求解非线性薛定谔方程的几种方法

员保云　庞　晶

内蒙古工业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特 010051

摘要　近年来,用光孤子传输信息的光纤通信系统在长距离、大容量传输方面凸显了自身的优势,必将在新一代通信技术与商用上发挥巨大的作用。光孤子在光纤中的传输满足非线性薛定谔方程。从寻求行波变换、求解过程和解的物理意义等方面,对于求解非线性薛定谔方程常用的三种求解方法即Jacobi椭圆函数展开法、三角函数假设法和试探函数法进行了分析整理及优劣比较,并引入了新近提出的(G'/G)展开法。计算表明,(G'/G)展开法在行波变换和计算过程都相对其他三种方法简单,且得到的解也较为丰富,因此,该展开法在非线性薛定谔方程及相关方程的求解中具有广阔的应用前景。

关键词　光纤光学; Jacobi椭圆函数展开法; 三角函数假设法; 试探函数法; (G'/G)展开法; 非线性薛定谔方程

中图分类号　O175.29　　**文献标识码**　A　　**doi:** 10.3788/LOP51.040604

Several Methods for Solving Nonlinear Schrödinger Equation

Yuan Baoyun　Pang Jing

College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot, Inner Mongolia 010051, *China*

Abstract　In recent years, the fiber optical communication system that uses optical soliton to transmit information has shown its advantages in long transmission distance and large capacity. It will play a great role in the new generation of communication and business. The transmission of optical soliton in optical fiber obeys the nonlinear Schrödinger equation. In this paper, three commonly used methods for solving nonlinear Schrödinger equation, i.e., Jacobi elliptic function expansion method, trigonometric function assumption, and trial function method, are analyzed and compared from the aspects of seeking traveling wave transformation, solving process and physical significance of solution, and so on. Moreover, we introduce the newly proposed (G'/G) expansion method. Calculation shows that (G'/G) expansion method is easier than the other three methods in traveling wave transformation and calculation process. Besides, it also has relatively rich solutions. Therefore, this expansion method solving the nonlinear Schrödinger equation and the related equations has a wide application prospect.

Key words　fiber optics; Jacobi elliptic function expansion method; trigonometric function assumption; trial function method; (G′/G) expansion method; nonlinear Schrödinger equation

OCIS codes　060.2330; 060.4370; 290.5850

1 引　言

非线性薛定谔(NLS)方程是在光纤无损耗的特殊条件下得到的一种应用广泛的非线性偏微分方程[1]。近年来,光孤立子在通信中的应用研究[2]引起了工业界和学术界的高度重视,而NLS方程具备了通信的高码率、长距离和大容量等优点,成为描述光纤中的光孤立子的主要方程之一[3]。同时,非线性薛定谔方程还可以用来讨论单色波的一维自调适、非线性光学的自陷现象、固体中的热脉冲传播、等离子体中的Langnui波、超导电子在电磁场中运动以及激光中原子的Bose-Einstein凝聚效应等,因此,对该方程的精确解的研究具有很重要的物理意义。

然而NLS方程是涉及到复数范围的非线性方程[4-5],这给求解带来了诸多困难。学者们已提出了一些求

收稿日期: 2013-11-26; **收到修改稿日期**: 2013-12-02; **网络出版日期**: 2014-03-11

基金项目: 国家自然科学基金(11071159)、内蒙古自然科学基金(2010MS0115)

作者简介: 员保云(1986—),女,硕士研究生,主要从事非线性方程的孤子解方面的研究。E-mail: 285910572@qq.com

导师简介: 庞　晶(1963—),男,博士,教授,主要从事孤立子与可积系统理论等方面的研究。E-mail: pang_j@imut.edu.cn

解方法，如直接积分法、反演散射方法、Jacobi椭圆函数展开法[6]、修正的Jacobi椭圆函数展开法、三角函数假设法[8]、黎卡提投影方程映射法、试探函数法[9-11]等。本文以薛定谔方程为例，首先介绍了三种常用的非线性发展方程的求解方法，然后使用新近提出的(G'/G)展开法[12-15]获得了NLS方程的行波解。通过比较，认为(G'/G)展开法将在NLS方程及相关方程的求解中有广阔的应用前景。

2 常用的三种行波变换求解方法

本文讨论的低阶NLS方程写作

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0\,, \tag{1}$$

式中 α 和 β 分别为频散系数和朗道系数。

下面先介绍常用的行波变换求解方法，即Jacobi椭圆函数展开法、三角函数假设法和试探函数法。

2.1 Jacobi椭圆函数展开法

该方法的基本思想是：通过行波变换

$$u=\varphi(\xi)\exp[\mathrm{i}(\kappa x-\omega t)],\ \xi=p(x-c_{\mathrm{g}}t)\,, \tag{2}$$

和约束条件 $2\alpha k=c_{\mathrm{g}}$，即 $k=\frac{c_{\mathrm{g}}}{2\alpha}=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial k}$（这就是色散关系[4]），(1)式转化为常微分方程，将常微分方程的振幅解表示为 $\mathrm{sn}\,\xi$，$\mathrm{cn}\,\xi$，$\mathrm{dn}\,\xi$和$\mathrm{cs}\,\xi$ 的多项式形式的解。把形式解代入常微分方程，并利用Jacobi椭圆函数的性质[4]，求解可得对应的包络周期解。其解如下[7]：

$$u_1=\pm m\sqrt{\frac{2\gamma}{(1+m^2)\beta}}\,\mathrm{sn}\sqrt{-\frac{\gamma}{(1+m^2)\alpha}}(x-ct)\exp[\mathrm{i}(\kappa x-\omega t)]\,, \tag{3}$$

$$u_2=\pm m\sqrt{\frac{2\gamma}{(2m^2-1)\beta}}\,\mathrm{cn}\sqrt{\frac{\gamma}{(2m^2-1)\alpha}}(x-ct)\exp[\mathrm{i}(\kappa x-\omega t)]\,, \tag{4}$$

$$u_3=\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{(2-m^2)\beta}}\,\mathrm{dn}\sqrt{\frac{\gamma}{(2-m^2)\alpha}}(x-ct)\exp[\mathrm{i}(\kappa x-\omega t)]\,, \tag{5}$$

$$u_4=\pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{(2-m^2)\beta}}\,\mathrm{cs}\sqrt{\frac{\gamma}{(2-m^2)\alpha}}(x-ct)\exp[\mathrm{i}(\kappa x-\omega t)]\,. \tag{6}$$

当模数 m 取1时，包络周期解退化为相应的包络冲击波解或包络孤立波解，其解如下：

$$u_5=\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\tan h\sqrt{-\frac{\gamma}{2\alpha}}(x-ct)\exp[\mathrm{i}(\kappa x-\omega t)]\,, \tag{7}$$

$$u_6=\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\sec h\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(x-ct)\exp[\mathrm{i}(\kappa x-\omega t)]\,, \tag{8}$$

$$u_7=\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\sec h\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(x-ct)\exp[\mathrm{i}(\kappa x-\omega t)]\,, \tag{9}$$

$$u_8=\pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{\beta}}\csc h\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(x-ct)\exp[\mathrm{i}(\kappa x-\omega t)]\,. \tag{10}$$

2.2 三角函数假设法

该方法的基本思想是：通过引入行波变换

$$u=\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{\omega}{2}\mathrm{i}(\frac{x}{\alpha}-mt)\right],\xi=x+\omega t\ , \tag{11}$$

直接将(1)式转化为常微分方程。假设常微分方程振幅解形式为[8]

$$\varphi(\xi)=g_0+\sum_{i=1}^{n}\left[g_i\sin z(\xi)+f_i\cos z(\xi)\right], \tag{12}$$

且满足

$$\frac{\mathrm{d}z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=a\sin z(\xi)+b\cos z(\xi)+c\,, \tag{13}$$

将(12)、(13)式代入常微分方程，由于给出了辅助方程 $\sin z(\xi)$和 $\cos z(\xi)$ 的多种形式的解，所以可以构造薛定谔方程的若干精确孤立波解。当 $\sin z(\xi)$和 $\cos z(\xi)$ 取如下解时，

$$\cos z(\xi)=\frac{(b-c)^2-\left[a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}\coth(\sqrt{a^2+b^2-c^2}/2)\xi\right]^2}{(b-c)^2+a+\left[\sqrt{a^2+b^2-c^2}\coth(\sqrt{a^2+b^2-c^2}/2)\xi\right]^2}, \tag{14}$$

$$\sin z(\xi)=\frac{2(b-c)\left[a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}\coth(\sqrt{a^2+b^2-c^2}/2)\xi\right]}{(b-c)^2+\left[a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}\coth(\sqrt{a^2+b^2-c^2}/2)\xi\right]^2}, \tag{15}$$

可得(1)式的如下孤立波解

$$u_1=\frac{\sqrt{2\alpha}\,b}{\sqrt{\beta}}\operatorname{sech}[2b(x+\omega t)]\exp\left[b^2\alpha it-\frac{i\omega(2x+\omega t)}{4\alpha}\right],$$

$$u_2=-\frac{\sqrt{2\alpha}\,bi[1+\sqrt{2}\tanh 2\sqrt{2}\,b(x+\omega t)]}{\sqrt{\beta}[\sqrt{2}\pm\tanh 2\sqrt{2}\,b(x+\omega t)]}\exp\left[-4b^2\alpha it-\frac{i\omega(2x+\omega t)}{4\alpha}\right],$$

$$u_3=\frac{\sqrt{2\alpha}\,bi[1\mp\sqrt{2}\tanh 2\sqrt{2}\,b(x+\omega t)]}{\sqrt{\beta}[\sqrt{2}\mp\tanh 2\sqrt{2}\,b(x+\omega t)]}\exp\left[-4b^2\alpha it-\frac{i\omega(2x+\omega t)}{4\alpha}\right],$$

$$u_4=\pm\frac{\sqrt{2\alpha}\,bi\coth b(x+\omega t)}{\sqrt{\beta}[1\pm\coth b(x+\omega t)]^2}\exp\left[-2b^2\alpha it-\frac{i\omega(2x+\omega t)}{4\alpha}\right],$$

$$u_5=\mp\frac{\sqrt{2\alpha}\,bi\coth b(x+\omega t)}{\sqrt{\beta}[1\pm\coth b(x+\omega t)]^2}\exp\left[-2b^2\alpha it-\frac{i\omega(2x+\omega t)}{4\alpha}\right],$$

$$u_6=\frac{\pm\sqrt{2\alpha}\,b\,(a^2+b^2)\operatorname{sech}2\sqrt{a^2+b^2}(x+\omega t)\exp\left[i(a^2+b^2)\alpha t-i\omega(2x+\omega t)/4\alpha\right]}{\sqrt{\beta}[(a^2+b^2)+a\sqrt{a^2+b^2}\tanh 2\sqrt{a^2+b^2}(x+\omega t)]}$$

$$u_7=\pm\exp\left[-2(a^2+b^2)\alpha it-\frac{i\omega(2x+\omega t)}{4\alpha}\right]\frac{\sqrt{2\alpha}(a^2+b^2)\,i[a+2\sqrt{a^2+b^2}\coth\sqrt{a^2+b^2}(x+\omega t)+a\coth^2\sqrt{a^2+b^2}(x+\omega t)]}{\sqrt{\beta}[a^2+b^2+2a\sqrt{a^2+b^2}\coth\sqrt{a^2+b^2}(x+\omega t)+(a^2+b^2)\coth^2\sqrt{a^2+b^2}(x+\omega t)]}.$$

2.3 试探函数法

该方法的基本思想是：通过引入变换和选准试探函数[9]，

$$\begin{cases}u=\exp[i(px+qt)](u_0+v_y)\\ v=a\ln(b+y^2)\\ y=\exp(kx-wt)\end{cases}, \tag{16}$$

将难于求解的非线性偏微分方程化为易于求解的代数方程，然后用待定系数法求出相对应的常数，从而求得薛定谔方程的指数函数解，

$$u=\pm\exp\left[i\frac{w}{2k\alpha}x+\frac{4k^4\alpha^2-w^2}{4k^2\alpha}t\right]\frac{2\sqrt{2k^2b\alpha/\beta}\exp(kx-wt)}{b+\exp[2(kx-wt)]}. \tag{17}$$

当 b 取不同的值时，可得到无穷多个不同的特解。

取 $b=1$，可得方程的孤波解为

$$u=\pm\exp\left[i\frac{w}{2k\alpha}x+\frac{4k^4\alpha^2-w^2}{4k^2\alpha}t\right]\sqrt{\frac{2k^2\alpha}{\beta}}\operatorname{sech}(kx-wt), \tag{18}$$

取 $b=-1$，可得方程的奇异行波解为

$$u=\pm\exp\left[i\frac{w}{2k\alpha}x+\frac{4k^4\alpha^2-w^2}{4k^2\alpha}t\right]\sqrt{-\frac{2k^2\alpha}{\beta}}\operatorname{csch}(kx-wt). \tag{19}$$

以上三种方法，在寻求行波变换的过程中，Jacobi椭圆函数展开法比其他两种方法容易；在方程求解过程中，试探函数法[10-11]求解思路简单，计算量明显小；从物理意义的角度看，由于Jacobi椭圆函数展开法必须限定在 $2\alpha k=c_g$ 的条件下解才有意义，所以物理意义比较局限，相比较而言，试探函数法和三角函数假设法

的物理意义更具有普遍性。综上所述,试探函数法的优势较大,只要解决如何给每一类方程寻求合适的试探函数的问题,将会使方法更加完善。

3 (G'/G)展开法

给定非线性方程,为简单起见以两个自变量为例:

$$P(u,u_t,u_x,u_{xt},u_{tt},u_{xx},\cdots)=0 . \tag{20}$$

用(G'/G)展开法求(20)式的行波解,其基本步骤如下

设(20)式的行波变换为

$$u(x,t)=u(\xi),\ \xi=x-ct , \tag{21}$$

式中c为待定常数。将(21)式代入(20)式,则(20)式化为$u(\xi)$的常微分方程:

$$Q(u,u',u'',\cdots)=0 . \tag{22}$$

设$u(\xi)$可以表示为$(G'G)$的多项式

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i\left(\frac{G'}{G}\right)^i , \tag{23}$$

这里$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$为待定常整数,n通过齐次平衡原则(考虑非线性特点、色散和耗散的阶数因素,按照最高阶数可部分平衡的原则)确定。参照文献[16-17], $G(\xi)$满足下面的二阶线性常微分方程:

$$G''(\xi)+\lambda G(\xi)=0 . \tag{24}$$

把(23)式代入(22)式中并利用(24)式,可得到关于(G'/G)的多项式,令其系数为零后,得到关于$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$, c和λ的代数方程组。

求解上述代数方程组,把得到的$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$, c和λ的值代入(23)式,就可得到(20)式的精确行波解。

为求解(1)式,引入如下变换:

$$u=\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{\omega}{2}\mathrm{i}(\frac{x}{\alpha}-mt)\right],\ \xi=x+\omega t . \tag{25}$$

将(25)式代入(1)式,将其转化为常微分方程:

$$\alpha\varphi''-\left(\frac{\omega m}{2}+\frac{\omega^2}{4\alpha}\right)\varphi+\beta\varphi^3=0 . \tag{26}$$

通过(G'/G)展开法和齐次平衡原则,设(26)的解为

$$\varphi(\xi)=a_0+a_1\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}=a_0+a_1\phi(\xi) , \tag{27}$$

式中$G(\xi)$满足(24)式,而(24)式又可以化为

$$\phi'(\xi)=-\lambda-\phi(\xi)^2 . \tag{28}$$

将(27)式代入(26)式,并利用(28)式化简为关于$\phi(\xi)$的各幂次多项式,得到如下一组代数方程组

$$\begin{cases}\varphi(\xi)^3\colon 2a_1\alpha+a_1^3\beta=0\\ \varphi(\xi)^2\colon 3a_0a_1^2\beta=0\\ \varphi(\xi)^1\colon 2a_1\lambda\alpha-a_1\gamma+3a_0^2a_1\varphi=0\\ \varphi(\xi)^0\colon -a_0\gamma+a_0^3\beta=0\end{cases} . \tag{29}$$

从上式很容易求得

$$a_0=0\ ,\ a_1=\sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}\ (\ \alpha\beta<0\ ),\ m=\frac{8\lambda\alpha^2-\omega^2}{2\alpha\omega} . \tag{30}$$

把(30)、(27)式代入(25)式,可得(1)式的如下精确行波解:

当$\lambda>0$时,

$$u_1(\xi)=\sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}\frac{A_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,\xi)-A_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,\xi)}{A_1\cos(\sqrt{\lambda}\,\xi)+A_2\sin(\sqrt{\lambda}\,\xi)}\exp\left[-\frac{\omega}{2}\mathrm{i}\left(\frac{x}{\alpha}-mt\right)\right], \tag{31}$$

当$\lambda<0$时,

$$u_2(\xi)=\sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}\frac{A_1\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\,\xi)+A_2\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\,\xi)}{A_1\cosh(\sqrt{-\lambda}\,\xi)+A_2\sinh(\sqrt{-\lambda}\,\xi)}\exp\left[-\frac{\omega}{2}\mathrm{i}\left(\frac{x}{\alpha}-mt\right)\right]. \tag{32}$$

至此,用(G'/G)展开法求解了(1)式,得到了新的分数型精确解,不同于Jacobi椭圆函数展开法的Jacobi椭圆函数解和试探函数法的指数函数解。虽然三角函数假设法也得到了分数型精确解,但是由于$\sin z(\xi)$和$\cos z(\xi)$取值的复杂性,其计算量是相当大的。本文假设了$G(\xi)$满足(24)式的二阶线性偏微分方程,由文献[13]可知用tanh函数法可求得与本文等价的tanh型的孤立波解,如果采用文献[18]中$G(\xi)$的辅助方程,将会得到不同类型的更加丰富的解。综上所述,(G'/G)展开法只是在选定某一特定辅助方程时,其解与tanh函数法是等价的。因此,采用(G'/G)展开法求解是必要的和有意义的。

4 结　论

Jacobi椭圆函数展开法限制了一个约束条件,三角函数假设法采用了一个特殊的行波变换,试探函数法寻求了合适的试探函数,解决了方程中的虚数单位i,从而成功求解了NLS方程,进一步揭示了基于行波解求解非线性发展方程的理论方法与技巧。用(G'/G)展开法求解了低阶非线性薛定谔方程,从求解过程和结果看,此方法计算简单有效。(G'/G)展开法对高阶非线性薛定谔方程和变系数非线性薛定谔方程的求解是否简易可行,将需要进一步的研究和探索。

参 考 文 献

1 Li Zhibin. Travelling Wave Solutions of Nonlinear Mathematical Physics Equation[M]. Beijing: Science Press, 2007. 13-14.
李志斌. 非线性数学物理方程的行波解[M]. 北京: 科学出版社, 2007. 13-14.

2 Liu Qing, Qin Yali, Li Jia, *et al.*. Intensity distribution of single soliton at focal plane in tight focusing system[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2013, 50(6): 061101.
柳　青, 覃亚丽, 李　伽, 等. 单孤子在深聚焦系统中焦平面上的强度分布[J]. 激光与光电子学进展, 2013, 50(6): 061101.

3 Guo Yucui. The Introduction of Nonlinear Partial Differential Equations[M]. Beijing: Tsinghua University press, 2008. 21-32.
郭玉翠. 非线性偏微分方程引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008. 21-32.

4 Ma Songhua, Fang Jianping. The nonpropagating light soliton and propagating light soliton for the simultaneous schrödinger equation[J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(6): 1090-1095.
马松华, 方建平. 联立薛定谔方程的不传播光孤子和传播光孤子[J]. 光学学报, 2007, 27(6): 1090-1095.

5 Jiefang Zhang, Chaoqing Dai. Bright and dark optical solitons in the nonlinear Schrödinger equation with fourth-order dispersion and cubic-quintic nonlinearity[J]. Chin Opt Lett, 2005, 3(5): 295-298.

6 Liu Shida, Fu Zuntao. The envelope periodic solutions to nonlinear wave equations with Jacobi elliptic function[J]. Acta Physica Sinica, 2002, 51(4): 718-722.
刘式达, 傅遵涛. 非线性波动方程的Jacobi椭圆函数包络周期解[J]. 物理学报, 2002, 51(4): 718-722.

7 Sun Meijuan, Shi Liangma, Han Xiulin. Solitary wave solutions for nonlinear Schrödinger equation[J]. College Physics, 2011, 30(12): 8-11.
孙梅娟, 史良马, 韩修林. 非线性薛定谔方程的孤波解[J]. 大学物理, 2011, 30(12): 8-11.

8 Taogetusang, Sirendaoerji. New exact solitary wave solutions to the NLS and variant boussinesq equations[J]. J Inner Mongolia Normal University, 2005, 34(4): 390-397.
套格图桑, 斯仁道尔吉. 非线性薛定谔方程和变形Boussinesq方程组的精确孤立波解[J]. 内蒙古师范大学学报, 2005, 34(4): 390-397.

9 Gao Xiuyun, Duan Wenshan. New exact solutions for nonlinear Schrödinger equation[J]. J Northwest Normal University, 2008, 44(1): 43-46.
高秀云, 段文山. 非线性薛定谔方程的新精确解[J]. 西北师范大学学报, 2008, 44(1): 43-46.

10 Guo Peng, Chen Zongguang, Sun Xiaowei. A simple method for solving nonlinear Schrödinger equation[J]. College Physics, 2010, 29(3): 12-13.
郭　鹏, 陈宗广, 孙小伟. 求解非线性薛定谔方程的简便方法[J]. 大学物理, 2010, 29(3): 12-13.

11 Yan Jiayu, Pan Liuxian, Lu Jing. A certain critical two- soliton solution of the nonlinear Schrödinger equation[J].

Chinese Physics, 2004, 13(4): 441-444.

12 Wang Mingliang, Li Xiangzheng, Zhang Jinliang. The (G'/G)- expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. Phys Lett A, 2008, 372(4): 417-423.

13 Xiao Yafeng, Xue Haili, Zhang Hongqing. A note on (G'/G) expansion method[J]. J Lanzhou University of Technology, 2011, 37(3): 164-166.

肖亚峰, 薛海丽, 张鸿庆. 关于 (G'/G) 展开法的注解[J]. 兰州理工大学学报, 2011, 37(3): 164-166.

14 Pang Jing, Jin Linghua, Ying Xiaomei. Solving generalized Burgers equation with variable coefficients by (G'/G) expansion method[J]. Chinese J Quantum Electronics, 2011, 28(6): 674-681.

庞 晶, 靳玲花, 应孝梅. 利用 (G'/G) 展开法求解广义变系数Burgers方程[J]. 量子电子学报, 2011, 28(6): 674-681.

15 Jiao Zhang, Xiaoli Wei, Yongjie Lu. A generalized (G'/G)-expansion method and its applications[J]. Phys Lett A, 2008, 372(20): 3653-3658.

16 Xie Y X, Tang J S. New solitary wave solutions to the KdV-Burgers equation[J]. International J Theoretical Physics, 2005, 44(3): 304-312.

17 Li Erqiang, Wang Mingliang. (G'/G)-method and travelling wave solutions to compound KdV-Burgers equation[J]. J Henan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2005, 41(4): 107-111.

李二强, 王明亮. (G'/G) 方法及组合KdV-Burgers方程的行波解[J]. 河南科技大学学报(自然科学学报), 2005, 41(4): 107-111.

18 Taogetusang, Sirendaoerji. Solitary wave solutions to the nonlinear evolution equations with new auxiliary equation[J]. J Inner Mongolia University (Natural Science Edition), 2004, 35(3): 246-251.

套格图桑, 斯仁道尔吉. 新的辅助方程构造非线性发展方程的孤立波解[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2004, 35(3): 246-251.