

偏心球对贝塞尔波束的散射特性研究

陈祝洋¹ 韩一平¹ 崔志伟¹ 史小卫²

¹西安电子科技大学物理与光电工程学院, 陕西 西安 710071

²西安电子科技大学天线与微波技术国家重点实验室, 陕西 西安 710071

摘要 基于广义洛伦兹米理论,研究了偏心球粒子对在轴入射零阶贝塞尔波束的散射。利用球矢量波函数展开,给出了空间各区域电磁场的展开形式以及远场散射场表达式,并利用电磁场的边界条件,给出了各系数关系形式。通过与面积分方程方法的数值结果对比,验证了理论的正确性。数值分析了波束锥型角、偏心球内核介质折射系数、偏心距、内核半径等波束、偏心球参数对远场散射的影响。

关键词 散射; 偏心球; 贝塞尔波束; 广义洛伦兹米理论

中图分类号 O43 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/LOP51.102901

Investigation on the Scattering of Bessel Beam by an Eccentric Sphere

Chen Zhuayang¹ Han Yiping¹ Cui Zhiwei¹ Shi Xiaowei²

¹School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China

²National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China

Abstract In the framework of the general Lorenz-Mie theory, the scattering of an on-axis incident zero-order Bessel beam by an eccentric sphere is investigated. The electric and magnetic fields in different regions are expanded in terms of the sphere vector wave functions. Utilizing the boundary conditions of electromagnetic field, the expressions of expansion coefficient equations are given. Numerical simulations about the effect of Bessel beam half-angle, eccentricity, refractive index of inner sphere, radius of inner sphere on scattering are analyzed in detail.

Key words scattering; eccentric sphere; Bessel beam; general Lorenz-Mie theory

OCIS codes 290.5850; 290.4020; 350.4990

1 引言

自Durnin等^[1-2]在1987年引入了无衍射波束概念,贝塞尔波束因其有着无衍射波束的特殊特征及重塑性在许多领域引起了广大科研工作者的兴趣,如粒子捕获与操控^[3-4],光学加速^[5-6],气溶胶探测^[7]等。在这些应用中,无疑都涉及到粒子的散射特性,而依赖于散射理论的技术已经在许多研究领域发挥着重要的作用。通过研究粒子的散射特性,粒子的物理特性,如尺寸、折射系数、温度等可以被快速准确的测量,而贝塞尔波束因其有着许多不同于传统光波束的特性,因此研究各类粒子对贝塞尔波束的散射特性有着重要的意义。

粒子对贝塞尔波束的散射特性,已经有不少学者进行了研究。Marston^[8-9]利用部分波展开方法研究了零阶贝塞尔波束的单球声散射特性,得出了刚性球或弹性球的后向、前向及等于锥型角的散射角方向的散射较强的结论,并从几何光学角度解释了这些结论的合理性。Mitri^[10-11]利用部分波级数分别研究了零阶、高阶贝塞尔波束的均匀球的任意电磁散射特性,利用积分方法计算相关的波束系数,分析了散射场的形式函数。国内的学者也做了不少相关研究, Ma等^[12]研究了零阶非极化贝塞尔波束的单球光散射,分析了无量纲

收稿日期: 2014-03-12; 收到修改稿日期: 2014-05-22; 网络出版日期: 2014-09-09

基金项目: 国家自然科学基金(61308026)、中央高校基本科研业务费(K5051307003)

作者简介: 陈祝洋(1985—),男,博士研究生,主要从事小粒子散射方面的研究。E-mail: zhuyangchen8@gmail.com

导师简介: 韩一平(1963—),女,教授,博士生导师,主要从事电磁波和光波在介质中的传播和散射,激光粒度分析及应用等方面的研究。E-mail: yphan@xidian.edu.cn

散射函数,得出了在等于锥型角或其附近的散射角方向存在着散射极值点的结论,并给出了这样的散射极值点的存在与否与球散射体及波束中心斑尺寸的关系,并从量子理论角度解释了这样的关系。Li等^[13]研究了轴棱锥产生的贝塞尔波束的球散射特性及彩虹特性,计算了远场散射强度,在其研究中利用德拜级数计算了散射系数。Qu等^[14]则进一步研究了单轴各向异性球对贝塞尔波束的散射特性,分析了不同参数对雷达散射截面的影响。

综上所述,贝塞尔波束的散射特性研究都局限于均匀单球。关于非均匀球对贝塞尔波束散射特性的研究还没有相关文献报道。然而自然界中存在着大量非均匀的含核粒子,例如植物与动物的细胞、孢子、大气中的悬浮颗粒等,它们都有着类似偏心球这样的几何结构,所以研究偏心球的散射特性有着一定的现实意义。一些学者对偏心球对高斯波束的散射特性作了研究,可以参考文献[15-17]。本文基于偏心球对平面波的散射^[18-21]研究了偏心球对贝塞尔波束的散射特性。采用了零阶贝塞尔波束,其有着贝塞尔波束的典型特征,且在实验中能较容易地得到。基于球矢量波函数展开及积分区域近似法^[22]推导了零阶贝塞尔波束的波束系数,给出了各空间区域电磁场的球矢量波函数展开形式,并给出了远场散射振幅。

2 偏心球粒子对贝塞尔波束散射理论

考虑一零阶贝塞尔波束照射到相对于背景复折射率分别为 m_1, m_2 (m_1 和 m_2 分别对应区域1、区域2介质相对于包围偏心球介质的负折射系数)偏心球上,其外球、内球半径分别为 a 和 b ,如图1所示。分别建立三个直角坐标系:波束坐标系 O_Buvw 、外球坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 、内球坐标系 $O_2x_2y_2z_2$ 。坐标系 O_Buvw 的原点设置在波束中心, w 的正向沿着波束传播方向, $O_1x_1y_1z_1$ 、 $O_2x_2y_2z_2$ 的原点分别设置在外球球心、内球球心, O_1 在 O_Buvw 的坐标为 $(0,0,z_0)$, 内外球坐标系的纵轴沿着两球连线并指向波束传播方向,内外球坐标系的横轴两两平行,与 $O_1x_1y_1z_1$ 、 $O_2x_2y_2z_2$ 相关联的球坐标为分别为 (R,θ,ϕ) 、 (R',θ',ϕ') 。两球心之间距离为 d (即偏心距为 d),并用1、2标记偏心球内的不同介质区域。根据上述定义波束坐标系 O_Buvw 与外球坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 的关系可以表示为

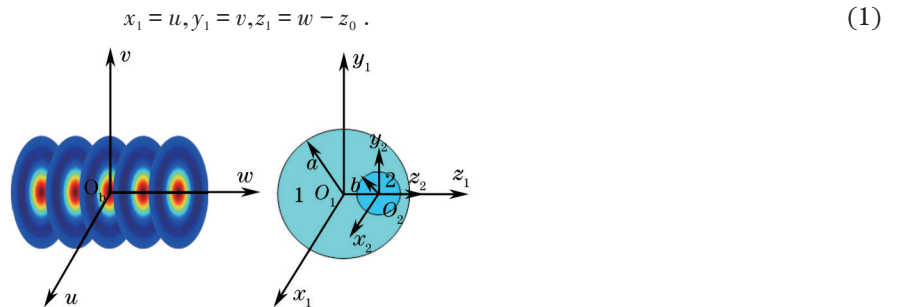


图1 偏心球对贝塞尔波束散射的几何示意图

Fig.1 Geometry for scattering of Bessel beam by an eccentric sphere

2.1 波束的描述

1991年,Mishra^[23]基于矢量无衍射理论推导出了一个严格满足麦克斯韦方程组的零阶贝塞尔波束的数学表达式。采用该表达形式研究贝塞尔波束入射下偏心球的散射特性是合理的。其具体的表述如下:

$$E_u = \frac{1}{2} E_0 \left[\left(1 + \frac{k_w}{k} - \frac{k_r^2 u^2}{k^2 r^2} \right) J_0(k, r) - \frac{k_r (v^2 - u^2)}{k^2 r^3} J_1(k, r) \right] \exp(ik_w w), \quad (2)$$

$$E_v = \frac{1}{2} E_0 uv \left[\frac{2k_r}{k^2 r^3} J_1(k, r) - \frac{k_r^2}{k^2 r^2} J_0(k, r) \right] \exp(ik_w w), \quad (3)$$

$$E_w = \frac{1}{2i} E_0 \frac{u}{kr} \left(1 + \frac{k_w}{k} \right) k_r J_1(k, r) \exp(ik_w w), \quad (4)$$

$$H_u = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} E_0 uv \left[\frac{2k_r}{k^2 r^3} J_1(k, r) - \frac{k_r^2}{k^2 r^2} J_0(k, r) \right] \exp(ik_w w), \quad (5)$$

$$H_v = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} E_0 \left[\left(1 + \frac{k_w}{k} - \frac{k_r^2 y^2}{k^2 r^2} \right) J_0(k_r r) - \frac{k_r (u^2 - v^2)}{k^2 r^3} J_1(k_r r) \right] \exp(ik_w w), \quad (6)$$

$$H_w = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2i} E_0 \frac{v}{kr} \left(1 + \frac{k_w}{k} \right) k_r J_1(k_r r) \exp(ik_w w), \quad (7)$$

式中 E_0 是电场强度的幅值, ε 是介质的介电常数, $k_r = k \sin \alpha$ 、 $k_w = k \cos \alpha$ 分别是横向波数、纵向波数, 其中 α 是贝塞尔波束的锥角。 $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ 是垂直于 w 轴面上的点到原点的径向距离, $J_{0,1}(\cdot)$ 分别表示第一类零阶、一阶柱贝塞尔函数。此外需要指出的是, 方便起见, 省去了负时间因子 $\exp(-i\omega t)$ 。

为了推导波束系数, 给出电磁场在坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 中的径向分量。利用波束坐标和外球坐标的(1)式关系及直角坐标系与球坐标的关系

$$R = [x, y, z] \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (8)$$

能容易地得到在坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 中电磁场的径向分量, 形式如下:

$$E_R = \frac{1}{2} E_0 \exp(ik_w z_0) \left[\sin \theta \cos \phi \left(1 + \frac{k_w}{k} - \frac{k_r^2}{2k^2} \right) J_0(k_r r) + \sin \theta \cos \phi \frac{k_r^2}{2k^2} J_2(k_r r) + \frac{1}{i} \cos \theta \cos \phi \frac{k_r}{k} \left(1 + \frac{k_w}{k} \right) J_1(k_r r) \right] \exp(ik_w z_1), \quad (9)$$

$$H_R = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} E_0 \exp(ik_w z_0) \left[\sin \theta \sin \phi \left(1 + \frac{k_w}{k} - \frac{k_r^2}{2k^2} \right) J_0(k_r r) + \sin \theta \sin \phi \frac{k_r^2}{2k^2} J_2(k_r r) + \frac{1}{i} \cos \theta \sin \phi \frac{k_r}{k} \left(1 + \frac{k_w}{k} \right) J_1(k_r r) \right] \exp(ik_w z_1). \quad (10)$$

需要指出的是, 在上述 E_R 、 H_R 的推导过程中, 运用了柱贝塞尔函数的递推关系式^[24]:

$$J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x). \quad (11)$$

2.2 球矢量波函数

考虑到在下面理论处理过程中需要利用球矢量波函数对电磁场进行展开, 给出如下的球矢量波函数的定义形式

$$\mathbf{M}_{mn}^{(\rho)} = z_n^{(\rho)} \left[\hat{\theta} \frac{im}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) - \hat{\phi} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \right] \exp(im\phi), \quad (12)$$

$$\mathbf{N}_{mn}^{(\rho)} = \left\{ \frac{n(n+1)}{kR} z_n^{(\rho)} P_n^m \hat{R} + \frac{1}{kR} (kR z_n^{(\rho)})' \left(\frac{d}{d\theta} P_n^m \hat{\theta} + \frac{im}{\sin \theta} P_n^m \hat{\phi} \right) \right\} \exp(im\phi), \quad (13)$$

式中 $z_n^{(\rho)}$ ($\rho = 1, 2, 3, 4$) 分别表示第一、第二、第三、第四类球贝塞尔函数 $j_n(kR)$, $y_n(kR)$, $h_n^{(1)}(kR)$ 及 $h_n^{(2)}(kR)$ 。 $P_n^m(\cos \theta)$ 是连带勒让德函数, 其与角函数 $\pi_{mn}(\cos \theta)$, $\tau_{mn}(\cos \theta)$ 有如下关系:

$$\pi_{mn} = \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad \tau_{mn} = \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta). \quad (14)$$

考虑到下文用球矢量波函数对各区域电磁场进行展开涉及到两个坐标系, 用 $\mathbf{N}_{mn,1}$, $\mathbf{M}_{mn,1}$ 表示坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 中的球矢量波函数, $\mathbf{N}_{mn,2}$, $\mathbf{M}_{mn,2}$ 表示坐标系 $O_2 x_2 y_2 z_2$ 中的球矢量波函数。

2.3 波束系数的推导

基于广义洛伦兹米理论^[25], 入射贝塞尔波束(右上标 i 表示入射场, 右下标 1 表示入射场展开所对应参考系为坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$) 可以利用球矢量波函数在坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 中展开为^[26]

$$\mathbf{E}_1^i = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[g_{n, TM}^m \mathbf{N}_{mn,1}^{(1)}(kR_1) + i g_{n, TE}^m \mathbf{M}_{mn,1}^{(1)}(kR_1) \right], \quad (15)$$

$$\mathbf{H}_1^i = \frac{kH_0}{i\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[i g_{n, TE}^m \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(kR_1) + g_{n, TM}^m \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(kR_1) \right], \quad (16)$$

式中 C_{mn} 是归一化常数,

$$C_{mn} = \begin{cases} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}, m \geq 0 \\ (-1)^{|m|} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}, m < 0 \end{cases}, \quad (17)$$

式中 $g_{n, TM}^m$ 、 $g_{n, TE}^m$ 为贝塞尔波束的球矢量波函数的展开系数, 是考虑了贝塞尔波束与平面波差别的特征参量, 即通常所说的波束系数。

在积分区域近似法中, 波束系数有下列的积分形式^[22]

$$\begin{bmatrix} g_{n, TM}^m \\ g_{n, TE}^m \end{bmatrix} = \frac{Z_n^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} E_R^{Loc}(R, \theta, \phi)/E_0 \\ H_R^{Loc}(R, \theta, \phi)/H_0 \end{bmatrix} \exp(-im\phi) d\phi, \quad (18)$$

式中

$$Z_n^m = \begin{cases} \frac{2n(n+1)i}{2n+1}, m = 0 \\ \left(\frac{-2i}{2n+1}\right)^{|m|-1}, m \neq 0 \end{cases}, \quad (19)$$

E_R^{Loc} 、 H_R^{Loc} 分别为径向电场 E_R 、磁场 H_R 的局部场。

对(9)、(10)式作变换 $kR \rightarrow n+1/2$ 、 $\theta \rightarrow \pi/2$, 可以得到:

$$E_R^{Loc}(R, \theta, \phi) = \frac{1}{2} E_0 \exp(ik_w z_0) \left[\left(1 + \frac{k_z}{k} - \frac{k_r^2}{2k^2}\right) J_0(\rho) \cos \phi + \frac{k_r^2}{2k^2} J_2(\rho) \cos \phi \right], \quad (20)$$

$$H_R^{Loc}(R, \theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} E_0 \exp(ik_w z_0) \left[\left(1 + \frac{k_z}{k} - \frac{k_r^2}{2k^2}\right) J_0(\rho) \sin \phi + \frac{k_r^2}{2k^2} J_2(\rho) \sin \phi \right], \quad (21)$$

式中

$$\rho = \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \alpha. \quad (22)$$

把(20)、(21)式代入到(18)式中, 利用指数函数及三角函数的正交性, 并作些代数运算, 可以得到在轴零阶贝塞尔波束的波束系数为

$$g_{n, TM}^{\pm 1} = \frac{1}{4} \exp(ik_w z_0) \left[\left(1 + \frac{k_z}{k} - \frac{k_r^2}{2k^2}\right) J_0(\rho) + \frac{k_r^2}{2k^2} J_2(\rho) \right], \quad (23)$$

$$g_{n, TM}^{|m| \neq 1} = 0, \quad (24)$$

$$g_{n, TE}^{\pm 1} = \mp i \frac{1}{4} \exp(ik_w z_0) \left[\left(1 + \frac{k_z}{k} - \frac{k_r^2}{2k^2}\right) J_0(\rho) + \frac{k_r^2}{2k^2} J_2(\rho) \right], \quad (25)$$

$$g_{n, TE}^{|m| \neq 1} = 0. \quad (26)$$

2.4 各部分场的展开

与入射场类似, 系统各部分场也可用球矢量波函数展开为类似形式。散射场(右上标 s 表示散射场)在坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 中可以展开为

$$\mathbf{E}_1^s = -E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[a_{mn} \mathbf{N}_{mn,1}^{(3)}(k\mathbf{R}_1) + ib_{mn} \mathbf{M}_{mn,1}^{(3)}(k\mathbf{R}_1) \right], \quad (27)$$

$$\mathbf{H}_1^s = -\frac{kH_0}{i\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[a_{mn} \mathbf{M}_{mn,1}^{(3)}(k\mathbf{R}_1) + ib_{mn} \mathbf{N}_{mn,1}^{(3)}(k\mathbf{R}_1) \right], \quad (28)$$

对于区域 1, 内部场可以在两个不同的坐标系中分别展开, 形式为

$$\mathbf{E}_1^{\text{int}1} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[d_{mn} \mathbf{N}_{mn,1}^{(3)}(k_1\mathbf{R}_1) + ic_{mn} \mathbf{M}_{mn,1}^{(3)}(k_1\mathbf{R}_1) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn,1}^{(4)}(k_1\mathbf{R}_1) + ie_{mn} \mathbf{M}_{mn,1}^{(4)}(k_1\mathbf{R}_1) \right], \quad (29)$$

$$\mathbf{H}_1^{\text{int}1} = \frac{k_1 H_0}{i\omega\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[d_{mn} \mathbf{M}_{mn,1}^{(3)}(k_1\mathbf{R}_1) + ic_{mn} \mathbf{N}_{mn,1}^{(3)}(k_1\mathbf{R}_1) + f_{mn} \mathbf{M}_{mn,1}^{(4)}(k_1\mathbf{R}_1) + ie_{mn} \mathbf{N}_{mn,1}^{(4)}(k_1\mathbf{R}_1) \right], \quad (30)$$

$$\mathbf{E}_2^{\text{int}1} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[d'_{mn} \mathbf{N}_{mn,2}^{(3)}(k_1\mathbf{R}_2) + ic'_{mn} \mathbf{M}_{mn,2}^{(3)}(k_1\mathbf{R}_2) + f'_{mn} \mathbf{N}_{mn,2}^{(4)}(k_1\mathbf{R}_2) + ie'_{mn} \mathbf{M}_{mn,2}^{(4)}(k_1\mathbf{R}_2) \right], \quad (31)$$

$$H_2^{\text{int}1} = \frac{k_1 H_0}{i\omega\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[d'_{mn} \mathbf{M}_{mn,2}^{(3)}(k_1 \mathbf{R}_2) + ic'_{mn} \mathbf{N}_{mn,2}^{(3)}(k_1 \mathbf{R}_2) + f'_{mn} \mathbf{M}_{mn,2}^{(4)}(k_1 \mathbf{R}_2) + ie'_{mn} \mathbf{N}_{mn,2}^{(4)}(k_1 \mathbf{R}_2) \right]. \quad (32)$$

对于区域2,内部场可以展开为

$$\mathbf{E}_2^{\text{int}2} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[g_{mn} \mathbf{N}_{mn,2}^{(1)}(k_2 \mathbf{R}_2) + ih_{mn} \mathbf{M}_{mn,2}^{(1)}(k_2 \mathbf{R}_2) \right], \quad (33)$$

$$\mathbf{H}_2^{\text{int}2} = \frac{k_2 H_0}{i\omega\mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} \left[g_{mn} \mathbf{M}_{mn,2}^{(1)}(k_2 \mathbf{R}_2) + ih_{mn} \mathbf{N}_{mn,2}^{(1)}(k_2 \mathbf{R}_2) \right]. \quad (34)$$

在坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 中对于边界 $R_1 = a$ 有下列形式的电磁场边界条件:

$$\mathbf{E}_{1,\theta}^i + \mathbf{E}_{1,\theta}^s = \mathbf{E}_{1,\theta}^{\text{int}1}, \quad \mathbf{E}_{1,\phi}^i + \mathbf{E}_{1,\phi}^s = \mathbf{E}_{1,\phi}^{\text{int}1}, \quad (35)$$

$$\mathbf{H}_{1,\theta}^i + \mathbf{H}_{1,\theta}^s = \mathbf{H}_{1,\theta}^{\text{int}1}, \quad \mathbf{H}_{1,\phi}^i + \mathbf{H}_{1,\phi}^s = \mathbf{H}_{1,\phi}^{\text{int}1}, \quad (36)$$

在坐标系 $O_2 x_2 y_2 z_2$ 中对于边界 $R_2 = b$ 有下列形式的电磁场边界条件:

$$\mathbf{E}_{2,\theta}^{\text{int}1} = \mathbf{E}_{2,\theta}^{\text{int}2}, \quad \mathbf{E}_{2,\phi}^{\text{int}1} = \mathbf{E}_{2,\phi}^{\text{int}2}, \quad (37)$$

$$\mathbf{H}_{2,\theta}^{\text{int}1} = \mathbf{H}_{2,\theta}^{\text{int}2}, \quad \mathbf{H}_{2,\phi}^{\text{int}1} = \mathbf{H}_{2,\phi}^{\text{int}2}. \quad (38)$$

对各区域电磁场展开形式相应的利用边界条件,能较容易地得到如下的系数关系等式:

$$\begin{bmatrix} k_1 \psi_n(ka) & -k_1 \xi_n^{(1)}(ka) \\ \psi_n'(ka) & -\xi_n^{(1)}(ka) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{n,TE}^m \\ b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \xi_n^{(1)}(k_1 a) & k \xi_n^{(2)}(k_1 a) \\ \xi_n^{(1)}(k_1 a) & \xi_n^{(2)}(k_1 a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{mn} \\ e_{mn} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \psi_n'(ka) & -k_1 \xi_n^{(1)}(ka) \\ \psi_n(ka) & -\xi_n^{(1)}(ka) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{n,TM}^m \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \xi_n^{(1)}(k_1 a) & k \xi_n^{(2)}(k_1 a) \\ \xi_n^{(1)}(k_1 a) & \xi_n^{(2)}(k_1 a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{mn} \\ f_{mn} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$g_{mn} \begin{bmatrix} k_1 \psi_n'(k_2 b) \\ \psi_n(k_2 b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 \xi_n^{(1)}(k_1 b) & k_2 \xi_n^{(2)}(k_1 b) \\ \xi_n^{(1)}(k_1 b) & \xi_n^{(2)}(k_1 b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{mn} \\ f'_{mn} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$h_{mn} \begin{bmatrix} k_1 \psi_n(k_2 b) \\ \psi_n'(k_2 b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 \xi_n^{(1)}(k_1 b) & k_2 \xi_n^{(2)}(k_1 b) \\ \xi_n^{(1)}(k_1 b) & \xi_n^{(2)}(k_1 b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_{mn} \\ e'_{mn} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

式中瑞卡提-贝塞尔函数定义如下:

$$\psi_n(kR) = kR j_n(kR), \quad \xi_n^{(1)}(kR) = kR h_n^{(1)}(kR), \quad \xi_n^{(2)}(kR) = kR h_n^{(2)}(kR). \quad (43)$$

需指出的是,在该研究中默认了各区域介质磁导率关系为 $\mu = \mu_1 = \mu_2$ 。

考虑到(39)、(40)式对应坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$,而(41)、(42)式对应坐标系 $O_2 x_2 y_2 z_2$,要想利用之计算各系数,需要引入不同坐标系之间球矢量波函数的转换关系,也即球矢量波函数的平移加法定理^[27-29],从而把这两组关系式统一到一个坐标系统中。对于坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 和 $O_2 x_2 y_2 z_2$ 之间的球矢量波函数的平移加法定理具体表述为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{mn,2}^{(j)}(k_1 \mathbf{R}_2) \\ \mathbf{M}_{mn,2}^{(j)}(k_1 \mathbf{R}_2) \end{bmatrix} = \sum_{v=1}^{\infty} \begin{bmatrix} B_{mv}^{mn,j} & A_{mv}^{mn,j} \\ A_{mv}^{mn,j} & B_{mv}^{mn,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mv,1}^{(j)}(k_1 \mathbf{R}_1) \\ \mathbf{N}_{mv,1}^{(j)}(k_1 \mathbf{R}_1) \end{bmatrix}, \quad (44)$$

式中 $A_{n',n}^{(m,j)}$ 、 $B_{n',n}^{(m,j)}$ 为转换系数, $j=1,2,3,4$,其具体形式可以参考文献[18]。把(44)式代入到(31)、(32)式,并和(29)、(30)比较可以得到系数 d_{mn} 、 c_{mn} 、 f_{mn} 、 e_{mn} 与系数 d'_{mn} 、 c'_{mn} 、 f'_{mn} 、 e'_{mn} 的关系如下:

$$C_{mn} \begin{bmatrix} d_{mn} \\ ic_{mn} \end{bmatrix} = \sum_{v=1}^{\infty} C_{mv} \begin{bmatrix} d'_{mv} & ic'_{mv} \\ ic'_{mv} & d'_{mv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn}^{mv,5} \\ B_{mn}^{mv,3} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$C_{mn} \begin{bmatrix} f_{mn} \\ ie_{mn} \end{bmatrix} = \sum_{v=1}^{\infty} C_{mv} \begin{bmatrix} f'_{mv} & ie'_{mv} \\ ie'_{mv} & f'_{mv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn}^{mv,4} \\ B_{mn}^{mv,4} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

对于远场区域来说, $kR_1 \gg ka$,Hankel函数可以近似表示为

$$h_n^{(1)}(kR_1) \approx \frac{(-i)^n \exp(ikR_1)}{ikR_1}, \quad (47)$$

此时散射电场(27)式只有 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\phi}$ 分量,即总场为 $|E^{\text{sca}}|^2 = |E_{\theta}^{\text{sca}}|^2 + |E_{\phi}^{\text{sca}}|^2$ 。散射振幅可以表示为

$$\begin{bmatrix} E_{\phi}^s \\ E_{\theta}^s \end{bmatrix} = \frac{E_0 \exp(ikR_1)}{kR_1} \begin{bmatrix} -S_1 \\ iS_2 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

式中

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} C_{mn} (a_{mn} m \pi_n^m + i b_{mn} \tau_n^m) \exp(im\phi), \quad (49)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} C_{mn} (a_{mn} \tau_n^m + i b_{mn} m \pi_n^m) \exp(im\phi). \quad (50)$$

3 数值模拟与分析

基于上面所述理论,在这一部分将对贝塞尔波束入射下偏心球的散射进行数值模拟,并做详细的分析。定义微分散射截面为

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} |S|^2, \quad (51)$$

对于此定义,当 $S=S_1$ 及 $S=S_2$ 时, σ 分别对应 E -面、 H -面的微分散射截面。其中 E -面、 H -面分别对应坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 中的 $x_1o_1z_1$ 面、 $y_1o_1z_1$ 面。

方便起见,下面的讨论中设定波束的波长为 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, $z_0 = 0$, 另外在没有特别说明的情况下,波束锥型角采用 $\alpha = 10^\circ$ 。为检验理论的正确性,利用基于面积分方程的数值方法(SIEM)模拟偏心球对零阶贝塞尔波束的微分散射截面,并与数值结果进行了比较,比较结果如图2所示。所用参数分别为 $\alpha = 15^\circ$, $a = \lambda$, $b = 0.5\lambda$, $d = 0.25\lambda$ 。从图2可以看出,结果与利用面积分方程所计算的数值结果吻合的比较好,这样充分说明了第三部分所述理论的正确性。在理论的正确性得到验证后,数值模拟了一系列参数对偏心球对贝塞尔波束的散射特性的影响,这些参数包括波束的锥型角、偏心距、内球的折射系数、内球的半径。

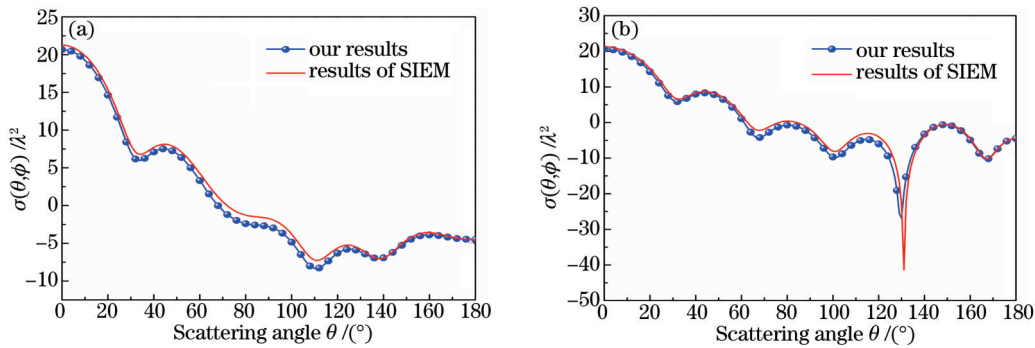


图2 基于本文理论结果与面积分数值结果的比较。(a) E -面; (b) H -面

Fig.2 Comparison of the DSCS for an eccentric sphere obtained from the present theory and that from the SIEM.

(a) E -plane; (b) H -plane

图3所示为贝塞尔波束的锥型角变化对微分散射截面角分布的影响。采用参数为 $a = 2\lambda$, $b = \lambda$, $d = 0.3 \mu\text{m}$, $m_1 = 1.33$, $m_2 = 1.55$ 。从图3可看出,波束锥型角的变化对微分散射截面有较大的影响,随着波束锥型角的变大,微分散射截面变小。需要指出的是 $\alpha = 0^\circ$ 时,贝塞尔波束退化为平面波。可以看出波束的微分散射截面是比平面波情况时小,这是因为波束系数的缘故。

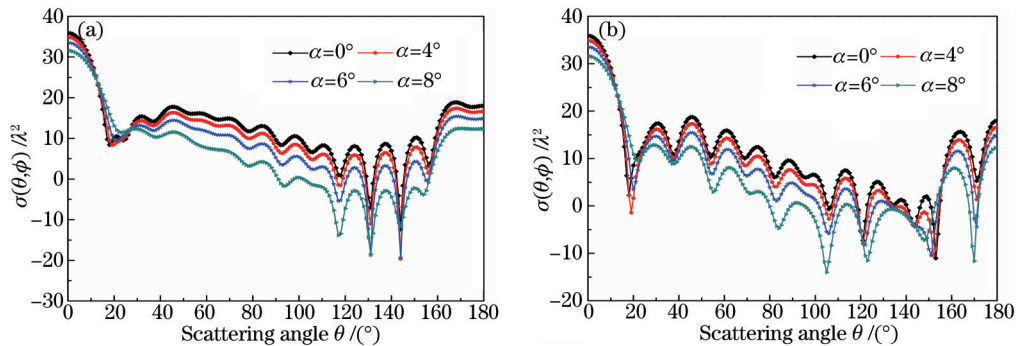


图3 波束锥型角对微分散射截面的影响。(a) E -面; (b) H -面

Fig.3 Effect of the half-cone angle on DSCS. (a) E -plane; (b) H -plane

图4所示为偏心球的内球介质相对折射系数变化对微分散射截面角分布的影响。所用参数分别为 $a = 2\lambda$, $b = \lambda$, $d = 0.3 \mu\text{m}$, $m_1 = 1.33$ 。从图4可看出,对于 E -面,在 $135^\circ < \theta \ll 180^\circ$ 范围内的散射角所对应的微分散射截面的变化要明显大于其他散射角所对应的微分散射截面的变化;对于 H -面,在 $140^\circ < \theta \ll 180^\circ$ 范围内的散射角所对应的微分散射截面的变化要明显大于其他散射角所对应的微分散射截面的变化。

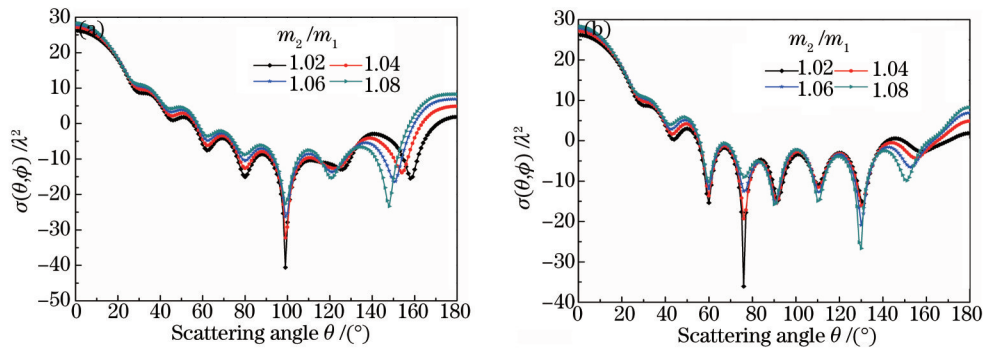


图4 内球介质折射系数对微分散射截面的影响。(a) E -面;(b) H -面

Fig.4 Effect of refractive index of medium in the inner sphere on DSCS. (a) E -plane; (b) H -plane

图5所示为偏心距对微分散射截面角分布的影响。所用参数 $a = 2\lambda$, $b = \lambda$, $m_1 = 1.33$, $m_2 = 1.55$ 。从图5可看出,偏心距的变化对前向散射及其附近的散射角所对应散射影响微弱,而对后向散射及其他区域则有较大的影响,这种影响不但表现在改变极值点所对应的散射角位置,还改变相应峰值的大小。另外, H -面的散射相对于 E -面对偏心距的变化更为敏感。

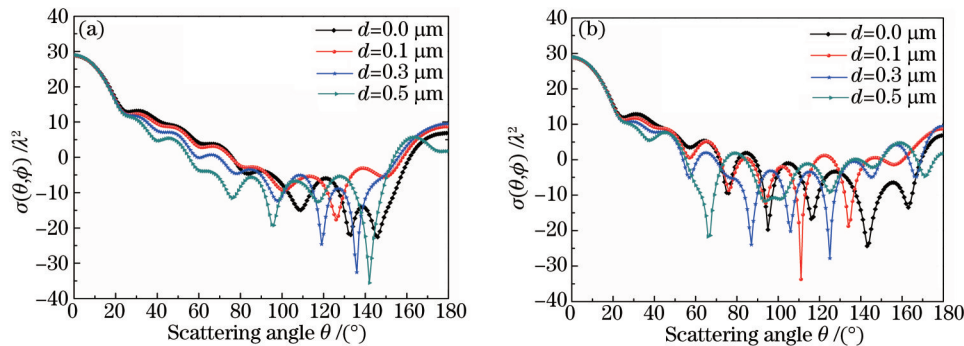


图5 偏心距对微分散射截面的影响。(a) E -面;(b) H -面

Fig.5 Effect of eccentricity of the eccentric sphere on DSCS. (a) E -plane; (b) H -plane

图6所示为偏心球的内球半径变化对微分散射截面角分布的影响。所用参数: $a = 2\lambda$, $d = 0.3 \mu\text{m}$, $m_1 = 1.33$, $m_2 = 1.55$ 。从图6可看出,偏心球的内球半径的变化对整个微分散射截面的散射角分布有着很大的影响,其大幅改变微分散射截面角分布曲线变化,对曲线极值点出现位置及幅值的大小有着较大的影响。

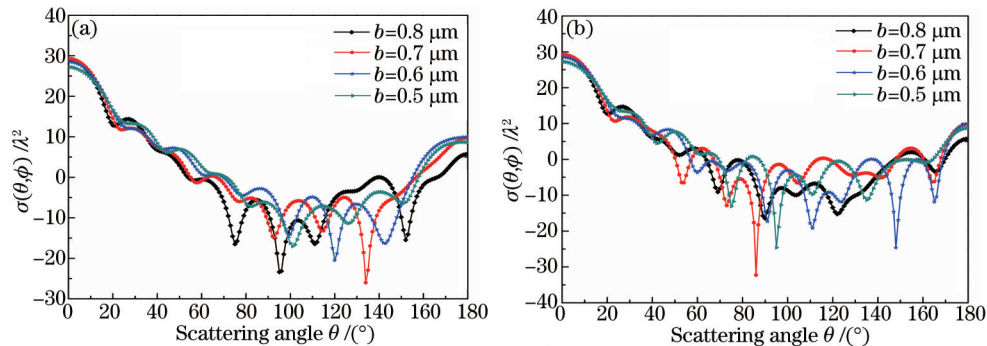


图6 内球半径对微分散射截面的影响。(a) E -面;(b) H -面

Fig.6 Effect of the inner sphere radius on DSCS. (a) E -plane; (b) H -plane

4 结 论

基于平面波入射下的偏心球散射及广义洛伦兹米理论,研究了偏心球对零阶贝塞尔波束的散射特性。利用积分区域近似法,推导了零阶贝塞尔波束的波束系数。数值模拟了贝塞尔波束在轴入射下的偏心球散射场,并与平面波进行了比较。讨论了贝塞尔波束锥型角、偏心球的偏心距、内核相对折射系数、内核半径对偏心球对波束散射特性的影响。研究对于偏心球粒子参数测量提供了依据,同时也对更复杂粒子的贝塞尔波束散射特性研究提供了一定的参考依据。

参 考 文 献

- 1 Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams: I. The scalar theory[J]. *J Opt Soc Am A*, 1987, 4(4): 651-654.
- 2 Durnin J, Miceli J Jr, Eberly J H. Diffraction-free beams[J]. *Phys Rev Lett*, 1987, 58(15): 1499-1501.
- 3 Arlt J, Garcés-Chavez V, Sibbett W, *et al.* Optical micromanipulation using a Bessel light beams[J]. *Opt Commun*, 2001, 197(4): 239-245.
- 4 Tao S H, Lee W M, Yuan X C. Dynamic optical manipulation with a higher-order fractional Bessel beam generated from a spatial light modulator[J]. *Opt Lett*, 2003, 28(20): 1867-1869.
- 5 Hafizi B, Esarey E, Sprangle P. Laser-driven acceleration with Bessel beams[J]. *Phys Rev E*, 1997, 55(3): 3539.
- 6 Li D, Imasaki K. Vacuum laser-driven acceleration by a slits-truncated Bessel beam[J]. *Appl Phys Lett*, 2005, 86(3): 031110.
- 7 Carruthers A E, Walker J S, Casery A. Selection and characterization of aerosol particle size using a Bessel beam optical trap for single particle analysis[J]. *Phys Chem Chem Phys*, 2012, 14(19): 6741-6748.
- 8 Marston P L. Scattering of a Bessel beam by a sphere[J]. *J Acoust Soc Am*, 2007, 121(2): 753-758.
- 9 Marston P L. Scattering of a Bessel beam by a sphere: II. Helicoidal case and spherical shell example[J]. *J Acoust Soc Am*, 2008, 124(5): 2905-2910.
- 10 Mitri F G. Arbitrary scattering of an electromagnetic zero-order Bessel beams by a dielectric sphere[J]. *Opt Lett*, 2011, 36(5): 766-768.
- 11 Mitri F G. Electromagnetic wave scattering of a high-order Bessel vortex beam by a dielectric sphere[J]. *IEEE T Antenn Propag*, 2011, 59(11): 4375-4379.
- 12 Xiubo Ma, Enbang Li. Scattering of an unpolarized Bessel beam by a sphere[J]. *Chin Opt Lett*, 2010, 8(12): 1195-1198.
- 13 Li Renxian, Guo Lixin, Ding Chunying, *et al.* Scattering of an axicon-generated Bessel beam by sphere[J]. *Opt Commun*, 2013, 307: 25-31.
- 14 Qu Tan, Wu Zhensen, Shang Qinchao, *et al.* Electromagnetic scattering by a uniaxial anisotropic sphere located in an off-axis Bessel beam[J]. *J Opt Soc Am A*, 2013, 30(8): 1661-1669.
- 15 Han Guoxia, Han Yiping, Liu Jianyong, *et al.* Scattering of an eccentric sphere arbitrarily located in a shaped beam[J]. *J Opt Soc Am B*, 2008, 5(12): 2064-2072.
- 16 Yan Bing, Han Xiang'e, Ren Kuanfang. Scattering of a shaped beam by a spherical particle with an eccentric spherical inclusion[J]. *J Opt A: Pure Appl Opt*, 2009, 11(1): 015705.
- 17 Wang J J, Gouesbet G, Han Y P, *et al.* Study of scattering from a sphere with an eccentrically located spherical inclusion by generalized Lorenz - Mie theory: internal and external field distribution[J]. *J Opt Soc Am A*, 2011, 28(1): 24-39.
- 18 Fikioris J G, Uzunoglu N K. Scattering from an eccentrically stratified dielectric sphere[J]. *J Opt Soc Am*, 1979, 69(10): 1359-1366.
- 19 Borghese F, Denti P, Saija R. Optical properties of spheres containing a spherical eccentric inclusion[J]. *J Opt Soc Am A*, 1992, 9(8): 1327-1335.
- 20 Skaropoulos N C, Ioannidou M P, Chrissoulidis D P. Indirect mode-matching solution to scattering from a dielectric sphere with an eccentric inclusion[J]. *J Opt Soc Am A*, 1994, 11(6): 1859-1866.
- 21 Ngo D, Videen G, Chylek P. A Fortran code for the scattering of EM waves by a sphere with a nonconcentric spherical inclusion[J]. *Comput Phys Commun*, 1996, 99(1): 94-112.
- 22 Ren K F, Gouesbet G, Grehan G. Integral localized approximation in generalized Lorenz-Mie theory[J]. *Appl Opt*, 1998, 37(19): 4218-4225.

- 23 Mishra S R. A vector wave analysis of a Bessel beam[J]. Opt Commun, 1991, 85(2): 159-161.
- 24 Wang Zhuxi, Guo Dunren. Introduce to Special Function[M]. Beijing: Peking University Press, 2000. 341.
王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000. 341.
- 25 Lock J A, Gouesbet G. Generalized Lorenz - Mie theory and applications[J]. J Quant Spectrosc Radiat Transfer, 2009, 110(11): 800-807.
- 26 Doicu A, Wriedt T. Computation of the beam-shape coefficients in the generalized Lorenz-Mie theory by using the translational addition theorem for spherical vector wave functions[J]. Appl Opt, 1997, 36(13): 2971-2978.
- 27 Stein S. Addition theorems for spherical wave functions[J]. Q Appl Math, 1961, 19(1): 15-24.
- 28 Cruzan O R. Translational addition theorems for spherical vector wave functions[J]. Q Appl Math, 1962, 20(1): 33-40.
- 29 Bobber P A, Vlieger J. Light scattering by a sphere on a substrate[J]. Physica A, 1986, 137(1): 209-242.