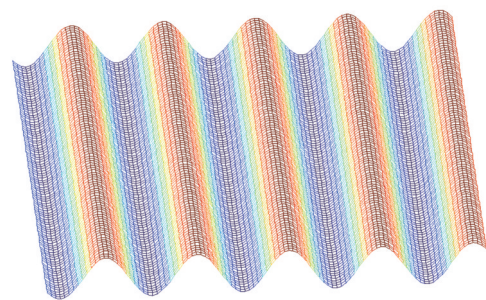


图 2 正弦波前误差

Fig2 Sine wavefront error

仿照一维情况, 将二维波前重排为一维随机过程, 系统波前 RMS 值为 0.70, 同样附加白噪声的 RMS 值为 0.50, 如图 3 所示。奇异值阈值取为 0.2。得到处理效果如图 3 和图 4 所示。

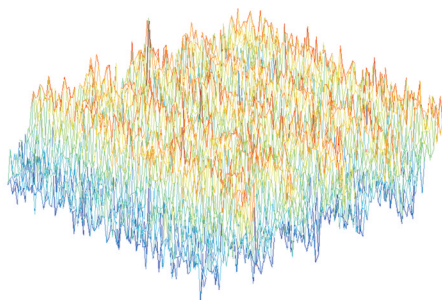


图 3 带噪声的正弦波前误差

Fig.3 Sine wavefront error with noise

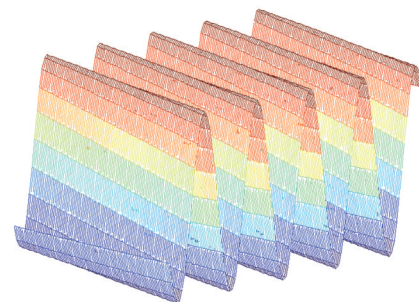


图 4 还原后的正弦波前误差

Fig.4 Sine wavefront error after calculation

通过以上仿真验证可知, 当系统的信噪比较低时, 一般较难判断出镜面实际的起伏情况。通过该方法, 可以对大口径反射镜镜面支撑的调节提供指导, 对系统装调有很好的指导意义; 同时, 选择不同的截断阈值进行滤波, 可以在系统切削加工的不同阶段对于镜面不同层次的起伏进行控制。

另一方面, 该方法也可以用于子孔径拼接之前的预处理工作。子孔径拼接技术是一种以低成本、高分辨率检测大口径光学元件的有效手段<sup>[18-21]</sup>。当被测平面光学元件尺寸超过干涉仪口径, 或者检测非球面所产生的干涉条纹密度大于 CCD 空间分辨率, 利用小口径干涉仪每次仅检测整个光学元件的一部分区域(子

孔径),待完成全孔径测量后,再使用适当的算法“拼接”就可得到全孔径面形信息。尽量真实完整地获得重叠区域信息是其预处理的核心,利用该方法可以得到更加真实的系统波像差,从而更好地进行拼接操作。

## 4 实验验证

使用4D公司生产的干涉仪作为波前探测元件,其原理不同于使用菲索原理测量的干涉仪,而是利用可以分离四个相位的衍波板,做到多像素(500 pixel×500 pixel)、大视场、快速测量。将本文方法应用在某精磨反射镜100 mm×100 mm的方形子孔径之中。

首先将数据重新排列为二维随机序列,利用前述方法得到其信号多相空间轨道矩阵 $D_m$ 。进行奇异值分解之后,得到波前数据的奇异值。取奇异值阈值为0.2,即小于最大奇异值的20%的信号都认为是由噪声所引入。利用(2)式将得到的修正多相空间轨道矩阵进行映射得到经过滤波的波前序列。之后通过重排,得到处理后的波前。

如图5和图6所示,原图中的红色部分由于噪声的影响,几乎连为一体,给实际加工与装调带来困难。实际测得的波前RMS值为0.0054个波长,而经过本文方法处理之后的RMS值为0.0042个波长,信噪比约为4。由于支撑所带来的影响与加工以及检测所造成的影响较为接近,如果不使用该方法将很难分辨。

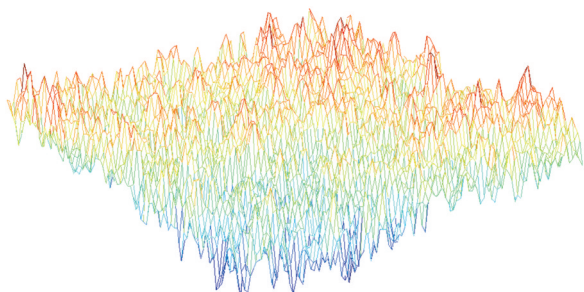


图5 原始波前误差

Fig.5 Original wavefront error

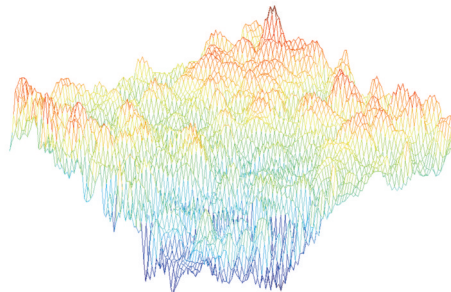


图6 还原后的波前误差

Fig.6 Wavefront error after calculation

对于不同层次的加工、检测与装调,需要得到的误差特性也是不同的。一方面,在器件的粗磨工序中,利用这一方法可以得到系统的低阶真实起伏情况,排除其他干扰;另一方面,在系统的装调过程中,由于调节机构的校正带宽有限,不考虑高阶的面形,对于工作的完成是也有积极意义的。由于检测与磨削造成的高阶误差需要进行大量的测量,根据服从的统计规律进行分析。

考虑子孔径拼接的问题时,原则上不同子孔径之间的可调节量只有三个刚体位移自由度,重叠区域的测量误差越小,其精度也会越高。利用这种方法,可以获得更加真实的波前,有助于提高拼接精度的提高。

## 5 结论

将奇异值分解在反射镜表面评价中,利用数值仿真与实验分析,验证了奇异值分解应用在反射镜表面分析中的可行性。利用这种方法可以得到系统去除高频误差后的结果以及残差(即噪声项),为后续的分析提供重要的指导。由于这种方法的核心是多相空间轨道矩阵 $D_m$ 的奇异值分解,故在大数据量的情况下,对于计算机要求较高,如何提高计算的效率将是下一步研究的重点;另一方面,如何利用该方法提高子孔径拼接的精度,也是下一步工作需要研究的内容。

## 参考文献

- 1 Sun Hang, Zhang Haibo, Cao Lihua, *et al.*. Error compensation for primary mirror shaking of large aperture optical detection equipment[J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(1): 85-91.  
孙 航, 张海波, 曹立华, 等. 大口径光电探测设备主镜晃动的误差补偿[J]. 光学 精密工程, 2014, 22(1): 85-91.
- 2 Wang Jing, Wang Zhengfang, Sui Qingmei, *et al.*. Study of FBG strain distribution reconstruction based on improved genetic algorithm dual constraint[J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(3): 0305004.  
王 静, 王正方, 隋青美, 等. 基于改进遗传算法双重约束的FBG应变分布重构研究[J]. 中国激光, 2012, 39(3): 0305004.
- 3 Wang Fuguo, Yang Fei, Zhao Hongchao, *et al.*. Progress in TMT M3 System[J]. Chinese Optics, 2013, 10(6): 643-651.

- 王富国, 杨 飞, 赵宏超, 等. TMT望远镜三镜系统的研究进展[J]. 中国光学, 2013, 10(6): 643-651.
- 4 Wang Xiaokun. Fabrication and testing of large aperture off-axis SiC aspheric mirror[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(1): 011201.
- 王孝坤. 大口径离轴碳化硅非球面反射镜加工与检测技术研究[J]. 激光与光电子学进展, 2012, 49(1): 011201.
- 5 Bi Yong, Zhai Jia, Wu Jinhua, *et al.*. One method for mirror surface figure treatment in optical instrument[J]. Optical Technique, 2009, 35(1): 10-17.
- 毕 勇, 翟 嘉, 吴金虎, 等. 一种光学仪器镜面面形的处理方法[J]. 光学技术, 2009, 35(1): 10-17.
- 6 Ni Mingyang, Gong Yan. Design and analysis of kinematic lens positioning structure in lithographic projection objective [J]. Chinese Optics, 2012, 5(5): 476-483.
- 倪明阳, 巩 岩. 光刻投影物镜光学元件运动学支撑结构的设计与分析[J]. 中国光学, 2012, 5(5): 476-483.
- 7 Shao Liang, Yang Fei, Wang Fuguo, *et al.*. Design and optimization of supporting system for 1.2 m lightweight SiC primary mirror[J]. Chinese Optics, 2012, 5(3): 229-234.
- 邵 亮, 杨 飞, 王富国, 等. 1.2 m轻量化SiC主镜支撑系统优化设计[J]. 中国光学, 2012, 5(3): 229-234.
- 8 Lin Xudong, Xue Chen, Liu Xinyue, *et al.*. Current status and research development of wave front correctors for adaptive telescope[J]. Chinese Optics, 2012, 5(6): 337-351.
- 林旭东, 薛 陈, 刘欣悦, 等. 自适应光学波前矫正器技术发展现状[J]. 中国光学, 2012, 5(6): 337-351.
- 9 Xu Xinhang, Gao Yunguo, Yang Hongbo, *et al.*. Large-diameter fast steering mirror on rigid support technology for dynamic platform[J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(1): 117-124.
- 徐新行, 高云国, 杨洪波, 等. 车载大口径刚性支撑式快速反射镜[J]. 光学精密工程, 2014, 22(1): 117-124.
- 10 Wolfgang Dierking. RMS slope of exponentially correlated surface roughness for radar applications[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2000, 38(3): 1451-1454.
- 11 Ross Zhelem. Specification of optical surface accuracy using the structure function[C]. SPIE, 2011, 8083: 808310.
- 12 Wang Qingfeng, Cheng Dewen, Wang Yongtian. Description of free-form optical curved surface using two-variable orthogonal polynomials[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(9): 0922002.
- 王庆丰, 程德文, 王涌天. 双变量正交多项式描述光学自由曲面[J]. 光学学报, 2012, 32(9): 0922002.
- 13 Zhu Shuo, Zhang Xiaohui. Application of error detaching to Ritchey-Common test for flat mirrors[J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(1): 7-12.
- 朱 硕, 张晓辉. 误差分离技术在平面镜瑞奇-康芒法检测中的应用[J]. 光学精密工程, 2014, 22(1): 7-12.
- 14 Zhu Meng, Li Xiangyu, Long Ningbo, *et al.*. Double-slit based carrier frequency speckle interferometric system with large viewing field[J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(1): 13-17.
- 朱 猛, 李翔宇, 龙宁波, 等. 大视场双缝载频散斑干涉成像检测系统[J]. 光学精密工程, 2014, 22(1): 13-17.
- 15 Sun Hui. Target localization and error analysis of airborne electro-optical platform[J]. Chinese Optics, 2013, 6(6): 912-918.
- 孙 辉. 机载光电平台目标定位与误差分析[J]. 中国光学, 2013, 6(6): 912-918.
- 16 Liu Bingqiang, Zhang Fan, Li Jinglin, *et al.*. Analysis of synchronous motion error for focusing mechanism of space camera[J]. Chinese Optics, 2013, 6(6): 946-951.
- 刘炳强, 张 帆, 李景林, 等. 空间相机调焦机构运动同步性误差分析[J]. 中国光学, 2013, 6(6): 946-951.
- 17 Shi Xiaoyu, Feng Yong, Chen Ying. A novel predictive controller in the adaptive optics control system based on parallelization method[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(8): 0801005.
- 史晓雨, 冯 勇, 陈 颖. 一种基于并行化方法的自适应光学闭环预测控制器[J]. 光学学报, 2012, 32(8): 0801005.
- 18 Wang Dong, Yang Hongbo, Chen Changzheng. Computer simulation of the optical surface[J]. Computer Simulation, 2007, 24(2): 298-301.
- 王 栋, 杨洪波, 陈长征. 光学表面面形的计算机仿真[J]. 计算机仿真, 2007, 24(2): 298-301.
- 19 Zhang Wei, Liu Jianfeng, Long Funian, *et al.*. Study on wavefront fitting using Zernike polynomials[J]. Optical Technique, 2005, 31(5): 675-678.
- 张 伟, 刘剑峰, 龙夫年, 等. 基于Zernike多项式进行波面拟合研究[J]. 光学技术, 2005, 31(5): 675-678.
- 20 Lin Xudong, Liu Xinyue, Wang Jianli, *et al.*. Performance test and experiment of correction capability of 137-element deformable mirror[J]. Optics and Precision Engineering, 2013, 21(2): 267-273.
- 林旭东, 刘欣悦, 王建立, 等. 137单元变形镜的性能测试即校正能力实验[J]. 光学精密工程, 2013, 21(2): 267-273.
- 21 Zhang Jingxu. Overview of structure of technologies of large aperture ground based telescope[J]. Chinese Optics, 2012, 5(4): 327-336.
- 张景旭. 地基大口径望远镜系统结构技术综述[J]. 中国光学, 2012, 5(4): 327-336.