

# 基于分数阶傅里叶变换的相位恢复

崔文达 杜少军

(国防科学技术大学光电科学与技术学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要** 为了在弱光条件下由光场的强度分布求得其相位分布,利用分数阶傅里叶变换与光学系统之间的关系,基于 Gerchberg-Saxton 算法研究了 Zernike 相差的恢复问题,并进行了数值模拟。通过研究分数阶傅里叶变换与非涅耳衍射之间的关系,改进了 Lohmann 光学系统;基于小波理论初步分析了非涅耳近场与远场输出面对高频和低频成分恢复效果的影响。数值模拟结果表明该算法有良好的收敛性和恢复精度,均方根误差(RMSE)值均保持在  $0.15\lambda$  ( $\lambda$  为光波长)以下,且位于非涅耳衍射近场的输出面对相位的高频部分恢复效果较好,位于远场的输出面对低频部分恢复效果较好。

**关键词** 图像处理;相位恢复;分数阶傅里叶变换;小波变换;数值模拟

**中图分类号** O436 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/LOP50.091003

## Phase Retrieval Based on Fractional Fourier Transform

Cui Wenda Du Shaojun

(College of Optoelectronics Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

**Abstract** In order to obtain the phase distribution from the intensity distribution of the light field in low-light conditions, we investigate the Zernike phase retrieval based on the Gerchberg-Saxton algorithm using the fractional Fourier transform and the corresponding optical system. By studying the relationship between fractional Fourier transform and Fresnel diffraction, the Lohmann optical system is improved. How the Fresnel near-field and far-field outputs influence the high and low frequency parts of phase recovery is analyzed based on wavelet theory. The numerical results show that the algorithm has good convergence and recovery accuracy with root-mean-square error (RMSE) less than  $0.15\lambda$  ( $\lambda$  is the wavelength). When the outputting planes are placed in the Fresnel near-field, the high-frequency part of the recovery phase is better, while when they are placed in the far-field, the low-frequency part is better.

**Key words** image processing; phase retrieval; fractional Fourier transform; wavelet transform; numerical simulation

**OCIS codes** 100.5070; 100.7410; 070.2575; 200.4546

## 1 引言

20 世纪 80 年代,研究人员开始利用分数阶傅里叶变换的方法解决量子力学问题,至 20 世纪 90 年代, Mondlavic 等<sup>[1]</sup>首次将分数阶傅里叶变换引入光学研究领域。此后,研究人员进一步研究了分数傅里叶变换在光信号处理等领域中的应用<sup>[2]</sup>、在梯度折射率(GRIN)介质中的实现以及数值计算等问题<sup>[3-4]</sup>。Lohmann 等<sup>[5-6]</sup>则提出利用简单的单透镜和双透镜系统实现分数阶傅里叶变换,即 Lohmann I、Lohmann II 光学结构<sup>[7]</sup>。

一般的相位恢复算法需要在输出面之间进行迭代计算,得到某一面的相位分布,然后逆向推导出输入面的相位分布,输出面之间的迭代通过角谱传播或者非涅耳衍射等理论进行<sup>[8-9]</sup>。而分数阶傅里叶变换用于输出面之间的迭代,由于不同测量面分别对应相应级次的分数阶傅里叶变换,所以可以直接改变分数阶傅里

**收稿日期:** 2013-01-06; **收到修改稿日期:** 2013-03-01; **网络出版日期:** 2013-06-07

**作者简介:** 崔文达(1988—),男,硕士研究生,主要从事自适应光学方面的研究。E-mail: cui\_wenda@126.com

**导师简介:** 杜少军(1972—),男,研究员,主要从事高能激光技术方面的研究。E-mail: d\_sj@tom.com(通信联系人)

叶变换级次实现输出面之间的迭代<sup>[10-11]</sup>。通常的恢复模型基于基本的 Lohmann I、Lohmann II 光学结构,在实际的光学系统中应用并不方便<sup>[12]</sup>。本文使用了一种更一般的光学结构以实现分数阶傅里叶变换,在实际应用中具有良好的普适性。

测量面位置的选取是相位恢复算法中十分重要的方面。由于分数阶傅里叶变换的级次与测量面的位置是一一对应的,此问题也可转化为分数阶傅里叶变换的级次对恢复效果的影响。相关文献对此问题的研究基本采用选取多个级次进行数值模拟的方法<sup>[10-13]</sup>。本文从小波变换的角度对测量面位置的选取进行了初步分析,可为进一步提高相位恢复算法的精度提供参考。

## 2 分数阶傅里叶变换的光学实现

Lohmann I 光学结构的输入面与输出面是对称分布在透镜两侧的,在实际应用中有时无法满足此项条件,因此我们将 Lohmann I 结构进行推广,使其仅需改变输出面的位置即可得到相应的分数阶傅里叶变换。

如图 1 所示,输入面 RP1 位于透镜前表面,输出面 RP2 位于透镜后某一位置  $z$  处,两平面之间的光学传输矩阵为

$$\mathbf{M}_{p/q} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - z/f & z \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

代入 Collins 公式可得

$$E_2(x_2, y_2) = -\frac{i}{\lambda B} \exp(ikl_0) \iint E_1(x_1, y_1) \exp\left\{i \frac{k}{2z} \left[ \left(1 - \frac{z}{f}\right)(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \right]\right\} dx_1 dy_1. \quad (2)$$

分数阶傅里叶变换的表达式可化为

$$E_2(x_2, y_2) = -\frac{i \exp(ikl_0)}{\lambda f \sin\left(\frac{p\pi}{2q}\right)} \iint E_1(x_1, y_1) \times \exp\left\{i \frac{k}{2f} \left[ \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{\tan\left(\frac{p\pi}{2q}\right)} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)}{\sin\left(\frac{p\pi}{2q}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right)} - \frac{2(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{\sin\left(\frac{p\pi}{2q}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right)} \right]\right\} dx_1 dy_1. \quad (3)$$

当  $\frac{p}{q} \neq 0$  时,比较(1)式与(3)式易得

$$f \tan\left(\frac{p\pi}{2q}\right) = \frac{fz}{f-z}, \quad (4)$$

$$f \sin\left(\frac{p\pi}{2q}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right) = z, \quad (5)$$

$$x_2' = x_2 \cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right), \quad (6)$$

$$y_2' = y_2 \cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right). \quad (7)$$

在(4)~(7)式成立的条件下,(2)式可转化为类似分数阶傅里叶变换的形式。以上推导过程表明图 1 所示的光学结构可以实现对输入面的分数阶傅里叶变换。综合(4)~(7)式可以得到分数阶傅里叶变换阶次与距离  $z$  之间的关系式:

$$z = f \sin^2\left(\frac{p\pi}{2q}\right). \quad (8)$$

(8)式表明分数阶傅里叶变换的级次与传输距离及透镜焦距有关,在此推广模型中,仅需改变输出面的位置即可得到相应级次的分数阶傅里叶变换图像,此模型更加符合实际应用情形。通过改变  $z$  的值,能够得

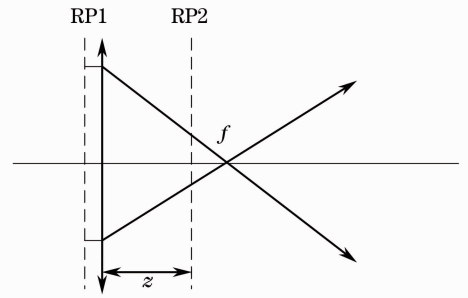


图 1 改进光学系统

Fig. 1 Improved optical system

到不同级次的分数阶傅里叶变换,实际的光学系统与分数阶傅里叶变换紧密地结合了起来。对于相位恢复的数值模拟过程,每一输出面均对应着输入面相应级次的分数阶傅里叶变换,因此输入面与输出面之间以及输出面之间通过分数阶傅里叶变换的级次相互关联,这对简化相位恢复的迭代过程、提高算法效率有重要作用。

### 3 输出面位置

输出面的选取是相位恢复问题的重点之一。一般来说,选取的输出面越多,获得的强度信息越多,所得的相位恢复精度就越高。但是考虑到计算机性能及计算时间的限制,实际应用中选取的测量面通常是有限的,这就要求我们以较少的测量面获得相对精确的结果。由此,在数量有限的情况下,输出面位置的选取成为影响计算结果精确度的关键。

角谱传输理论表明:任一光场可看作不同空间频率的平面波的集合,这些频率的分布可用输入光场的傅里叶变换谱表示,其中高频部分代表细节,低频部分则代表其轮廓。若能够首先恢复输入面的轮廓,然后进一步恢复其细节,无疑会提高算法的效率及适用性。

本文所示的光学系统中,透镜焦点处即为输入面的傅里叶变换谱,下面将讨论不同级次的分数阶傅里叶变换谱的特点。实际上,分数阶傅里叶变换可以看作一种小波变换,以一维分数阶傅里叶变换为例:

$$E_2(x_2, y_2) = C \int E_1(x_1, y_1) \exp \left\{ i \frac{k}{2f \sin\left(\frac{p\pi}{2q}\right)} \left[ \cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right) x_1^2 + \cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right) x_2^2 - 2x_1 x_2 \right] \right\} dx_1 = C \exp \left[ \frac{-ikx_2^2 \tan\left(\frac{p\pi}{2q}\right)}{2f} \right] \int E_1(x_1, y_1) \exp \left\{ i\pi \left[ \frac{x_1 - x_2 / \cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right)}{\sqrt{\lambda f \tan\left(\frac{p\pi}{2q}\right)}} \right]^2 \right\} dx_1. \quad (9)$$

由(9)式可知,分数阶傅里叶变换可看作是母函数为  $\exp(i\pi x^2)$ , 尺度变换因子为  $\sqrt{\lambda f \tan\left(\frac{p\pi}{2q}\right)}$ , 平移参量为  $\frac{x_2}{\cos(p\pi/2q)}$  的小波变换。

根据小波变换理论,尺度因子可以表征小波变换的频率范围。尺度因子越大,小波变化越缓慢,高频成分越少而低频成分越多;尺度因子越小,小波变化越迅速,高频成分越多而低频成分越少。由尺度因子的表达式易知,在光学系统其他参数不变的情况下,尺度因子随分数阶傅里叶变换级次的增大而增大。因此,可以认为在非涅耳衍射近场,分数阶傅里叶变换级次较小,输出面受光场高频部分影响较大;在非涅耳衍射远场,分数阶傅里叶变换级次较大,输出面受光场低频部分影响较大。

综上所述,我们可利用输入面与位于远菲涅耳衍射区的输出面恢复输入面相位分布的轮廓,利用输入面与位于近菲涅耳衍射区的输出面恢复输入面相位分布的细节<sup>[12,14]</sup>。

### 4 算法流程

Gerchberg-Saxton 算法是相位恢复研究中的经典算法之一,本文将其推广到分数阶傅里叶变换域中,利用多个面的强度信息恢复输入面的相位。设二维光场表达式为

$$E(x, y) = A(x, y) \exp[i\varphi(x, y)], \quad (10)$$

对其进行级次为  $a$  的分数傅里叶变换后表达式为

$$E^a(x, y) = A^a(x, y) \exp[i\varphi^a(x, y)]. \quad (11)$$

如图 2 所示,平面 1、2、3、4 分别是平面 0 相应级次的分数阶傅里叶变换且强度已知。给定各测量面的强度信息  $I_k, A_k = \sqrt{I_k} (k = 1, 2, 3, 4)$ , 设初始相位为  $\varphi_0$ , 初始振幅为  $A_0$ , 入射光瞳的光场为  $E_0(x, y) = A_0(x, y) \exp[ik\varphi_0(x, y)]$ , 迭代次数为  $n$ 。

首先进行平面 0 与平面 1 之间的迭代:

1) 对  $E_0(x, y)$  进行  $a_1$  阶分数傅里叶变换, 得到  $E_1^{a_1}(x, y) = A_1^{a_1}(x, y) \exp[i\varphi_1^{a_1}(x, y)], a_1 =$

$\frac{2}{\pi} \sqrt{\arcsin[\text{abs}(l_1/f)]}$ ,  $l_1$  为平面 1 距透镜的距离,  $\text{abs}$  表示绝对值。

2) 令  $E_1^{a_1}(x, y) = A_1(x, y)\exp[i\varphi_1^{a_1}(x, y)]$ , 其中

$A_1 = \sqrt{I_1}$  为施加的空间域限制;

3) 对光场  $E_1^{a_1}(x, y)$  进行  $-a_1$  阶傅里叶变换, 得到  $E_0(x, y) = A_1^{-a_1}(x, y)\exp[i\varphi_1^{-a_1}(x, y)]$ ;

4) 令  $E_0(x, y) = A_0(x, y)\exp[i\varphi_0^{-a_1}(x, y)]$ ;

5) 重复步骤 1)~4)  $n$  次。

同理, 可以按照以上方式分别进行入射光瞳与平面 2、3、4 之间的迭代。

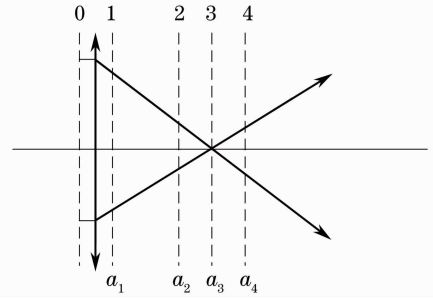


图 2 数值模拟示意图

Fig. 2 Schematic diagram of numerical simulation

## 5 数值模拟结果

数值模拟使用的光学系统如图 2 所示。透镜焦距  $f=1000$  mm, 直径  $D=25$  mm, 所选波长  $\lambda=632.8$  nm, 4 个测量面距透镜距离为  $l_1=300$  mm,  $l_2=600$  mm,  $l_3=1000$  mm,  $l_4=1500$  mm。构造一个 Zernike 相差作为输入面相位分布, 分辨率为  $N \times N$ 。

采用均方根误差 (RMSE) 指标评价相位恢复的误差, 定义如下:

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\sum_{m,n} [\varphi_a(m, n) - \varphi(m, n) - a]^2}{N \times N}}, \quad (12)$$

$$a = \frac{\sum_{m,n} \varphi_a(m, n) - \varphi(m, n)}{N \times N}. \quad (13)$$

实际振幅与相位分布如图 3 所示, 相位分布取某一阶次的 Zernike 相差 (图中为 7 阶)。初始振幅、相位分布如图 4 所示, 在本算法中我们假设瞳面尺寸已知, 强度分布未知, 分别对初始相位为 0 和随机分布两种情形进行了模拟计算。迭代次数为 300 次, 分别取 2 阶、7 阶、20 阶的 Zernike 相差作为输入相位分布, 选取 4 个测量面至透镜的距离分别为  $l_1=300$  mm,  $l_2=600$  mm,  $l_3=1000$  mm,  $l_4=1500$  mm, 相应的分数傅里叶变换级次为  $a_1=0.3711$ ,  $a_2=0.6881$ ,  $a_3=1$ ,  $a_4=1.2513$ , 初始振幅与相位均为随机分布, 输入相位与恢复相位分布如图 5 所示。

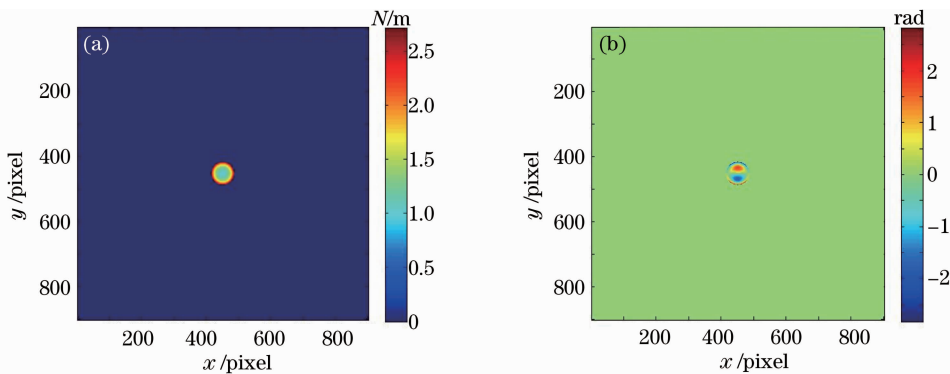


图 3 输入面上的振幅与相位扰动。(a) 实际振幅分布; (b) 实际相位分布

Fig. 3 Inputting amplitude and phase distribution. (a) Amplitude distribution; (b) phase distribution

输入面的相位波动范围为  $1\lambda$ , 恢复相位的均方根相对误差约为  $E_{\text{RMS1}}=0.05\lambda$ ,  $E_{\text{RMS2}}=0.10\lambda$ ,  $E_{\text{RMS3}}=0.11\lambda$ 。可以看到在分数阶傅里叶变换级次不变的情况下不同阶的 Zernike 相差恢复精度不同。

由图 6 可以看出, 相同的傅里叶级次, 对低阶 Zernike 相差恢复效果较好, 对高阶的 Zernike 相差恢复效

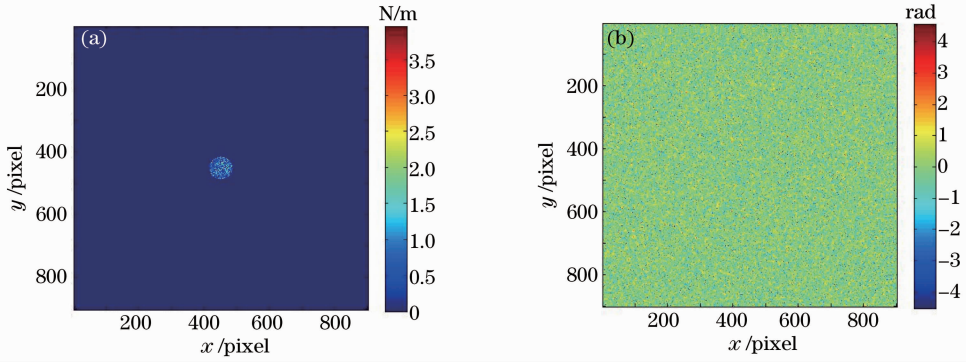


图4 振幅与相位的迭代初始分布。(a)初始振幅;(b)初始相位

Fig. 4 Initial distributions of amplitude and phase for iteration. (a) Amplitude distribution; (b) phase distribution

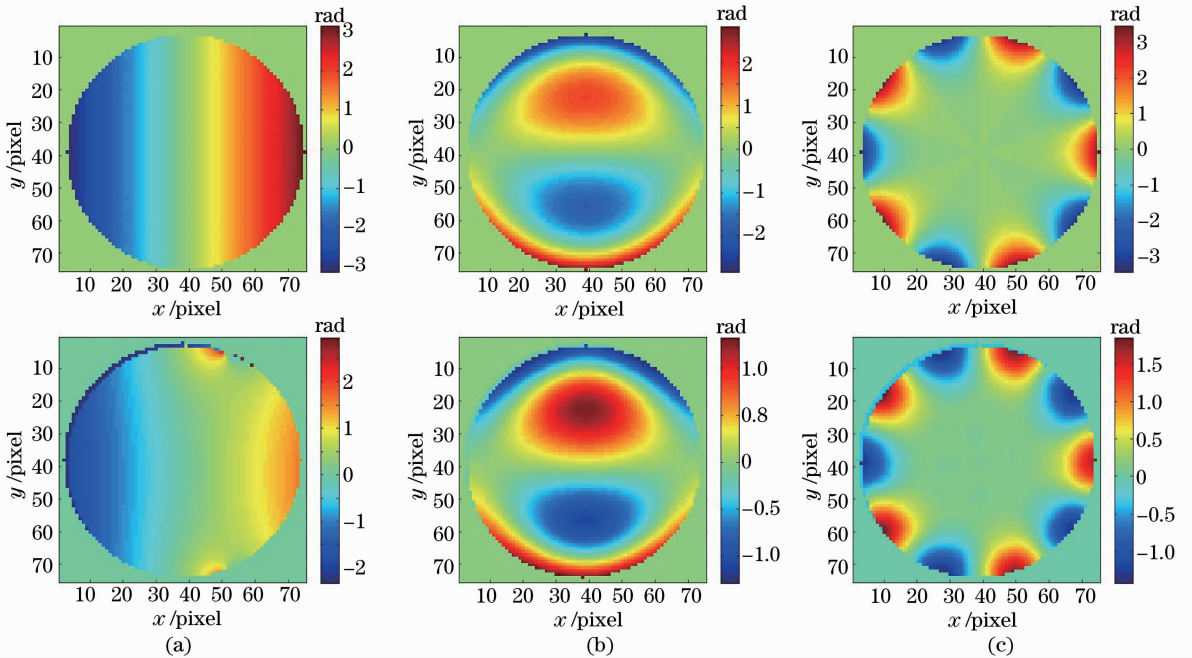


图5 不同 Zernike 阶次的输入相差与相应恢复相差。(a)第2项 Zernike 相差;(b)第7项 Zernike 相差;(c)第20项 Zernike 相差

Fig. 5 Inputting Zernike differences and corresponding restored phase differences. (a) Thesecond order; (b) the seventy order; (c) the twentieth order

果较差。其中,曲线1是初始相位与振幅为0时对各个 Zernike 相差进行恢复所得的 RMSE 值;曲线2是初始相位为随机分布,初始振幅为常数时所得的 RMSE 值;曲线3是初始相位与振幅均为随机分布时所得 RMSE 值。

由图6可以看出,无论初始相位为0或者是随机分布,该算法均能得到较好的恢复效果。同样,在迭代次数不变的情况下,改变初始振幅的分布,均可获得较好的恢复精度,说明本算法对初始值并不敏感。

图7为不同位置处的测量面分别与输出面进行迭代所得到的相位分布。其中图7(a)为输入面上的相位分布,峰-谷(PV)值约为 $1\lambda$ 。由图可见,利用近场输出图像

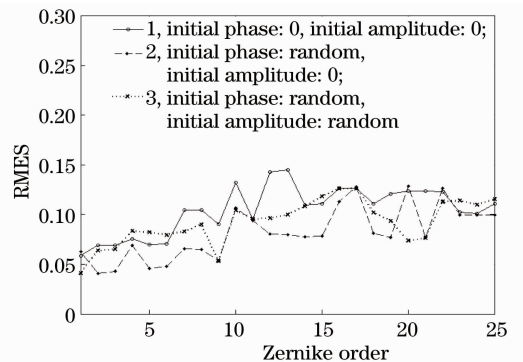


图6 不同初始条件下0~25项 Zernike 相差的 RMSE  
Fig. 6 RMSE of the 0~25th Zernike phase differences under initial conditions

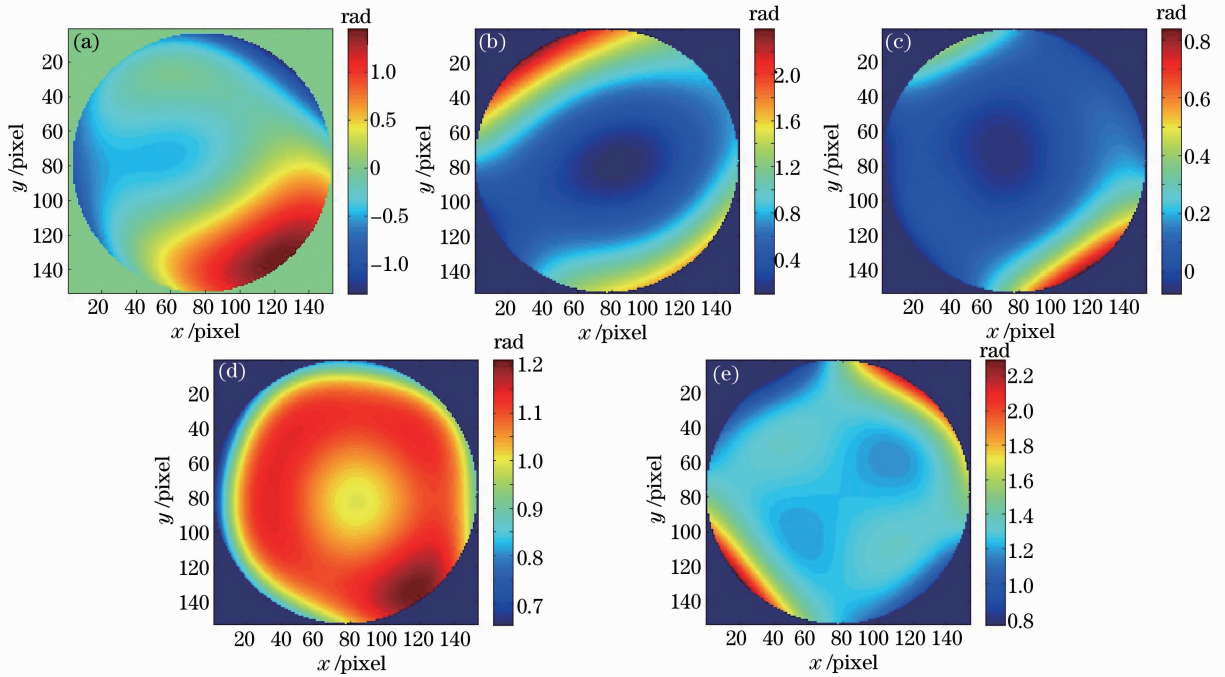


图7 不同位置处相位的恢复效果。(a)输入相位;(b)300 mm处相位恢复效果;(c)900 mm处相位恢复效果;(d)1000 mm处相位恢复效果;(e)1500 mm处相位恢复效果

Fig. 7 Restored phases at different locations. (a) Input phase; (b) the restored phase at 300 mm; (c) the restored phase at 900 mm; (d) the restored phase at 1000 mm; (e) the restored phase at 1500 mm

迭代解得的相位分布细节部分比较清晰,利用较远的输出面解得的相位分布主要轮廓比较清晰。

## 6 结 论

给出了一种结合改进的 Lohmann 光学结构的分数阶傅里叶相位恢复算法,并对输出面的选取方式进行了初步探讨。数值模拟实验对 Zernike 相位分布的恢复进行了研究,结果表明:对大多数低阶 Zernike 相差而言,本算法恢复效果较好,但对高阶相差恢复效果较差,不过仍然可以降低初始值对恢复精度的影响。模拟实验发现,测量面的位置对恢复精度也有较大影响,需要进一步的分析。

## 参 考 文 献

- 1 D Mendlovic, H M Ozaktas. Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation [J]. J Opt Soc Am A, 1993, 10(9): 1875-1881.
- 2 Lu Ding, Jin Weimin. Fully phase color image encryption based on joint fractional Fourier transform correlator and phase retrieval algorithm [J]. Chin Opt Lett, 2011, 9(2): 021002.
- 3 H M Ozaktas, D Mendlovic. Fractional Fourier optics[J]. J Opt Soc Am A, 1995, 12(4): 743-751.
- 4 H M Ozaktas, Orhan Ankan, M Alper Kutay, *et al.*. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1996, 44(9): 2141-2150.
- 5 A W Lohmann, D Mendlovic. Fractional joint transform correlator [J]. Appl Opt, 1997, 36(29): 7402-7407.
- 6 A W Lohmann. Image rotation, wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. J Opt Soc Am A, 1993, 10(10): 2181-2186.
- 7 Sun Guilin, Jiang Yanlan. The way to achieve fractional Fourier transform optical system and its application [J]. J Naval Aeronautical and Astronautical University, 2010, 25(1): 114-116.  
孙桂林, 江炎兰. 实现分数阶傅里叶变换的光学系统及其应用[J]. 海军航空工程学院学报, 2010, 25(1): 114-116.
- 8 L Buel. Numerical phase retrieval from beam intensity measurements in three planes [C]. SPIE, 2003, 4932: 590-598.
- 9 Wei Huang, Dean Liu, Xuejie Zhang, *et al.*. Analysis of a digital phase retrieval method for wave-front reconstruction [J]. Chin Opt Lett, 2011, 9(8): 080101.



- 10 Cui Yuanfeng, Liao Tianhe, Gao Qiong. Hybrid input-output algorithm for phase retrieval of 2D complex image in fractional Fourier domain [J]. *J Applied Optics*, 2008, 29(4): 654–656.  
崔远峰, 廖天河, 高穹. 分数傅里叶域中二维复图像相位恢复的混合输入输出算法[J]. *应用光学*, 2008, 29(4): 654–656.
- 11 Z Zalevsky, D Mendlovic, R G Dorsch. Gerchberg-Saxton algorithm applied in the fractional Fourier or the Fresnel domain [J]. *Opt Lett*, 1996, 21(12): 842–844.
- 12 Zeng Fa, Tan Qiaofeng, Wei Xiaofeng, *et al.*. Complex optical field retrieved from intensity distributions on several fractional Fourier transform planes [J]. *Chinese J Lasers*, 2006, 33(12): 1621–1625.  
曾发, 谭峭峰, 魏晓峰, 等. 基于多个分数阶次的复杂光场相位恢复算法[J]. *中国激光*, 2006, 33(12): 1621–1625.
- 13 Liao Tianhe, Gao Qiong, Cui Yuanfeng, *et al.*. Phase retrieval problem in fractional Fourier transform domain [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2010, 47(8): 081001.  
廖天河, 高穹, 崔远峰, 等. 分数傅里叶域中的相位恢复问题[J]. *激光与光电子学进展*, 2010, 47(8): 081001.
- 14 Fu Fuxing, Zhang Bin. Recovery of high frequency phase of laser beam with wavefront distortion [J]. *Chinese J Lasers*, 2011, 38(4): 0402009.  
付福兴, 张彬. 激光束畸变波前高频相位的恢复[J]. *中国激光*, 2011, 38(4): 0402009.