

Compton 散射对相对论正负电子对 等离子体横色散的影响

冯光辉 郝东山*

郑州华信学院信息工程系, 河南 新郑 451100

摘要 应用多光子非线性 Compton 散射模型和正负电子对等离子体横介电系数公式, 对无磁化、无碰撞、各向同性极端相对论正负电子对等离子体横色散进行了解析研究和数值计算, 给出了散射下的相对论性费米分布、线性色散表达式及横色散解析解和数值解曲线。结果表明, 与散射前相比, 解析解横色散曲线中的短波曲线变长, 长波曲线变短, 不连续区间向左和向上移动。这主要是由于散射使正负电子对等离子体频率增大、短波成分增大、长波成分减小的缘故。数值解横色散曲线将两个不连续的长短波解析曲线完全连接起来, 成为一条光滑的色散曲线。这主要是由于散射使正负电子对等离子体中出现极端相对论几率大大增强、粒子耦合密度和温度增大, 使高频色散成分增多、整体色散增强的缘故。

关键词 激光光学; 正负电子对等离子体; 横色散; 耦合; Compton 散射

中图分类号 O437 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/LOP51.031401

Influences of Compton Scattering on Transverse Dispersion of Relativistic Electron-Positron Plasma

Feng Guanghui Hao Dongshan

Department of Information Engineering, Zhengzhou Huaxin University, Xinzheng, Henan 451100, China

Abstract By using the model of multi-photon nonlinear Compton scattering and the transverse dielectric constant formula of electron-positron plasma, the transverse dielectric in the un-magnetized, non-collision, isotropic and ultra-relativistic electron-positron plasma is studied by using the analytic and numerical computing methods. The relativistic Fermi's distribution under the Compton scattering, the expression of linear dispersion, and the numerical analytic and numerical of the transverse dispersion are given. The results show that the curve length of the short wave in the analytic transverse dispersion is increased in comparison with that before scattering, the curve length of the long wave is decreased, and their positions move to left and upward. The key causes are that frequency of the electron-positron plasma is increased by the scattering, the short wave and long wave components are increased and decreased, respectively. The two discontinuous analytic curves are absolutely connected by the numerical transverse dispersion curve, so that a smooth curve is formed. The key causes are that the ultra-relativistic probabilities resulting from Compton scattering in the electron-positron plasma are greatly increased, the coupling density and temperature are increased, the high frequency component is decreased, and the whole dispersion composition is increased.

Key words laser optics; electron-positron plasma; transverse dispersion; coupling; Compton scattering

OCIS codes 140.3460; 190.4360; 270.0270

1 引言

等离子体色散是研究等离子体波及其不稳定性的基础, 而非广延分布下的等离子体色散能够解释广延统计物理无法解释的一些奇异实验现象, 如恒星多方系统及星系族的特殊速度分布^[1-2], 且具有广泛的应用

收稿日期: 2013-10-10; 收到修改稿日期: 2013-11-13; 网络出版日期: 2014-02-11

基金项目: 河南省基础与前沿技术研究计划项目(092300410227)、河南省教育厅科学技术研究重点项目(12B520063)

作者简介: 冯光辉(1981—), 男, 硕士, 讲师, 主要从事信号传输方面的研究。E-mail: 156556096@qq.com

*通信联系人。E-mail: haodongshan1948@126.com

前景,如研究脉冲星、太阳耀斑、黑洞和活动星系核的喷发^[3-5],处理包括长程相互作用或记忆效应系统等^[6],因此,它已成为当前国际基础物理研究的一大热点^[7-11]。正负电子对等离子体不同于电子等离子体的同质量和电量的粒子和反粒子系统,有不同的产生方式,如利用势阱中低能电子束产生^[12]、光子间散射产生^[13]和强激光产生^[14-15]。目前,对正负电子对等离子体的研究主要集中在相对论范围^[16-18]。Liu等^[19-20]给出了相对论 q 分布下的电子等离子体的纵波和横波色散关系。廖妍俐等^[21]指出,极端相对论性等离子体中横波的解析色散曲线具有不连续性。李军^[22]指出,相对论 q 分布下色散关系与非广延参数 q 和温度有关,当 $q \rightarrow 1$ 时,渐进结果与经典统计下的一致。应指出的是,以上对相对论性正负电子对等离子体横振荡色散的研究未考虑多光子非线性 Compton 散射的影响。实验表明,激光强度达到 10^{10} V/m 量级以上时,非线性 Compton 散射开始显现^[23],可见,Compton 散射对相对论正负电子对等离子体横色散的影响不能忽略。本文应用多光子非线性 Compton 散射模型对该问题进行了研究,指出 Compton 散射光是产生相对论正负电子对等离子体横色散的新机制,给出了相对论性正负电子对费米分布、线性色散表达式及横色散解析解和数值解曲线。

2 理论分析

2.1 Compton 散射下的横振荡色散方程

当正负电子对等离子体中发生多光子非线性 Compton 散射(以下简称散射)时,散射光频为^[24]

$$\omega_s = \frac{N\omega_0(1+\beta_0 \cos \theta)(1-\beta_f \cos \theta')}{\eta^2 + \frac{\eta N \hbar \omega_0(1+\beta_0 \cos \theta)}{m_0 c^2(1-\cos \theta')^{-1}}}, \quad (1)$$

式中 θ 为散射前电子和光子运动方向夹角; θ'_1 和 θ' 为电子静止系中电子与散射光子运动方向夹角和光子散射角; $\eta = |\gamma_0 - \gamma_f|/(\gamma_0 - 1)$ 为量度散射非弹性参量; $\gamma_0 = [1 - (v_0/c)^2]^{-1/2} = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ 和 $\gamma_f = (v_f/c)^2]^{-1/2} = (1 - \beta_f^2)^{-1/2}$ 、 v_0 和 v_f 分别为电子散射前后的 Lorentz 因子、速度; N 、 ω_0 、 c 、 m_0 分别为与电子同时作用光子数、入射光频率、真空中光速、电子静止质量; $h = 2\pi \hbar$ 为普朗克常数,取值为 6.63×10^{-34} J·s。若散射与入射光形成耦合光频率取 $\omega_c = \omega_s + \omega_0$ 形式,则耦合光频为

$$\omega_c = \omega_0 \left[\frac{N(1+\beta_0 \cos \theta)(1-\beta_f \cos \theta')}{\eta^2 + \frac{\eta N \hbar \omega_0(1+\beta_0 \cos \theta)}{m_0 c^2(1-\cos \theta')^{-1}}} + 1 \right]. \quad (2)$$

对于无磁化、无碰撞、各向同性正负电子对等离子体,散射前横介电系数为^[21]

$$\varepsilon_{k_{\alpha 1}} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 e^2 c}{\omega_0 k_0} (m_{\alpha} c)^3 \int_0^{\infty} \frac{u_0^3}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} du \int_{-1}^{+1} \frac{1-x^2}{x - \gamma \bar{v}_p - i\varepsilon} dx, \quad (3)$$

式中 $\bar{v}_p \equiv \omega_0/k_0 c$,其中 k_0 为入射光波数; $\gamma = (1+u_0^2)^{1/2}$, $u_0 = p_0/m_{\alpha} c$ 为约化速度, p_0 和 m_{α} 分别为散射前粒子动量和质量, α 代表正电子或负电子; f_0 为散射前粒子分布函数。

设散射光使 $\varepsilon_{k_{\alpha 1}}$ 、 u_0 、 \bar{v}_p 、 k_0 、 f_0 、 γ 分别产生增量 $\Delta \varepsilon_{k_{\alpha 1}}$ 、 Δu_0 、 $\Delta \bar{v}_p$ 、 Δk_0 、 Δf_0 、 $\Delta \gamma$,相应耦合参量分别满足关系式 $\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{k_{\alpha 1}} + \Delta \varepsilon_{k_{\alpha 1}}$, $\bar{v}_{cp} = \bar{v}_p + \Delta \bar{v}_p$, $u_c = u_0 + \Delta u_0$, $k_c = k_0 + \Delta k_0$, $f_c = f_0 + \Delta f_0$, $\gamma_c = \gamma + \Delta \gamma$ 。则对应(3)式有

$$\varepsilon_{k_{c1}} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 e^2 c}{\omega_c k_c} (m_{\alpha} c)^3 \int_0^{\infty} \frac{u_c^3}{\gamma_c} \frac{\partial f_c}{\partial \varepsilon} du \times \int_{-1}^{+1} \frac{1-x^2}{x - \gamma_c \bar{v}_{cp} - i\varepsilon} dx, \quad (4)$$

式中 $\bar{v}_{cp} = (\omega_0 + \omega_s)/k_c c$; $u_c = (p_0 + \Delta p_0) \times (m_{\alpha} c)^{-1}$; $\gamma_c \approx (1+u_0^2 + 2u_0 \Delta u_0)^{1/2}$ 。(4)式中 x 积分为

$$H_c = -\ln \left(\frac{\bar{v}_{cp} - u_c/\gamma_c}{\bar{v}_{cp} + u_c/\gamma_c} \right) - 2 \frac{\gamma_c \bar{v}_{cp}}{u_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_c \bar{v}_{cp}}{u_c} \right)^2 \ln \left(\frac{\bar{v}_{cp} + u_c/\gamma_c}{\bar{v}_{cp} - u_c/\gamma_c} \right) - i\pi \left(\frac{\gamma_c \bar{v}_{cp}}{u_c} \right)^2 \varphi \left(1 - \frac{\gamma_c \bar{v}_{cp}}{u_c} \right), \quad (5)$$

对于透明介质,因介电常数虚部远小于实部,故可得正负电子对等离子体横振荡为

$$\text{Re } \varepsilon_{ct} = \frac{k_c^2 c^2}{\omega_{ct}}. \quad (6)$$

因极端相对论情况中 $u_c/\gamma_c \approx 1$, 故可得正负电子对等离子体横耦合色散方程为

$$\frac{k_c^2 c^2}{\omega_c^2} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 e^2 c}{\omega_c k_c} \int_0^{+\infty} \frac{u_c^3}{\gamma_c} \frac{\partial f_c}{\partial \varepsilon_c} H' du, \quad (7)$$

式中 $H'_c = -\ln[(\bar{v}_{cp} - 1)/(\bar{v}_{cp} + 1)] - 2\bar{v}_{cp} + \bar{v}_{cp}^2 \times \ln[(\bar{v}_{cp} + 1)/(\bar{v}_{cp} - 1)]^2/2$ 。

2.2 散射下相对论性费米分布

因电子和正电子具有相同的平衡分布函数,且均遵从费米分布,故有

$$f_c(p_c) = \frac{2}{h^3} \frac{1}{\exp[(\varepsilon_c - \mu_{\alpha})/K_B T_{\alpha}] + 1}, \quad (8)$$

式中 μ_{α} 、 K_B 、 T_{α} 和 $\varepsilon_c = c\sqrt{m_{\alpha}^2 c^2 + p_c^2}$ 分别为化学势、玻尔兹曼常数、粒子耦合温度和能量。 f_c 满足归一化条件

$$\int f_c dp_c = n_{\alpha}, \quad (9)$$

式中 $n_{\alpha} = n_{\alpha} + \Delta n_{\alpha}$ 为粒子耦合数密度,其中 n_{α} 和 Δn_{α} 分别为散射前粒子数密度及其增量。极端相对论下, $\varepsilon_c = cp_c$, 结合(8)、(9)式及 $\mu_{\alpha} \gg K_B T_{\alpha}$, 可得

$$\frac{8\pi}{(hc)^3} \left(\frac{1}{2} \mu_{\alpha} \pi^2 K_B^2 T_{\alpha}^2 + \frac{1}{3} \mu_{\alpha}^3 \right) = n_{\alpha}. \quad (10)$$

可见,化学势是由正负电子系统的粒子耦合密度和温度共同决定的。

2.3 散射下简并正负电子对线性色散

考虑 $u_c/\gamma_c \approx 1$ 条件下 $\varepsilon_c = cp_c = m_{\alpha} c^2 u_c$, 由(7)式,可得横振荡色散关系为

$$\frac{k_c^2 c^2}{\omega_c^2} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 e^2 c}{\omega_c k_c} (m_{\alpha} c)^3 \frac{2}{h^3} \frac{1}{(m_{\alpha} c^2)^3} \left(\mu_{\alpha}^2 + \frac{1}{3} \pi^2 K_B^2 T_{\alpha}^2 \right) H'_c, \quad (11)$$

当 $\bar{v}_{cp} \gg 1$ 时,可得长波色散关系为

$$\omega_c^2 = \frac{1}{3} \sum_{\alpha} \frac{32\pi^2 e^2}{h^3 c} \left(\mu_{\alpha}^2 + \frac{T_{\alpha}^2 \pi^2}{3K_{cB}^{-2}} \right) + \frac{6c^2}{5k_c^2}. \quad (12)$$

当 \bar{v}_{cp} 略大于1时,可得短波色散关系为

$$\omega_c^2 = \frac{k_c^2}{c^2} \left[1 + \sum_{\alpha} \frac{16\pi^2 e^2}{k_c^2 h^3 c^3} \left(\mu_{\alpha}^2 + \frac{T_{\alpha}^2 \pi^2}{3K_{cB}^{-2}} \right) \right]. \quad (13)$$

3 计算结果与讨论

引入无量纲参量

$$\Omega_c = \frac{\omega_c}{\omega_{cpe}}, K_c = \frac{k_c c}{\omega_{cpe}}, V_c = \frac{\Omega_c}{K_c}, x = \frac{m_{ce} c^2 u_c - \mu_c}{K_{cB} T_{\alpha}}, y = \frac{e^2 c^2 (m_{ce} c)^3}{K_{cB} T_{\alpha} \omega_{cpe}^2 h^3}, \quad (14)$$

式中 $\omega_{cpe} = (4\pi n_{ce} e^2 / m_{ce})^{1/2}$ 和 m_{ce} 分别为耦合电子等离子体频率和电子质量。考虑到电子和正电子具有相同温度,因此可得无量纲横振荡色散方程为

$$\frac{1}{V_c^2} = 1 + \frac{16\pi^2 y}{\Omega_c K_c} \int_0^{\infty} u_c^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} H'_c du_c, \quad (15)$$

式中 $H'_c = -\ln[(\bar{v}_{cp} - 1)/(\bar{v}_{cp} + 1)] - 2\bar{v}_{cp} + \bar{v}_{cp}^2 \ln[(\bar{v}_{cp} + 1)/(\bar{v}_{cp} - 1)]^2/2$ 。

由于正负电子等离子体密度为 10^{30} cm^{-3} 量级,且正负电子完全简并、温度相同,故费米温度在 10^{10} K 量级以上,计算时依据这些数值可使正负电子对等离子体同时满足完全简并和相对论性。通过程序对正负电子对等离子体横振荡色散进行计算,其解析色散曲线如图1所示。由图1可知,与散射前相比,短波曲线变长,长波曲线变短,不连续区间 $1 < \bar{v}_{c0} < 10$ 向左和向上移动。这主要是由于散射使正负电子对等离子体频率增大、短波成分增大、长波成分减小的缘故。

若对(15)式在 $1 < \bar{v}_{c0} < 10$ 区间进行数值计算,正负电子对等离子体的解析和数值色散关系如图2所示。由图2知,数值曲线将解析曲线完全连接起来,成为一条完整的光滑色散曲线,这主要是由于散射使正负电子对等离子体中出现极端相对论几率大大增强、粒子耦合密度和温度增大,从而使色散增强的缘故。

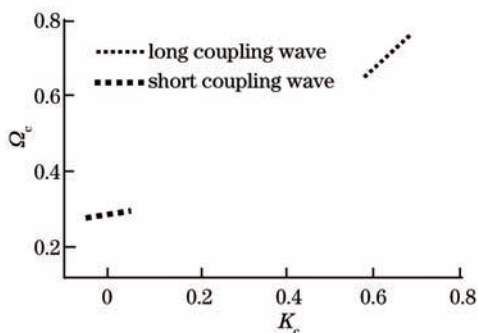


图1 横耦合色散解析曲线

Fig.1 Analytical curves of transverse coupling dispersion

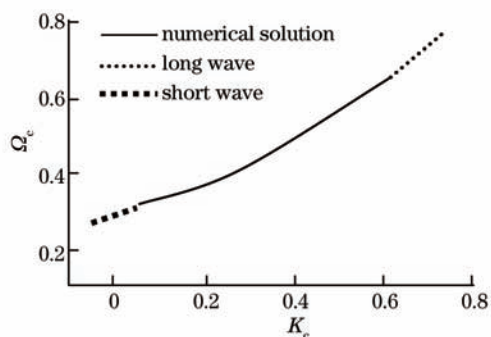


图2 横耦合色散解析和数值曲线

Fig.2 Analytical and numerical curves of transverse coupling dispersion

4 结 论

应用多光子非线性 Compton 散射模型和正负电子对等离子体横介电系数公式,对无磁化、无碰撞、各向同性极端相对论正负电子对等离子体横振荡色散进行了解析研究和数值计算,给出了散射下的相对论性费米分布、线性色散表达式及其解析解和数值解色散曲线。结果表明:与散射前相比,解析解横色散曲线中的短波曲线变长,长波曲线变短,不连续区间 $1 < \bar{v}_{\infty} < 10$ 向左和向上移动。这主要是由于散射使正负电子对等离子体频率增大、短波成分增大、长波成分减小的缘故。横数值解色散曲线将两个不连续的长短波解析曲线完全连接起来,成为一条完整的光滑色散曲线,这主要是由于散射使正负电子对等离子体中出现极端相对论几率大大增强、粒子耦合密度和温度增大,从而使高频色散成分增多、整体色散增强的缘故。本文所得结论对进一步了解粒子与场的作用、激光核聚变等问题应具有一定的参考价值。

参 考 文 献

- 1 A Plastino, A R Plastino, C Tsallis. Ehrenfest theorem and information theory [J]. Phys Lett A, 1993, 177(3): 177-179.
- 2 A Lavagno, G Kaniadakis, M Rego-Monteiro, *et al.*. Nonextensive thermo-statistical approach of the peculiar velocity function of galaxy clusters [J]. Astrophys Lett, 1998, 35(1): 449-451.
- 3 K I Nishikawa, P Hardee, G Pichardson, *et al.*. Particle acceleration and magnetic field generation in electron-positron relativistic shocks [J]. Astrophys Journal, 2005, 62 (2): 927-937.
- 4 S Iwamoto, F Takahapa. Relativistic outflow of electron-positron pair plasma from a Wien equilibrium state [J]. Astrophys Journal, 2002, 56 (5): 163-173.
- 5 K Hirotsu, M Kimura, S Iguchi, *et al.*. Pair plasma dominance in the parsec-scale relativistic jet of 3C 345 [J]. Astrophys Journal, 2000, 54(5): 100-106.
- 6 M Gell-Mann, C Tsallis. Nonextensive Entropy-Inter Disciplinary Applications [M]. New York: Oxford University Press, 2004.
- 7 Guo Xun, Guo Kaimin, Song Xiaowei, *et al.*. Plasma characteristics of metal Fe ablated by pulsed laser [J]. Chinese J Lasers, 2010, 37(3): 877-881.
高 勋, 郭凯敏, 宋晓伟, 等. 激光烧蚀铁靶的等离子体特性[J]. 中国激光, 2010, 37(3): 877-881.
- 8 Yu Dingchen, Hao Xiaofei, Hao Dongshan. Influence of filter wave of plasma photonic crystals with tunable defect produced by Compton scattering [J]. Chinese J Lasers, 2011, 38(10): 1006001.
禹定臣, 郝晓飞, 郝东山. 康普顿散射对可调缺陷层等离子体光子晶体滤波特性的影响[J]. 中国激光, 2011, 38(10): 1006001.
- 9 Liu Huixia, Yang Shengjun, Wang Xiao, *et al.*. Experiment study and numerical simulation of pulsed laser ablation crater [J]. Chinese J Lasers, 2009, 36(1): 219-223.
刘会霞, 杨胜军, 王 霄, 等. 脉冲激光烧蚀凹腔的实验分析及数值模拟[J]. 中国激光, 2009, 36(1): 219-223.
- 10 Wen Hua, Hao Xiaofei, Hao Dongshan. Influence of initial plasma temperature on proton generation under Compton scattering [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(8): 081902.
文 桦, 郝晓飞, 郝东山. Compton 散射下等离子体初温对质子产生的影响[J]. 激光与光电子学进展, 2012, 49(8): 081902.
- 11 Yao Ruxian, Hao Xiaofei, Hao Dongshan. Influence of Compton scattering to the density and temperature characteristics

- of band gap structure for un-magnetized plasma photonic crystals[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2011, 48(11): 111601.
- 姚汝贤, 郝晓飞, 郝东山. 康普顿散射对非磁化等离子体光子晶体禁带密度温度特性的影响[J]. *激光与光电子学进展*, 2011, 48(11): 111601.
- 12 R G Greaves, C M Surko. An electron-positron beam-plasma experiment [J]. *Phys Rev Lett*, 1995, 75(21): 3846-3849.
- 13 H Hasegawa, S Irie, S Usami, *et al.*. Perpendicular nonlinear waves in an electron-positron-ion plasma [J]. *Phys Plasmas*, 2002, 9(6): 2549-2552.
- 14 H K Avetissian, A K Avetissian, G F Mkrchian, *et al.*. Electron-positron pair production in the field of superstrong oppositely directed laser beams [J]. *Phys Rev E*, 2002, 66(1): 016502.
- 15 R Alkofer, M B Hecht, C D Roberts, *et al.*. Pair creation and an X-ray free electron laser [J]. *Phys Rev A*, 2001, 64(19): 193902.
- 16 E W Laing, D A Diver. Relativistic Landau damping of longitudinal waves in isotropic pair plasmas [J]. *Phys Plasma*, 2006, 13(9): 092115.
- 17 E W Laing, D A Diver. Damped Bernstein modes in a weakly relativistic pair plasma [J]. *Phys Rev E*, 2005, 72 (3): 036409.
- 18 V M Bannur. 3Self-consistent quasi particle model results for ultrarelativistic electron-positron thermodynamic plasma [J]. *Phys Rev E*, 2006, 73(6): 067401.
- 19 Liu Sanqiu, Chen Xiaochang. Dispersion relation of longitudinal oscillation in relativistic plasmas with nonextensive distribution [J]. *Physica A*, 2011, 390 (9): 1704-1712.
- 20 Liu Sanqiu, Chen Xiaochang. Dispersion relation of transverse oscillation in relativistic plasmas with nonextensive distribution[J]. *J Plasma Phys*, 2011, 77(5): 653-662.
- 21 Liao Yanli, Liu Sanqiu, Wang Hao. Transverse dispersion law of electron-positron plasma in ultra-relativistic regime [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2008, 20(5): 751-754.
- 廖妍俐, 刘三秋, 汪浩. 极端相对论性正负电子对等离子体中横振荡的色散关系[J]. *强激光与粒子束*, 2008, 20(5): 751-754.
- 22 Li Jun. Transverse oscillation in relativistic electron-positron plasma with q -distribution [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2013, 25(4): 1009-1012.
- 李军. 相对论 q -分布正负电子对等离子体横振荡[J]. *强激光与粒子束*, 2013, 25(4): 1009-1012.
- 23 Kong Qing, Zhu Lijun, Wang Jiayang, *et al.*. Electron dynamics in the extra-intense stationary laser field [J]. *Acta Physics Sinica*, 1999, 48(4): 650-660.
- 孔青, 朱立俊, 王加祥, 等. 电子在超强激光场中的动力学特性[J]. *物理学报*, 1999, 48(4): 650-660.
- 24 Hao Dongshan. Effect of Compton scattering on prohibited band gaps for 1-D ternary un-magnetized plasma photonic crystals [J]. *Laser Technology*, 2013, 37(4): 515-518.
- 郝东山. Compton 散射对 1 维 3 元未磁化等离子体光子晶体禁带影响[J]. *激光技术*, 2013, 37(4): 515-518.