

# Zernike 环多项式分析光电经纬仪主镜变形

孟 轩<sup>1,2</sup> 乔彦峰<sup>1</sup> 何锋赞<sup>1</sup> 孙 宁<sup>1</sup> 蔡 盛<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033; <sup>2</sup> 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要** 研究了用 Zernike 环多项式分析光电经纬仪主反射镜变形的办法。首先推导了将有限元分析的变形结果转换成基于波前坐标系的数据形式的转换公式, 然后用 Zernike 环多项式对某光电经纬仪主反射镜的变形进行拟合, 计算了主反射镜变形引起的面形误差的峰-谷值(30.7 nm)和面形误差均方根值(6.3 nm), 与实际测量结果相比误差分别为 9.2% 和 10.5%。根据 Zernike 环多项式系数与 Seidel 多项式系数的关系, 得到了主反射镜变形对光学系统像差造成的影响。将 Zernike 环多项式系数导入光学系统分析软件 Zemax 中, 可对主反射镜变形后的光学系统进行综合分析, 为光学系统修正提供参考。

**关键词** 光学设计; Zernike 环多项式; 光电经纬仪; 主反射镜; 有限元分析; 拟合

中图分类号 TH74 文献标识码 A doi: 10.3788/LOP50.072201

## Analyzing Primary Mirror Deformation of Photo-Electronic Theodolite Using Zernike Annular Polynomials

Meng Xuan<sup>1,2</sup> Qiao Yanfeng<sup>1</sup> He Fengyun<sup>1</sup> Sun Ning<sup>1</sup> Cai Sheng<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun, Jilin 130033, China  
<sup>2</sup> University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** A method for analyzing the primary mirror deformation of photo-electronic theodolite with Zernike annular polynomials is researched. Firstly, a formula used to convert the finite element method (FEM) analysis results into the data based on the wave-front coordinate is deduced. Then, the deformation of the primary mirror in a photo-electronic theodolite is fitted with Zernike annular polynomials, and the peak-to-valley (PV) value (30.7 nm) and root-mean-square (RMS) value (6.3 nm) of surface error are calculated. Their error are 9.2% and 10.5% compared with actual inspection results. The influence of the primary mirror deformation on the aberration of optical system is obtained based on the relationship between Zernike annular polynomial coefficients and Seidel polynomial coefficients. Importing the Zernike annular polynomials into the Zemax software, a comprehensive analysis of the optical system can be realized. It provides information for optimizing the optical system.

**Key words** optical design; Zernike annular polynomial; photo-electronic theodolite; primary mirror; finite element analysis; fitting

**OCIS codes** 220.4880; 220.1000; 120.4820

## 1 引言

光电经纬仪是光机电精密组合的测量设备, 主反射镜是系统中非常关键的部件。对主反射镜进行镜面分析是现代经纬仪设计不可或缺的一环<sup>[1]</sup>。光电经纬仪主反射镜在载荷下镜面会发生刚体变形和表面变形, 刚体变形会引起光学系统像倾斜、离轴和离焦, 表面变形将影响光学系统的波前像差。为了提高光电经纬仪的成像质量, 分析光电经纬仪主反射镜镜面变形是很有必要的。

镜面的波面总是趋于光滑和连续的, 所以镜面的面形变化可以表示成一个完备的基底函数的线性组合

收稿日期: 2013-03-12; 收到修改稿日期: 2013-04-10; 网络出版日期: 2013-05-31

作者简介: 孟 轩(1987—), 男, 硕士研究生, 主要从事光学仪器设计方面的研究。E-mail: mengxuanlou@gmail.com

导师简介: 乔彦峰(1962—), 男, 研究员, 主要从事光电测量方面的研究。E-mail: qiaoyf@ciomp.ac.cn

本文电子版彩色效果请详见中国光学期刊网 www.opticsjournal.net

或一线性无关的基底函数系的组合。通常选用 Zernike 圆多项式作为基底函数系,因为它在单位圆上加权正交,使得多项式系数相互独立,有利于消除偶然误差的影响,并且其系数很容易与光学设计者惯用的 Seidel 像差系数建立联系<sup>[2-3]</sup>,Zernike 圆多项式对镜面的波面拟合的精度高,收敛性好,提供的有用信息多<sup>[4]</sup>。由于光电经纬仪主反射镜需要中心支撑,所以主反射镜有中心孔。Zernike 圆多项式在单位环域内失去正交性,使得系数之间存在耦合现象,不再具有明确的物理含义,甚至给出错误的结果。为了提高拟合精度,必须使用在环域内正交的基底函数系<sup>[5]</sup>。

本文研究了用单位环域内正交的 Zernike 环多项式拟合光电经纬仪主反射镜镜面变形的的方法,并用该方法分析了某光电经纬仪主反射镜的镜面变形,得到了主反射镜变形对光学系统像差造成的影响。

## 2 Zernike 环多项式

Zernike 环多项式是由 Tatian<sup>[6]</sup> 和 Mahajan<sup>[7]</sup> 提出的,通过引入新的变量——中心遮拦比  $\xi$ ,对 Zernike 圆多项式进行 Gram-Schmidt 正交化,得到 Zernike 环多项式。它与 Zernike 圆多项式具有类似的性质。中心遮拦比  $\xi$  的定义为环域内外圆半径的比值。事实上,Zernike 圆多项式是 Zernike 环多项式中心比为零时的特例。与 Zernike 圆多项式相似,极坐标形式的 Zernike 环多项式可表示为  $n$  次径向多项式和  $m$  次角向多项式的乘积。其非归一化形式可表示为

$$Z_i(\rho, \theta, \epsilon) = Z_n^m(\rho, \theta, \epsilon) = \begin{cases} R_n^m(\rho, \epsilon) \cos(m\theta), & m > 0 \\ R_n^m(\rho, \epsilon) \sin(-m\theta), & m < 0, \\ R_n^m(\rho, \epsilon), & m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中  $i = 1, \dots, N$ ,  $N$  为多项式项数; $n$  和  $m$  均为整数且满足  $|m| \leq n, n - m = 2j, j$  为自然数,  $\epsilon \leq \rho \leq 1$  且  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ <sup>[8-9]</sup>。Zernike 圆多项式的径向表达式为

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} \rho^{n-2s}. \quad (2)$$

Zernike 环多项式的径向表达式<sup>[8]</sup>如下:

1) 当  $m=0$  时,

$$R_{2j}^0(\rho, \epsilon) = R_{2j}^0 \left( \frac{\rho^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

2) 当  $m>0$  时,

$$R_{2j+m}^m(\rho, \epsilon) = \left[ \frac{1 - \epsilon^2}{2(2j + m + 1)h_j^m} \right]^{1/2} \rho^m Q_j^m(\rho^2), \quad (4)$$

其中

$$Q_j^m(\rho^2) = \frac{2(2j + 2m + 1)}{(j + m)(1 - \epsilon^2)} \frac{h_j^{m-1}}{Q_j^{m-1}} \sum_{i=1}^j \frac{Q_i^{m-1}(0) Q_i^{m-1}(\rho^2)}{h_i^{m-1}},$$

$$h_j^m = -\frac{2(2j + 2m - 1)}{(j + m)(1 - \epsilon^2)} \frac{Q_{j+1}^{m-1}(0)}{Q_j^{m-1}(0)} h_j^{m-1},$$

$$Q_j^0(\rho^2) = R_{2j}^0(\rho, \epsilon),$$

$$h_j^0 = \frac{1 - \epsilon^2}{2(2j + 1)}.$$

3) 当  $m<0$  时,

$$R_{2j+m}^m(\rho, \epsilon) = R_{2j+m}^{|m|}(\rho, \epsilon). \quad (5)$$

4) 当  $m=n$  时,

$$R_n^n(\rho, \epsilon) = \frac{\rho^n}{\left( \sum_{i=0}^n \epsilon^{2i} \right)^{1/2}}. \quad (6)$$

研究表明<sup>[10]</sup>,Zernike 圆多项式各项之间在环域内存在耦合现象,失去了正交性。而 Zernike 环多项式各项在环域内完全正交,所以用 Zernike 环多项式拟合镜面变形精度更高。

### 3 Zernike 环多项式拟合镜面变形

Zernike 环多项式拟合镜面变形就是把镜面变形用一个 Zernike 环多项式的线性组合表示,即

$$\Delta S = \sum_{i=1}^N a_i Z_i(\rho, \theta) = a_1 Z_1(\rho, \theta) + a_2 Z_2(\rho, \theta) + \cdots + a_n Z_n(\rho, \theta), \quad (7)$$

式中  $a_i$  为第  $i$  项的系数,  $Z_i$  为 Zernike 多项式第  $i$  项的系数,  $(\rho, \theta)$  为数据点的坐标值<sup>[11]</sup>。

Zernike 环多项式拟合的过程可分为数据转换和求取 Zernike 环多项式系数两个步骤。用有限元分析软件对镜面变形进行分析之后可以得到镜面变形的数据,这些数据主要包括镜面上各节点变形前的坐标值  $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2, 3, \dots, m)$ ,  $m$  为节点个数,各节点沿的变形量  $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ 。数据转换的过程将有限元软件在笛卡尔坐标系(柱面坐标系或球面坐标系)下计算的变形结果转化为光学分析软件所能接受的基于表面法向坐标系(如图 1 所示)的数据形式<sup>[12]</sup>,只有这样 Zernike 多项式系数才能与光学分析软件常用的 Seidel 多项式系数建立正确的关系。将有限元软件分析的变形结果转化为基于法向坐标系的模式如图 2 所示。镜面为球面,半径为  $R$ ,由于镜面变形,镜面上节点  $P$  移动到  $M$ ,过  $M$  向变形前的镜面做垂线,交点为  $N$ ,  $MN$  的长即为镜面基于表面法向坐标系的长度,用  $\Delta s$  表示。设镜面的光轴为  $Z$  轴,镜面上任意一点  $P$  的坐标为  $(x, y, z)$ ,  $O$  为镜面变形前的中心,坐标为  $(0, 0, R)$ ,向量  $\vec{PO} = (-x, -y, R-z)$ ,由于  $|PN|$  很小,  $PO$  和  $NO$  近似平行,所以  $\vec{NO}$  方向上的单位向量为  $\frac{(-x, -y, R-z)}{R}$ ,向量  $\vec{PM} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ,所以

$$\Delta s = |MN| = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot \frac{(-x, -y, R-z)}{R} = \Delta z - \frac{x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z}{R}. \quad (8)$$

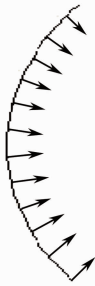


图 1 表面法向变形示意图

Fig. 1 Schematic of surface normal deformation

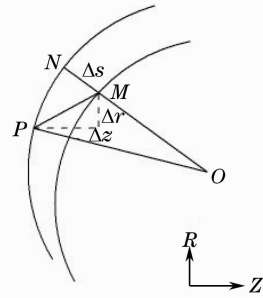


图 2 数据转化模型

Fig. 2 Data transformation model

数据转换完成后就可以求取 Zernike 环多项式的系数。首先将变形前节点坐标  $x_i, y_i$  转换为极坐标下的数据形式  $\rho_i, \theta_i$ ,然后将  $\rho_i, \theta_i$  及沿镜面法线方向的  $\Delta s_i$  代入  $N$  项 Zernike 环多项式中

$$\begin{cases} a_1 Z_1(\rho_1, \theta_1) + a_2 Z_2(\rho_1, \theta_1) + \cdots + a_n Z_n(\rho_1, \theta_1) = \Delta s_1 \\ a_1 Z_1(\rho_2, \theta_2) + a_2 Z_2(\rho_2, \theta_2) + \cdots + a_n Z_n(\rho_2, \theta_2) = \Delta s_2 \\ \vdots \\ a_1 Z_1(\rho_m, \theta_m) + a_2 Z_2(\rho_m, \theta_m) + \cdots + a_n Z_n(\rho_m, \theta_m) = \Delta s_m \end{cases}. \quad (9)$$

由于  $m > n$ ,所以(9)式是超定方程组,没有正解,只有最小二乘解,通常用求解线性最小二乘问题的豪斯荷尔德变换法或求解线性最小问题的广义逆法求解此超定方程,即可得到各项 Zernike 环多项式的系数,计算出 Zernike 环多项式后即可拟合镜面误差。镜面的法向镜面误差的均方根(RMS)值和峰-谷(PV)值为

$$e_{\text{RMS}} = \left\{ \frac{1}{\pi(1-\epsilon^2)} \iint_0^{2\pi} \int_0^1 \Delta s^2(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta - \frac{1}{\pi^2(1-\epsilon^2)^2} \left[ \iint_0^{2\pi} \int_0^1 \Delta s(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (10)$$

$$e_{\text{PV}} = \Delta s_{\text{max}} - \Delta s_{\text{min}}. \quad (11)$$

根据 Zernike 环多项式系数可以得到光学设计软件常用的 Seidel 像差系数。常用 Seidel 像差系数与 Zernike 环多项式系数的关系如表 1 所示。

表 1 常用 Seidel 像差系数与 Zernike 环多项式系数的关系

Table 1 Relationship between common Seidel aberration coefficients and Zernike annular polynomial coefficients

Seidel coefficient	Meaning	Representation in Zernike annular polynomials
$W_{000}$	Piston	$Z_1 - Z_4 + Z_9 \frac{1 + 4\epsilon^2 + \epsilon^4}{(1 - \epsilon^2)^2}$
$W_{111}$	Tilt	$\sqrt{\left\{ \frac{Z_2}{(1 + \epsilon^2)^{1/2}} - \frac{2Z_7(1 + \epsilon^2 + \epsilon^4)}{(1 - \epsilon^2) [(1 + \epsilon^2)(1 + 4\epsilon^2 + \epsilon^4)]^{1/2}} \right\}^2 + \left\{ \frac{Z_3}{(1 + \epsilon^2)^{1/2}} - \frac{2Z_8(1 + \epsilon^2 + \epsilon^4)}{(1 - \epsilon^2) [(1 + \epsilon^2)(1 + 4\epsilon^2 + \epsilon^4)]^{1/2}} \right\}^2}$
$W_{020}$	Focus	$2Z_4 / (1 - \epsilon^2) - 6Z_9(1 + \epsilon^2) / (1 - \epsilon^2)^2 - \sqrt{(Z_5^2 + Z_6^2) / (1 + \epsilon^2 + \epsilon^4)^{1/2}}$
$W_{222}$	Astigmatism	$2 \sqrt{(Z_5^2 + Z_6^2) / (1 + \epsilon^2 + \epsilon^4)^{1/2}}$
$W_{131}$	Coma	$3(1 + \epsilon^2)(Z_7^2 + Z_8^2)^{1/2} / (1 - \epsilon^2) [(1 + \epsilon^2)(1 + 4\epsilon^2 + \epsilon^4)]^{1/2}$
$W_{040}$	Spherical	$6Z_9 / (1 - \epsilon^2)^2$

### 4 用 Zernike 环多项式拟合某光电经纬仪主反射镜镜面变形

某型号光电经纬仪主反射镜口径 790 mm, 镜面直径 2280 mm, 中心孔直径 184 mm, 使用 3 组底支撑组件共 9 点支撑盘在轴向上支撑主镜。在背部均布有 3 个盲孔, 3 组重锤平衡杠杆对主镜进行侧支撑。主反射镜及其支撑结构的有限元分析模型如图 3 所示, 建模时采用的笛卡儿坐标系应与光学分析软件中的笛卡儿坐标系相一致。由于重力作用, 光轴水平时主反射镜的变形图如图 4 所示。表 2 列出了镜面上节点的变形数据, 用于对镜面变形进行分析。

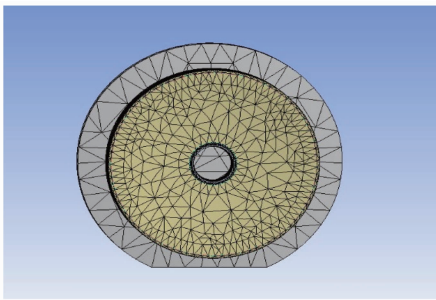


图 3 有限元分析模型图

Fig. 3 Finite element analysis model

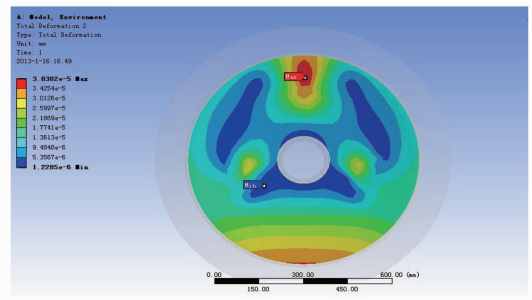


图 4 主反射镜镜面变形图

Fig. 4 Primary mirror deformation

表 2 外载荷下主反射镜镜面上的节点变形前坐标值及变形后的位移

Table 2 Location before deformation and displacement after deformation under external load of nodes on the surface of primary mirror

Node number	$x$	$y$	$z$	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$
43496	-90.00	$1.529 \times 10^{13}$	1.777	$4.866 \times 10^{-6}$	$2.368 \times 10^{-6}$	$8.223 \times 10^{-7}$
43497	-86.93	-23.29	1.777	$3.880 \times 10^{-6}$	$2.604 \times 10^{-7}$	$6.609 \times 10^{-7}$
43498	-77.94	-45.00	1.777	$2.056 \times 10^{-6}$	$-1.727 \times 10^{-6}$	$3.936 \times 10^{-7}$
43499	-63.63	-63.63	1.777	$9.728 \times 10^{-7}$	$-2.548 \times 10^{-6}$	$3.057 \times 10^{-7}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

对镜面上各节点及其变形数据进行 Zernike 环多项式拟合分析, 表 3 列出了前 29 项 Zernike 环多项式拟合系数。

表3 前29项 Zernike 环多项式系数  
Table 3 First 29 terms of Zernike annular polynomial coefficients

1	2	3	4	5
$5.79112 \times 10^{-6}$	$-3.29017 \times 10^{-9}$	$-1.11500 \times 10^{-5}$	$5.34275 \times 10^{-6}$	$-8.15276 \times 10^{-6}$
6	7	8	9	10
$5.44254 \times 10^{-8}$	$3.40931 \times 10^{-9}$	$1.09621 \times 10^{-6}$	$1.15971 \times 10^{-7}$	$2.03500 \times 10^{-9}$
11	12	13	14	15
$2.05235 \times 10^{-6}$	$-2.98161 \times 10^{-6}$	$1.76563 \times 10^{-7}$	$-2.64402 \times 10^{-8}$	$1.00997 \times 10^{-6}$
16	17	18	19	20
$-4.99821 \times 10^{-7}$	$-2.07185 \times 10^{-6}$	$5.83249 \times 10^{-8}$	$-1.58355 \times 10^{-8}$	$-2.59197 \times 10^{-6}$
21	22	23	24	25
$2.27017 \times 10^{-6}$	$-6.61921 \times 10^{-8}$	$3.49895 \times 10^{-8}$	$-1.15327 \times 10^{-7}$	$-1.86227 \times 10^{-7}$
26	27	28	29	
$-2.7023 \times 10^{-8}$	$7.11047 \times 10^{-8}$	$-1.84876 \times 10^{-7}$	$-7.42778 \times 10^{-8}$	

计算出 Zernike 环多项式的系数后就可以拟合出镜面的面形误差。图 5 所示为主反射镜光轴处于水平状态时 Zernike 环多项式拟合出的镜面的面形误差, PV 值 30.7 nm, RMS 值 6.3 nm。表 4 列出了镜面的面形误差对常用 Seidel 像差系数大小的影响。将表 3 中的 Zernike 环多项式系数导入 Zemax 光学软件的数据中,可求得光学系统主反射镜变形后的光学传递函数和各类像差,实现对主反射镜变形后的光学系统的综合分析。

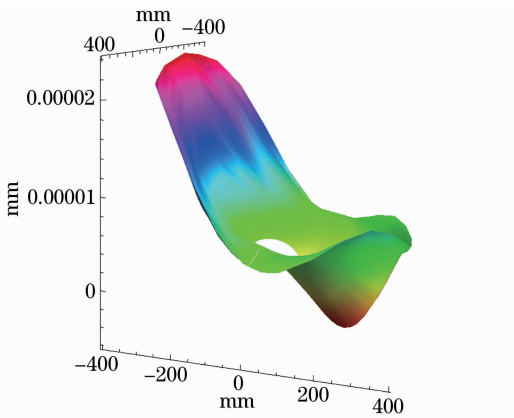


图5 Zernike 环多项式拟合出的镜面面形误差  
Fig. 5 Surface error of primary mirror fitted by Zernike annular polynomial

表4 镜面的面形误差对常用 Seidel 像差系数大小的影响

Table 4 Influence of surface error on common Seidel aberration coefficients

Seidel aberration coefficient	Value
$W_{000}$	$6.0513 \times 10^{-7}$
$W_{111}$	$1.3052 \times 10^{-5}$
$W_{020}$	$7.7890 \times 10^{-7}$
$W_{222}$	$1.9396 \times 10^{-5}$
$W_{131}$	$3.3258 \times 10^{-6}$
$W_{040}$	$7.6844 \times 10^{-7}$

## 5 拟合结果与实验对比

用干涉仪分别对加工完成时的主反射镜以及组装后光轴为水平的主反射镜检测,图 6 和图 7 分别为主镜加工完成时及光轴处于水平状态时的检测图。检测使用的波长  $\lambda$  为 632.8 nm。如图 6、图 7 所示,主反射镜加工完成时测得 PV 值为  $0.1397\lambda$ , RMS 值为  $0.0315\lambda$ 。光轴处于水平状态时测得的 PV 值为  $0.1931\lambda$ , RMS 值为  $0.0328\lambda$ 。根据极大计算法,光轴处于水平状态时的 PV 值等于加工误差引起的面形误差 PV 值与主反射镜表面变形引起的面形误差 PV 值之和,所以由主反射镜表面变形引起的面形误差 PV 值为  $0.0534\lambda$ , 约为 33.8 nm。由于加工误差和主反射镜变形分别引起的面形误差互不相关,根据标准差合成公式可以得到主反射镜变形引起的面形误差的 RMS 值计算公式

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_1^2}, \quad (12)$$

式中  $\sigma$  表示光轴处于水平状态时主反射镜面形误差的 RMS 值,  $\sigma_1$  表示加工完成时的 RMS 值。将检测得到的上述 RMS 值代入(12)式,得到主反射镜变形引起的面形误差 RMS 值为  $0.009\lambda$ , 约为 5.7 nm。将拟合结

果和检测结果对比,拟合得到的 PV 值的相对误差为 9.2%,RMS 值的相对误差为 10.5%。

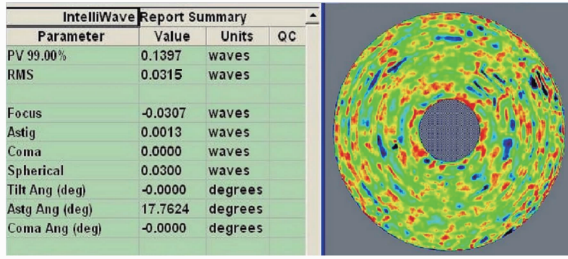


图 6 加工完成时的主反射镜检测图

Fig. 6 Inspection map of primary mirror which has been fabricated

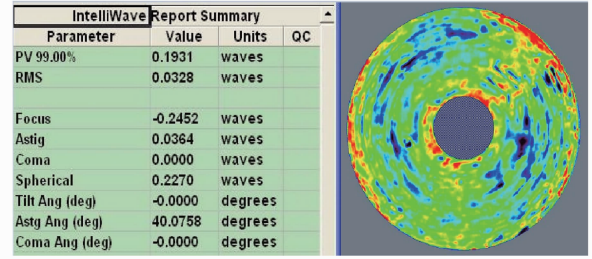


图 7 光轴水平状态时的主反射镜检测图

Fig. 7 Inspection map of primary mirror when the optical axis is in a horizontal state

## 6 结 论

介绍了 Zernike 圆多项式和 Zernike 环多项式的性质,由于 Zernike 圆多项式各项之间在环域内存在耦合现象,失去了正交性,Zernike 环多项式各项在环域内完全正交,所以 Zernike 环多项式更适合用于分析含中心孔的主反射镜的变形。提供了用 Zernike 环多项式分析含有中心孔的主反射镜变形的的方法,并对某光电经纬仪主反射镜变形进行了分析,得到了 Zernike 环多项式前 29 项系数和主反射镜面形误差对常用的 Seidel 像差系数大小的影响。将拟合得到的镜面变形引起的镜面误差 PV 值和 RMS 值与实际检测的镜面变形引起的镜面误差 PV 值和 RMS 值进行对比可知,拟合得到的结果误差较小,因此该方法适用于分析光电经纬仪主反射镜镜面变形。将 Zernike 环多项式系数导入 Zemax 光学软件的表面数据中,可实现对主反射镜变形后的光学系统的综合分析,为光学系统的修正提供参考,对于提高光电经纬仪的成像质量和测量精度具有很重要的意义。

## 参 考 文 献

- 1 Tan Fanjiao, Qiao Yanfeng, Li Yaobin, *et al.*. Finite element analysis for surface shape deformation of photo-electronic theodolite primary mirror[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, 28(4): 756—763.  
谭凡教, 乔彦峰, 李耀彬, 等. 光电经纬仪主镜面形变化的有限元分析[J]. *光学学报*, 2008, 28(4): 756—763.
- 2 Qu Hemeng, Zhang Xin, Wang Lingjie. Design of elliptical window optical system based on fixed corrector[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(10): 1022003.  
曲贺盟, 张 新, 王灵杰. 基于固定校正元件的椭圆形窗口光学系统设计[J]. *光学学报*, 2011, 31(10): 1022003.
- 3 Fan Xinlong, Guan Chunlin, Rao Changhui. Wave-front fitting capability analysis of 1.8 m telescope's adaptive secondary mirror[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 38(8): 0822002.  
樊新龙, 官春林, 饶长辉. 1.8 m 望远镜变形次镜波前拟合能力分析[J]. *光学学报*, 2011, 38(8): 0822002.
- 4 Li Jing, Gong Yan. Insert algorithm of wavefront reconstructions for Hartmann-Shack wave-front sensor[J]. *Laser & Optoelectronics Process*, 2012, 47(12): 120101.  
李 晶, 巩 岩. 哈特曼-夏克波前传感器的插值重构算法[J]. *激光与光电子学进展*, 2012, 47(12): 120101.
- 5 Hou Xi, Wu Fan, Yang Li, *et al.*. Wavefront fitting with Zernike annular polynomials for circular and annular pupils[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2006, 35(5): 523—526.  
侯 溪, 伍 凡, 杨 力, 等. 基于 Zernike 环多项式的环孔径波面拟合方法[J]. *红外与激光工程*, 2006, 35(5): 523—526.
- 6 B Tatian. Aberration balancing in rotationally symmetric lenses[J]. *J Opt Soc Am*, 1974, 64(8): 1083—1091.
- 7 V N Mahajan. Zernike annular polynomials for imaging systems with annular pupils [J]. *J Opt Soc Am*, 1981, 71(1): 75—85.
- 8 Liu Ke, Li Yanqiu, Liu Jingfeng. Wavefront fitting method for annular interferogram with obscurations[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2008, 37(S2): 778—784.  
刘 克, 李艳秋, 刘景峰. 带有分割遮拦环形干涉图的波面拟合[J]. *红外与激光工程*, 2008, 37(S2): 778—784.
- 9 Wang Xiaokun, Zheng Ligong. Accurate removal of misalignment errors from testing central obstructed optics[J]. *Laser & Optoelectronics Process*, 2010, 47(9): 091201.  
王孝坤, 郑立功. 中心遮拦光学元件检测中调整误差的精确去除[J]. *激光与光电子学进展*, 2010, 47(9): 091201.
- 10 Hou Xi, Wu Fan, Yang Li, *et al.*. Zernike circle polynomials on calculating Seidel aberration[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006,

26(1): 54–62.

侯 溪, 伍 凡, 杨 力, 等. 中心遮拦干涉图的圆泽尼克拟合对计算塞德尔像差的影响分析[J]. 光学学报, 2006, 26(1): 54–62.

- 11 Yuan Wenquan, Gong Yan. Study on characteristics of aberrations for active liquid lens in lithographic objective lens[J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(12): 1222003.

袁文全, 巩 岩. 光刻物镜中主动液体透镜的像差特性研究[J]. 光学学报, 2011, 31(12): 1222003.

- 12 P. Coronato, R. Juergens. Transferring FEA results to optics codes with Zernikes: a review of techniques[C]. SPIE, 2003, 5176: 128–136.