

数字梯度敏感法测量 PMMA 板裂纹尖端的应力强度因子

张蕊

昆明理工大学工程力学系, 云南 昆明 650500

摘要 用数字梯度敏感法(DGS)测量了聚甲基丙烯酸甲酯(PMMA)板的张开型应力强度因子(SIF)。用DGS方法测量了PMMA板裂纹附近应力集中区的应力梯度(或偏转角)。此方法先用数字图像相关法(DIC)测量了透明试件裂纹尖端附近的全场位移,再根据光弹效应获得光线在透明固体应力集中区的全场偏转角,在平面应力条件下,偏转角可以与应力梯度建立联系从而获得应力集中区的应力梯度。由应力梯度场测量了裂纹尖端的应力强度因子。在应力强度因子的求解过程中提出了一种迭代最小二乘拟合应力梯度场的方法,此方法可同时得出应力强度因子与裂纹尖端位置。将实验结果与理论值进行了比较,结果显示数字梯度敏感方法准确地测量了复合型应力强度因子。

关键词 测量;数字梯度敏感法;应力强度因子;光弹效应;非线性最小二乘法;透明材料

中图分类号 O348.1; O436; TN911.74 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP51.021202

Evaluating Crack Tip Stress Intensity Factors of PMMA Using Digital Gradient Sensing Method

Zhang Rui

*Engineering Mechanics Department, Kunming University of Science and Technology,
Kunming, Yunnan 650500, China*

Abstract This paper focuses on the application of digital gradient sensing (DGS) method to the determination of stress intensity factors (SIFs) for cracks in polymethyl methacrylate (PMMA). First, the full-field displacement fields of the test sample are recorded using digital image correlation (DIC), and then the angular deflections of light rays propagating through the material are obtained based on the elasto-optical effect exhibited by transparent materials subjected to non-uniform state of stress. Under plane stress conditions, the deflections of light rays can be related to two orthogonal in-plane stress gradients. In this way, the stress gradients near the crack on PMMA plates are quantified, and then crack tip SIFs are extracted from DGS Measurements using the method of nonlinear least-squares proposed. With the obtained SIFs, crack tip location is determined simultaneously. For validation, the SIF determined is compared with theoretical results, confirming the effectiveness and accuracy of the proposed technique. Therefore, it DGS method is a practical and effective tool for SIF measurement.

Key words measurement; digital gradient sensing method; stress intensity factors; elasto-optical effect; nonlinear least-squares; transparent materials

OICS codes 120.3940; 350.1820; 350.5500

1 引言

随着科学技术的发展,透明材料的使用范围越来越广,人们对其性能的要求也越来越高,例如将透明材料用于制造汽车的挡风玻璃、电子显示屏、飞机的座舱盖、密封头盔观察窗以及军队使用的透明防弹衣^[1-2]。同时,许多新兴透明材料在其他的工程中也有广泛的应用^[3]。在防弹衣、密封头盔观察窗的实际应用中,构

收稿日期: 2013-10-14;收到修改稿日期: 2013-10-21;网络出版日期: 2014-01-16

基金项目: 云南省昆明理工大学基金(14118683)

作者简介: 张蕊(1982—),女,博士,讲师,主要从事光测力学方面的研究。E-mail: zrui0310@163.com

件受到冲击后仍保持透明性及继续承受载荷撞击的能力对于人身安全至关重要。为保证人身安全,确认透明材料和结构是否能经得起载荷冲击,需分析应力、变形等力学性能参数的变化对结构的影响。同时,应力、变形等力学性能参数也是研究断裂机理和量化断裂参数的必要内容。一些研究人员已经利用材料的透明性研究了应力、应力梯度及其断裂行为。文献[4]报道了一种 Mach-Awhnder 干涉法,能测量透明聚甲基丙烯酸甲酯(PMMA)材料界面裂纹附近的应力场。文献[5-6]利用材料的透明性特点研究了透明聚合物的动态断裂,以了解材料的力学行为并验证已有断裂力学理论。也有一些工作研究了玻璃及透明陶瓷的单层板或层合板内的裂纹止裂和分裂问题^[7-8]。Xu 等^[9]利用透射式焦散线研究了 PMMA 板的断裂特性并测量了 V 型缺口尖端的应力强度因子(SIF)。Yao 等^[10]用一种基于横向剪切相关的相干梯度敏感算法用于研究断裂问题,测量了裂纹附近的应力梯度场以及裂尖参数,并对功能梯度材料的静态断裂行为进行了实验研究。Xu 等^[11]用相干梯度敏感法对含偏移裂纹的 PMMA 板进行了三点弯曲实验,测量了裂尖应力场、变形场的演化及裂尖应力强度因子,分析了含各种偏移裂纹试件的断裂行为。因此,利用材料的透明性测量应力梯度场及全场应力,研究其断裂行为包括量化相应的断裂参数具有重要的学术意义和工程应用背景。

Periasamy 等^[12]于 2012 年提出了一种可以测量透明件应力集中区的应力梯度场及应力场的数字梯度敏感(DGS)方法。此方法首先用数字图像相关法(DIC)测量了透明试件应力集中区的全场位移,再根据应力-光学效应获得光线在透明固体应力集中区的全场偏移角,在平面应力条件下,偏移角可以与应力梯度建立起联系从而获得应力集中区的应力梯度。该方法由于对应力梯度敏感,因此命名为数字梯度敏感法。

文献[13]将数字梯度敏感法用于张开型应力强度因子的测量,测量过程中假设存在 K 控区(指应力强度因子控制断裂过程),计算 SIF 仅采用 Williams 展开式的第一项。然而文献[14]显示 3D 区(指平面应变区)外并非总是存在 K 控区,同时该文献在计算 SIF 时采用最小二乘拟合法,此方法需预先准确确定裂纹尖端位置,裂纹尖端位置的准确确定是确保 SIF 测量精度的关键,然而当裂纹尖端位置模糊时,裂纹尖端位置难以准确确定。实际测量中由于裂纹尖端位置的测量误差使得应力强度因子的测量结果具有一定的分散性^[15-16]。

本文将数字梯度敏感方法用于透明件裂纹尖端应力强度因子的测量,判断所测试件是否存在 K 控区,当不存在 K 控区时,采用 Williams 多项展开式计算 SIF。同时提出一种迭代最小二乘法拟合偏转角进而计算 SIF,此方法以裂纹尖端位置为未知量进行迭代,只需给定初值,计算结果将收敛于准确的裂纹尖端位置,同时计算出 SIF。

2 测量原理

2.1 数字梯度敏感方法

数字梯度敏感法测量裂纹尖端应力集中区应力梯度的实验装置如图 1 所示,包括被均匀照明的具有随机散斑的目标板、一个透明的被测对象和一个具长焦距的数字摄像机。拍摄未加载时的图像为参考图像,此图像为目标板上的散斑透过标称厚度为 B 、折射率为 n 的透明样本而成的图像,即目标板上的任意点 P 对应透明样本上的 Q 点被相机记录。在透明板的边缘施加线性载荷后,由于应力集中使得透明板的厚度和折射率发生变化,从而导致光线产生微小偏转,如图 1 所示,即参考状态下的光线 OP 在变形后对应 OQ 。通过量化 PQ 并且确定目标板和透明样本之间的距离 Δ 即可求出光线偏转角。向量 PQ 的分量(即位移)可由数字图像相关法测得。文献[12]推导了偏转角和位移的关系,得到了光力学控制方程,即由光弹方程和平面应力条件推导出偏转角和应力梯度的关系(已知变形前被测透明材料的厚度和折射率):

$$\varphi_{xy} \approx \frac{\delta_{xy}}{\Delta} \approx \alpha_{xy} = C_{\sigma} B \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial(x;y)}, \quad (1)$$

式中 C_{σ} 为样本的光弹常数, B 为样本厚度, ∂ 为或的意思。因此,通过拍摄透过加载前后透明板的目标板上的散斑,可以获得参考图像与变形图像。随后由数字图像相关法可以获得全场位移 δ_x 和 δ_y 。已知透明板和目标板之间的距离 Δ ,则可以算出全场偏转角度 φ_x 和 φ_y 。

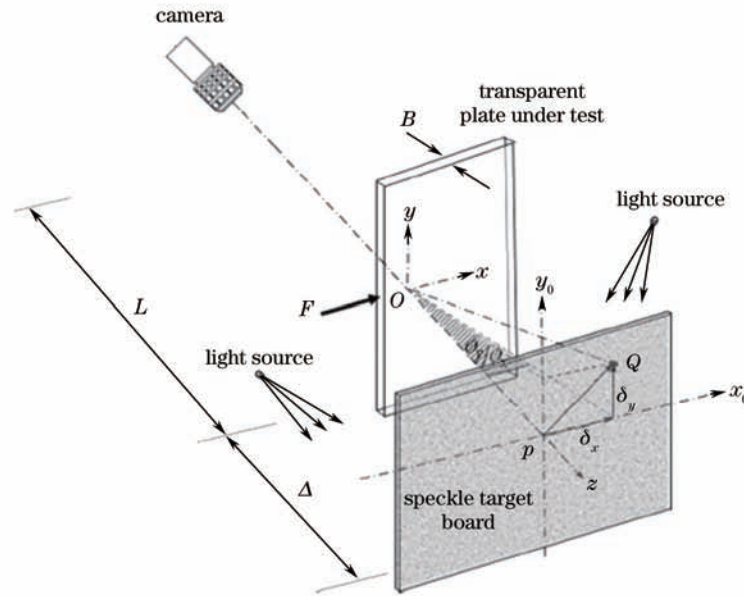


图1 测量裂纹尖端应力集中区的应力梯度的数字梯度敏感法测量系统示意图

Fig.1 Schematic diagram of digital gradient sensing method for testing the stress gradient at the crack tip

2.2 基于迭代最小二乘法的应力强度因子估计

用最小二乘法计算应力强度因子时,必须已知裂尖位置。因为应力强度因子的计算过程中需将DIC测得的变形场位移数据转换成以裂尖位置为坐标原点的的形式。本文中的方法以应力强度因子和裂纹尖端位置为未知量,采用迭代最小二乘法求解应力强度因子。

由张开型裂纹尖端附近的Williams应力场展开式,偏转角展开式(或面内应力梯度)写作

$$\begin{cases} \varphi_x = C_\sigma B \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial(x;y)} = C_\sigma B \sum_{N=1}^{\infty} A_N \left(\frac{N}{2} - 1\right) r^{\left(\frac{N}{2}-2\right)} \cos\left[\left(\frac{N}{2} - 2\right)\theta\right] \\ \varphi_y = C_\sigma B \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial(x;y)} = C_\sigma B \sum_{N=1}^{\infty} A_N \left(\frac{N}{2} - 1\right) r^{\left(\frac{N}{2}-2\right)} \sin\left[\left(\frac{N}{2} - 2\right)\theta\right] \end{cases}, \quad (2)$$

式中 $C_\sigma \approx -0.9 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$ 是PMMA的光弹常数, $B = 9 \text{ mm}$ 为板的厚度, r 和 θ 为以裂纹尖端为中心的极坐标。(2)式中函数展开项的第一项系数 A_1 与I型应力强度因子 K_I 之间的关系为: $A_1 = K_I \sqrt{2/\pi}$ 。因此,(2)式的位移场可重新表示为

$$\begin{cases} \varphi_{xk} = \sum_{n=1}^N A_n f_{ln}(r_k, \theta_k) \\ \varphi_{yk} = \sum_{n=1}^N A_n g_{ln}(r_k, \theta_k) \end{cases}, \quad (3)$$

式中 f_{ln} 和 g_{ln} 是极坐标 r 和 θ 的已知函数,具体表达式见(2)式。 N 表示位移场展开项的项数。实际上位移点离裂纹尖端越远,其函数展开项所需项数越大。 $k = 1, 2, \dots, M$, M 表示位移场数据总数。以裂纹尖端位置为原点的极坐标方程为

$$\begin{cases} r_k = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} \\ \theta_k = \arctan\left(\frac{y_k - y_0}{x_k - x_0}\right) \end{cases}, \quad (4)$$

式中 x_0 和 y_0 为直角坐标系下的裂纹尖端坐标。

假设裂纹尖端位置已知,则可通过最小二乘法计算出未知 A_n 。然而(4)式是未知参数 A_n , x_0 , y_0 的非线性函数。为求解这些未知参数,本文提出基于Newton-Raphson法的迭代最小二乘法拟合偏转角求解,其思想基于Sanford^[17]提出的由光弹条纹计算应力强度因子的方法。(4)式可重新写为

$$\begin{cases} h_{xk} = \sum_{n=1}^N A_n f_{ln}(r_k, \theta_k) - \varphi_{xk} \\ h_{yk} = \sum_{n=1}^N A_n g_{ln}(r_k, \theta_k) - \varphi_{yk} \end{cases} \quad (5)$$

对(5)式进行泰勒展开产生如下迭代方程:

$$\begin{cases} (h_{xk})_{i+1} = (h_{xk})_i + \left(\frac{\partial h_{xk}}{\partial A_1}\right)_i \Delta A_1 + \cdots + \left(\frac{\partial h_{xk}}{\partial x_0}\right)_i \Delta x_0 + \left(\frac{\partial h_{xk}}{\partial y_0}\right)_i \Delta y_0 \\ (h_{yk})_{i+1} = (h_{yk})_i + \left(\frac{\partial h_{yk}}{\partial A_1}\right)_i \Delta A_1 + \cdots + \left(\frac{\partial h_{yk}}{\partial x_0}\right)_i \Delta x_0 + \left(\frac{\partial h_{yk}}{\partial y_0}\right)_i \Delta y_0 \end{cases}, \quad (6)$$

下标 i 表示第 i 步迭代, $\Delta A_1, \dots, \Delta x_0$ 和 Δy_0 是对之前 A_1, \dots, x_0 和 y_0 估计值的更正。期望值 $(h_{xk})_{i+1} = 0$ 和 $(h_{yk})_{i+1} = 0$ 时(6)式变为

$$\begin{cases} -(h_{xk})_i = \left(\frac{\partial h_{xk}}{\partial A_1}\right)_i \Delta A_1 + \cdots + \left(\frac{\partial h_{xk}}{\partial x_0}\right)_i \Delta x_0 + \left(\frac{\partial h_{xk}}{\partial y_0}\right)_i \Delta y_0 \\ -(h_{yk})_i = \left(\frac{\partial h_{yk}}{\partial A_1}\right)_i \Delta A_1 + \cdots + \left(\frac{\partial h_{yk}}{\partial x_0}\right)_i \Delta x_0 + \left(\frac{\partial h_{yk}}{\partial y_0}\right)_i \Delta y_0 \end{cases} \quad (7)$$

(2)式可以矩阵的形式表示为

$$\mathbf{h} = \mathbf{b}\mathbf{w}, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -h_{x1} \\ \vdots \\ -h_{xN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{x1}}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial h_{x1}}{\partial x_0} & \frac{\partial h_{x1}}{\partial y_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_{xM}}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial h_{xM}}{\partial x_0} & \frac{\partial h_{xM}}{\partial y_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \Delta A_1 \\ \vdots \\ \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

用线性最小二乘法计算(9)式:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{b}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{h}. \quad (10)$$

方程的解是对之前系数估计值的校正。因此,用迭代法获得系数的最佳解。对未知量的估计值做如下迭代:

$$\begin{cases} (A_1)_{i+1} = (A_1)_i + \Delta A_1 \\ \vdots \\ (x_0)_{i+1} = (x_0)_i + \Delta x_0 \\ (y_0)_{i+1} = (y_0)_i + \Delta y_0 \end{cases} \quad (11)$$

以上程序重复计算直到更正值达到预先设定的足够小值。所提出的方法由于项数 N 的改变而得到多组 SIF 值。通过计算出的 SIF 来重建偏移角场,并与测量的偏移角场进行比较,最终由二者差的绝对值之和 R_{SAD} 决定 SIF,即收敛判据为

$$R_{\text{SAD}} = \sum |\varphi_k - \varphi_{kr}|, \quad (12)$$

式中 φ_k 表示测得的微小偏转角, φ_{kr} 表示由计算的 SIF 重建的微小偏转角。因此 SIF 的最终值通过最小化 R_{SAD} 确定。

3 实 验

利用 DGS 方法研究断裂问题的实验装置如图 2(a)所示,包括光源、目标板、带边界裂纹的透明试样和一个摄像机。目标板表面用黑漆喷涂,形成随机分布的斑点。透明试样平行放置在目标板的前方,两者之间的距离为 $\Delta = 24.5 \text{ mm}$ 。摄像机放置在试样前方距离试样 $L = 500 \text{ mm}$ ($L \gg \Delta$) 处。摄像机放置在试样前方距离试样足够远处,并且透过试样感兴趣区域对目标板聚焦成像。采用两个冷光源照明目标板。实验采用的

三点弯曲试样如图2(b)所示,图中 P 为作用于试件的载荷、 a 为裂纹长度,试样厚9 mm、宽59 mm,两加载点间距离为160 mm。图2(c)为未加载时拍摄的散斑图,从图中可以看出裂纹尖端模糊,而无法预先确定裂纹尖端的位置,所以采用本文提出的迭代最小二乘法计算SIF。

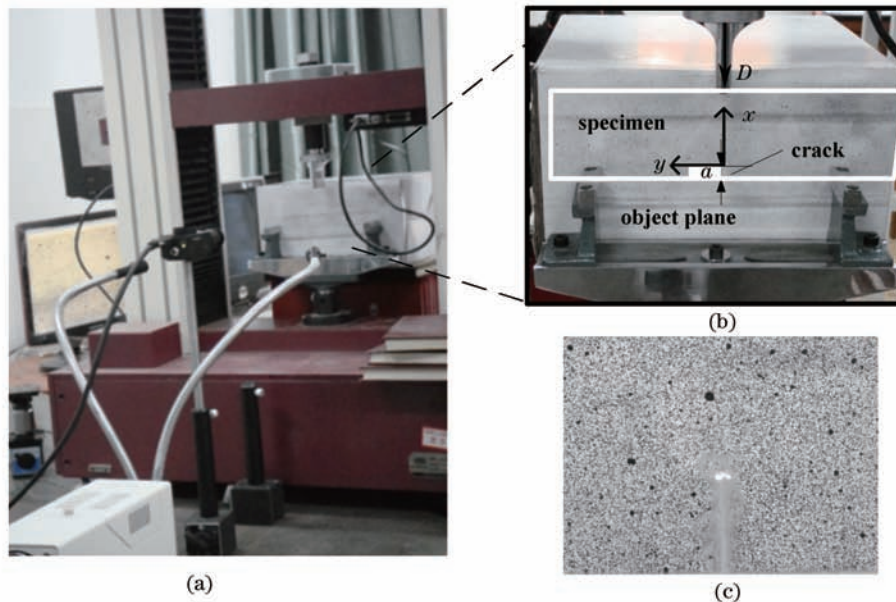


图2 实验装置及试件。(a)实验装置;(b)三点弯曲试样;(c)未加载时的散斑图

Fig.2 Experimental setup and specimen. (a) Experimental setup; (b) three-point bending of the specimen; (c) speckle pattern without loading

在实验过程中,采用微机控制电子万能试验机施加拉伸加载载荷。试样夹持在电子万能试验机上,将CCD相机(分辨率2048 pixel×2448 pixel)放置在试样正前方处,使其光轴与试样轴线垂直。准确聚焦时成像系统放大倍数为40 pixel/mm。首先,用CCD采集未变形状态下试样表面的图像作为参考图像,然后采集100,200,300,⋯,700 N时的图像作为该载荷的目标图像。

4 结果与讨论

用DGS分析这些图像时,使图像均转过90°。预先估计裂纹尖端为坐标原点,且 x 方向向右为正, y 方向向下为正。选择裂纹尖端附近区域作为感兴趣区域,在载荷作用下试样表面的散斑会随着试样一起变形并记录试样表面的变形信息,但由于裂纹区域并没有随着试样一起变形的散斑标记而被视为无效区域,本文对这些无效区域进行标记(即通过绘制一个封闭区域来近似该无效区域)以避免对这些区域进行计算。图像子区大小为41 pixel×41 pixel,计算步长为10 pixel,共计算100×94点。用DIC计算出位移场 δ_x 及 δ_y 。已知目标散斑板和透明样板之间的距离 Δ ,则可通过(1)式计算得到不同载荷下的 φ_x 场及 φ_y 场,其等值线如图3所示。图中1 pixel代表40 μm。用2.2节所述的迭代最小二乘法拟合偏转角度场计算SIF。

为了避免三维效应^[18],所选的区域应大于板厚的1/2,即 $r \geq 4.5$ mm。假设存在K控区,则由不同区域计算的SIF值在误差(由DIC算法本身的误差及加载等引起)允许范围内应近似相等,然而从图4可见不同区域计算出的SIF值差距较大。图中 $r_1 = 4.5$ mm,以 $r_2 = 5.5, 6.5, \dots, 12.5$ mm,即以距离 r_1 为1 mm的间距向外扩展,选择不同计算区域的偏转角拟合计算SIF。由图4可见选择不同区域计算SIF时,其计算结果差距较大,因此K控区的假设不成立。在计算SIF时应选择高阶项,将高阶系数返回(3)式,获得 φ_x 及 φ_y 的拟合值。如图5所示, x 轴上侧为拟合值,下侧为实验值。从图5中可以看出实验值和拟合值在同一等值线上。由图6可以看出随着函数展开项数的不同SIF值不同,且由 φ_x 计算时,当 $N=4$ 时,误差绝对值即(12)式最小,因此取 $N=4$ 计算的SIF为最终值。由 φ_y 计算时,当 $N=3$ 时,误差绝对值最小,取 $N=3$ 计算的SIF为最终值。然而当 N 超过合适的值时,误差增大。因函数需要改善并适合这些数据,那么较多的系数将导致更大程度的不确定性,从而使误差增大。这一点与文献[14]用基于相干光的相干梯度敏感法测量的应力梯度计

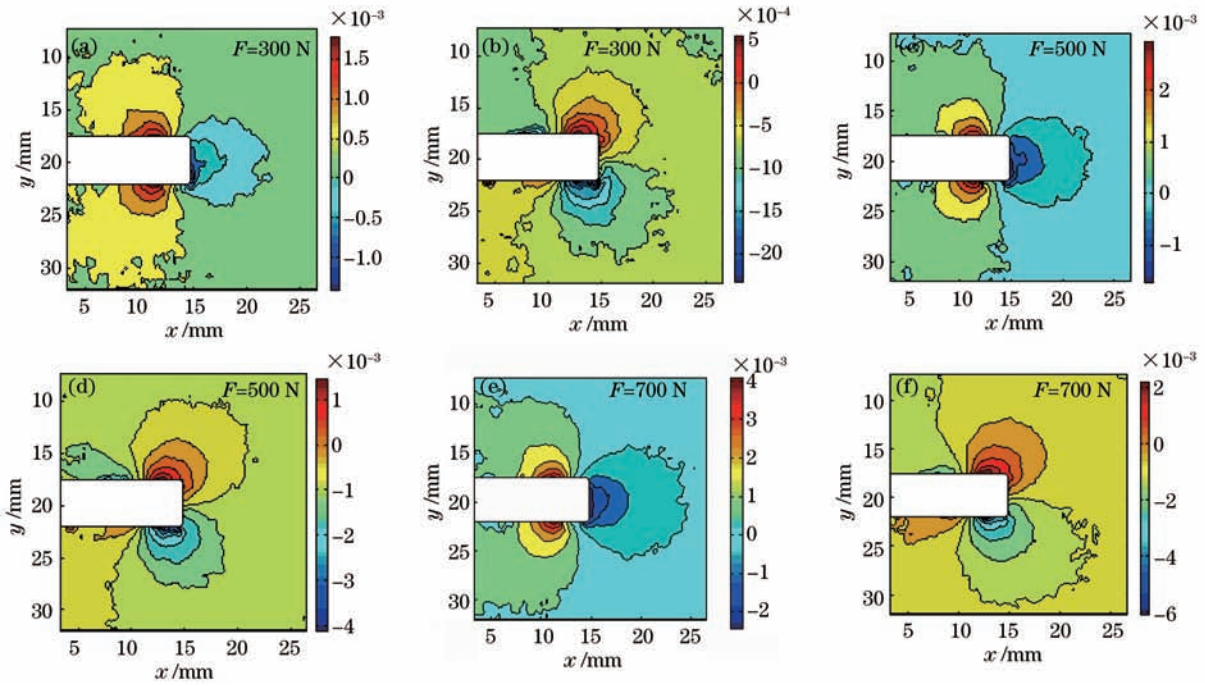


图3 实验获得的不同载荷下裂纹尖端附近的偏转角等值线(或应力梯度)。(a)~(c) φ_x ; (d)~(f) φ_y

Fig.3 Experimentally determined angular deflection (or stress gradient) contours near crack tip for different load levels.

(a)~(c) φ_x ; (d)~(f) φ_y

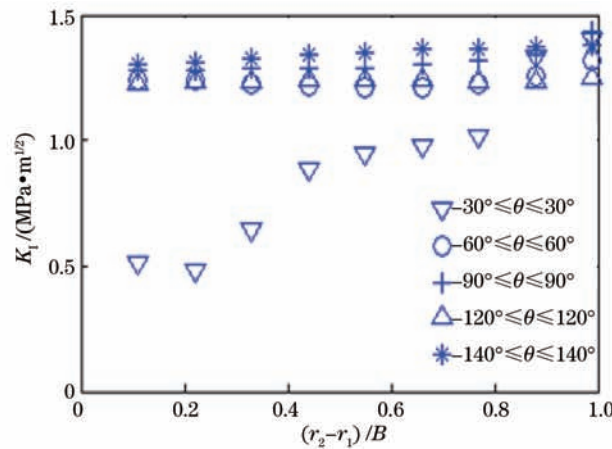


图4 假设存在K控区时不同区域求解的SIF值

Fig.4 SIF values calculated from different areas assuming K-dominance

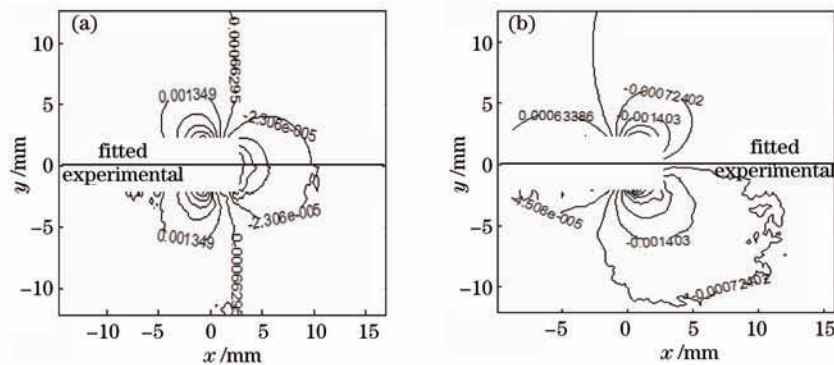


图5 加载700 N (a) φ_x 和(b) φ_y 的实验值及拟合值

Fig.5 Comparison between experimental and fitted (a) φ_x and (b) φ_y contours near the mode-I crack tip corresponding to a load of 700 N

算 SIF 采取高阶项数的研究思路一致。由此可见高阶项的存在对 SIF 的计算有较大影响,在计算 SIF 时必须考虑高阶项并采取合适项数:

$$K_I = \frac{F \cdot S}{B \cdot W^{3/2}} \cdot \frac{3\left(\frac{a}{w}\right)^{1/2} \left\{ 1.99 - \frac{a}{w} \left(1 - \frac{a}{w} \right) \left[2.15 - 3.93 \left(\frac{a}{w} \right) + 2.7 \left(\frac{a}{w} \right)^2 \right] \right\}}{2 \left(1 + 2 \frac{a}{w} \right) \left(1 - \frac{a}{w} \right)^{3/2}} \quad (13)$$

将实验得到的 SIF 值与(13)式^[19]计算得到的解析值做对比,如图 7 所示。由 φ_x 计算 SIF 平均相对误差为 0.10 MPa·m^{1/2}, 0.10 标准差为 0.14 MPa·m^{1/2}; 由 φ_y 计算 SIF 平均相对误差为 0.05 MPa·m^{1/2}, 标准差为 0.08 MPa·m^{1/2}。实验测得的 II 型 SIF 约为 0.01 MPa·m^{1/2}, 小于 I 型 SIF 的测量误差, 因此 II 型裂纹对 I 形裂纹无影响。

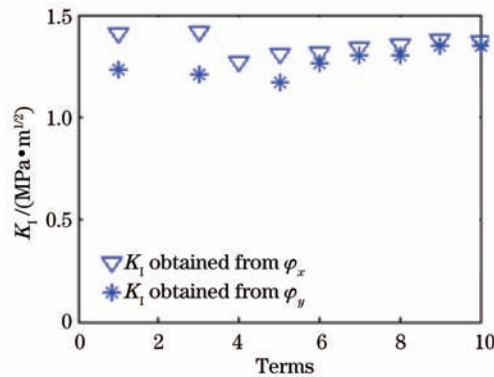


图 6 加载 700 N 时, 高阶项对 SIF 的影响

Fig.6 SIF determined with increasing terms under a load of 700 N

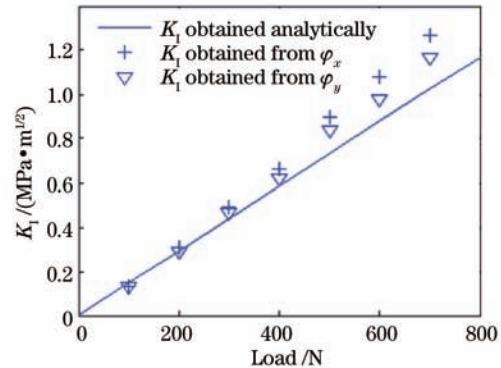


图 7 DIC 计算的 SIF 与(19)式计算的解析值的比较

Fig.7 Comparison of SIF obtained from DIC with that using Eq.(19)

响。

5 结 论

用 DGS 测量了不同载荷下裂纹附近区域的偏转角场, 然后用已测得的弹性范围内的偏转角场测量了 SIF。提出了以裂纹尖端为未知量用迭代最小二乘法计算 SIF 的方法。实验测得的 SIF 受偏转角场展开项数的影响较大, 因此计算 SIF 时需考虑高阶项。并且由 φ_x 及 φ_y 均可准确计算出 SIF。用三点弯曲实验验证了所提出方法的有效性, 也为复合型裂纹的测量提供了一种方法。

参 考 文 献

- 1 Strassburger E. Ballistic testing of transparent armour ceramics [J]. J Eur Ceram Soc, 2009, 29(2): 267-273.
- 2 Patel P, Gilde G, Dehmer P, *et al.* Transparent armor [J]. AMPTIAC Quarterly, 2000, 4(3): 1-6.
- 3 Iwamoto S, Nakagatio A N, Yano H, *et al.* Optically transparent composites reinforced with plant fiber-based nanofibers [J]. Appl Phys A, 2005, 81(6): 1109-1112.
- 4 J K Sinha, H V Tippur, L M Xu. An interferometric and finite element investigation of interfacial crack tip fields: role of mode-mixity on 3-D stress variations [J]. Int J Solids Struct, 1997, 34(6): 741-754.
- 5 Arakawa K, Mada T, Takahashi K. Experimental analysis of dynamic effects in brittle fracture of PMMA [J]. Key Engineering Materials, 2000, 183-187: 265-270.
- 6 Dally J W, Barker D B. Dynamic measurements of initiation toughness at high loading rates [J]. Exp Mech, 1988, 28(3): 298-303.
- 7 Bless S, Chen T. Impact damage in layered glass [J]. Int J Fract, 2010, 162(1-2): 151-158.
- 8 Subhash G, Haney EJ. Analysis of interacting cracks due to sequential indentations on sapphire [J]. Acta Mater, 2011, 59 (9): 3528-3536.
- 9 W Xu, X F Yao, M Q Xu. Fracture characterizations of V-notch tip in PMMA polymer material [J]. Polymer Testing, 2004, 23(5): 509-515.

- 10 X F Yao, T C Xiong, W Xu. Experimental investigations on deformation and fracture behavior of glass sphere filled epoxy functionally graded materials [J]. *Appl Composite Mater*, 2006, 13(6): 407-420.
- 11 W Xu, X F Yao, M Q Xu. Fracture investigation of PMMA specimen using coherent gradient sensing (CGS) technology [J]. *Int J Solids and Structures*, 2006, 43(5): 1189-1200.
- 12 Periasamy C, Tippur H V. A full-field digital gradient sensing method for evaluating stress gradients in transparent solids [J]. *Appl Opt*, 2012, 51(12): 2088-2097.
- 13 Periasamy C, Tippur H V. Measurement of crack-tip and punch-tip transient deformations and stress intensity factors using digital gradient sensing technique [J]. *Eng Fract Mech*, 2013, 98: 185-199.
- 14 Hareesh V Tippur, Sridhar Krishnaswamy, Ares J Rosakis. Optical mapping of crack tip deformations using the methods of transmission and reflection coherent gradient sensing: a study of crack tip K-dominance [J]. *Int J Fract*, 1991, 52(2): 91-117.
- 15 McNeill S R, Peters W H, Sutton M A. Estimation of stress intensity factor by digital image correlation [J]. *Eng Fract Mech*, 1987, 28(1): 101-112.
- 16 S Yoneyama, T Ogawab, Y Kobayashib. Evaluating mixed-mode stress intensity factors from full-field displacement fields obtained by optical methods [J]. *Eng Fract Mech*, 2007, 74(9): 1399-1421.
- 17 Sanford R J. Application of the least-squares method to photoelastic analysis [J]. *Exp Mech*, 1980, 20(6): 192-197.
- 18 A J Rosakis, K Ravi-Chandra. *On Crack Tip Stress States and Experimental Evaluation of Three-Dimensional Effects* [R]. Pasadena: California Institute of Technology Report FM-84-2, 1984.
- 19 Janssen M, Zuidema J, Wanhill R J H. *Fracture Mechanics* (2nd ed.) [M]. London: Spon Press, 2006.