

# 傅里叶变换轮廓术中由于坐标混淆而产生的高度测量误差的修正

田苗 张春林 权伟龙

(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘要** 傅里叶变换轮廓术是一种主动投影光栅测量物体表面三维形貌的技术,只需要一幅结构条纹图即可对整个范围进行分析。该方法通过对物体表面投影产生的变形光栅的相位与参考面的变形光栅相位相减,从而得以测量高度分布。但该方法在发散照明光路中所测量高度对应的坐标值只是一个近似,在做精确测量时还需要做理论修正。在理论上阐述了由坐标选取混淆产生的高度测量误差的原因,并对其做了一级修正。在实验上采用红绿双色条纹技术,并结合 Matlab 软件对误差做了定量分析。

**关键词** 测量;傅里叶变换轮廓术;高度测量;坐标混淆;双色条纹

**中图分类号** O438.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP50.061202

## Correction of Height Measurement Error Arised from Coordinate Confusion in FTP

Tian Miao Zhang Chunlin Quan Weilong

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, Gansu 730070, China)

**Abstract** Fourier transform profilometry (FTP) is a kind of active technology by projecting a grating on object surface to measure the three-dimensional (3D) shape. It requires only one structured fringe pattern to analyze the entire range of the measurement system. Based on the subtraction of the distortion grating phases of the object surface and the reference surface, FTP can measure the height distribution. But in divergent light path the coordinate of the height is only an approximation, so that in precise measurements we need theoretical correction. We analyzed the cause of the height measurement error introduced by the coordinate confusion, and made the first order correction. In experiment, we used bi-color fringe technology, in combination with the Matlab software, to and successfully carried out a quantitative analysis of the error.

**Key words** measurement; Fourier transform profilometry; height measurement; coordinate confusion; bi-color fringe

**OCIS codes** 120.6650; 100.6890; 200.3050

## 1 引言

1983年, Takeda等<sup>[1]</sup>将傅里叶变换用于三维物体面形测量,提出了从频域来获取物体的三维面形的方法,即傅里叶变换轮廓术(FTP)。它是一种采用主动投影条纹来获取物体三维面形的方法<sup>[2]</sup>,自提出至今一直受到学者的广泛关注<sup>[3~8]</sup>。采用正弦投影和 $\pi$ 相移技术可以消除零频和高次谐波对傅里叶变换轮廓术测量结果的影响,大大提高测量精度和测量范围<sup>[9~11]</sup>。陈文静等<sup>[12]</sup>提出了一种利用双色条纹投影的傅里叶变换测量技术,该方法不需要相移装置,只需要采集一幅条纹图就可以非常好地消除零频分量。

**收稿日期**: 2013-02-26; **收到修改稿日期**: 2013-03-02; **网络出版日期**: 2012-05-28

**基金项目**: 兰州交通大学青年基金(2012021)资助课题。

**作者简介**: 田苗(1979—),男,博士,副教授,主要从事三维传感和电子散斑干涉计量等方面的研究。

E-mail: tian\_miao@163.com

本文电子版彩色效果请详见中国光学期刊网 [www.opticsjournal.net](http://www.opticsjournal.net)

但是在 FTP 方法中,待测物体距离参考面的高度  $h$ ,其对应的坐标并没有明确指出,由此导致误差的产生。本文在理论上分析了此误差产生的原因,并给出了高度测量的一级修正;在实验上用双色条纹投影方法对修正前后的高度测量结果做了比较。

## 2 傅里叶变换轮廓术中高度和坐标的对应关系

FTP 原理如图 1 所示。光栅  $G$  的栅线垂直图平面,  $P_1$  和  $P_2$  是投影装置的光轴,  $I_1$  和  $I_2$  是成像系统的光轴,成像光轴垂直于参考平面,并与投影光轴交于参考平面上的  $O$  点,  $d$  是  $P_2$  和  $I_2$  间的距离,  $l$  是  $I_2$  到参考平面  $R$  间的距离。以  $O$  点为坐标原点,参考面内垂直于光栅方向向左为  $X$  轴,栅线方向为  $Y$  轴建立坐标系。当光栅投影到参考平面时,令参考面上  $O$  点的相位为零,沿  $X$  轴的正方向相位增加,则参考面上的相位分布可表示为

$$\varphi_0(x, y) = 2\pi f_0 x, \quad (1)$$

式中  $f_0$  为光栅像的基频。设  $S$  是 CCD 列阵面上任意一点,参考平面上  $C$  点在 CCD 阵列上  $S$  点成像,则  $S$  点相位  $\varphi_S = \varphi_C$ 。

当光栅投影在物体表面时,物面上  $H$  点在 CCD 阵列上  $S$  点成像,于是  $S$  点有一新相位  $\tilde{\varphi}_S = \varphi_H$ ,且  $\varphi_D = \varphi_H$ ,其中  $\varphi_D$  为参考平面上  $D$  点的相位,点  $B$  为  $H$  在参考平面上的投影。可以看出 CCD 阵列上  $S$  点先后两次成像得到的两个相位  $\varphi_S$  与  $\tilde{\varphi}_S$  的差值  $\Delta\varphi_S$ ,正是由物面上  $H$  点相对于参考面的高度  $h$  调制引起的。由于  $S$  为任意选取,则 CCD 阵列上任意点的前后两次相位差可表示为

$$\Delta\varphi_S = \tilde{\varphi}_S - \varphi_S = \varphi_D - \varphi_C = -2\pi f_0 \overline{CD}. \quad (2)$$

再由  $\triangle CHD$  和  $\triangle P_2 HI_2$  的相似关系可得

$$h = \frac{l\Delta\varphi_S}{\Delta\varphi_S - 2\pi f_0 d}, \quad (3)$$

式中

$$\Delta\varphi_S(x, y) = \text{Im}\{\ln[g(x, y)g_0^*(x, y)]\}, \quad (4)$$

$g(x, y)$  为变形光栅像中滤波所取得的基频分量,  $g_0(x, y)$  为参考面上光栅像的基频分量,上标  $*$  为复共轭,

$$g(x, y) = a_1 \exp\{i[2\pi f_0 x + \varphi(x, y)]\}, \quad (5)$$

$$g_0(x, y) = a_2 \exp\{i[2\pi f_0 x + \varphi_0(x, y)]\}. \quad (6)$$

很明显,当  $h > 0$  时,  $\Delta\varphi_S < 0$ ; 当  $h < 0$  时,  $0 < \Delta\varphi_S < 2\pi f_0 d$ 。

但是在这里需要指出,在  $S$  点前后两次的相位差  $\Delta\varphi_S$  对应于参考面上的  $C$  点,其坐标值为  $x_C$ 。但由相似关系得到  $H$  点的高度对应于参考面上的  $B$  点,其坐标值为  $x_B$ 。因此高度值应表示为

$$h(x_B, y) = \frac{l\Delta\varphi_S(x_C, y)}{\Delta\varphi_S(x_C, y) - 2\pi f_0 d}, \quad (7)$$

而在以往的文献中,经常将这两点混淆而忽略了这一差异,直接取  $x_B = x_C = x$ ,高度值记为

$$h_0(x, y) = \frac{l\Delta\varphi_S(x, y)}{\Delta\varphi_S(x, y) - 2\pi f_0 d}. \quad (8)$$

在远心光路中这种选取是合理的,但在发散照明光路中,则需要做出修正。

## 3 坐标选取混淆引起的高度测量一级修正公式

如图 2 所示,设  $B$  点的坐标为  $x_B = x$ ,由相似三角形可得  $C$  点的坐标为

$$x_C = x + \overline{BC} = x + \frac{h}{l-h}x, \quad (9)$$

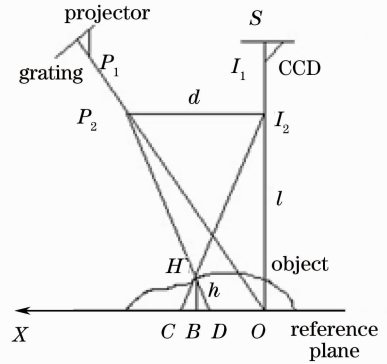


图 1 FTP 光路图

Fig. 1 FTP optical path

将其代入(7)式可得

$$h(x, y) = \frac{l\Delta\varphi_s\{x + [h/(l-h)]x, y\}}{\Delta\varphi_s\{x + [h/(l-h)]x, y\} - 2\pi f_0 d}, \quad (10)$$

当  $h < l-h$  时, 将相位差  $\Delta\varphi_s$  展开并保留一级小量, 可得

$$\Delta\varphi_s\left(x + \frac{h}{l-h}x, y\right) \approx \Delta\varphi_s(x, y) + \frac{\partial\Delta\varphi_s(x, y)}{\partial x} \frac{h}{l-h}x. \quad (11)$$

将其代入(10)式可得

$$h(x, y) = \frac{l\Delta\varphi_s(x, y)}{\Delta\varphi_s(x, y) - 2\pi f_0 d - x\Delta\varphi_s'(x, y)}, \quad (12)$$

式中  $\Delta\varphi_s'(x, y) = \frac{\partial\Delta\varphi_s(x, y)}{\partial x}$ 。(12) 式即为引入一级修正时的高度测量公式。当  $|x\Delta\varphi_s'(x, y)| < |\Delta\varphi_s(x, y) - 2\pi f_0 d|$  时, 将高度分布展开并保留一级小量可得

$$h(x, y) = h_0(x, y) + h_0^2(x, y) \frac{x\Delta\varphi_s'(x, y)}{l\Delta\varphi_s(x, y)}. \quad (13)$$

比较(8)式和(13)式可以看出, 由坐标选取混淆所引入的绝对误差为

$$\Delta h(x, y) = h_0(x, y) - h(x, y) = h_0^2(x, y) \frac{x\Delta\varphi_s'(x, y)}{l\Delta\varphi_s(x, y)}. \quad (14)$$

由上式可以看出, 引起误差的主要原因有: 1) 偏离中心点的距离  $x$ , 偏离量越大误差越大; 2) 相对于参考平面的高度绝对值, 高度绝对值越大误差越大; 3) 相位差在  $X$  方向的变化率  $\Delta\varphi_s'$ , 其实质是高度在  $x$  方向的变化率  $h'(x, y)$ , 即斜率, 斜率越大误差越大。最后, 误差的正负取决于  $x$ 、 $\Delta\varphi_s'$  和  $\Delta\varphi_s$  三者的正负, 当  $h \ll l-h$  时,  $h'(x, y) \approx -\frac{l}{2\pi f_0 d}\Delta\varphi_s'(x, y)$ , 即  $h'$  与  $\Delta\varphi_s'$  反号。另外有  $h$  与  $\Delta\varphi_s$  反号, 因此当  $x$ 、 $\Delta\varphi_s'$  和  $\Delta\varphi_s$  三者或坐标  $x$ 、斜率  $h'$  和高度  $h$  三者符号相乘大于零时, 误差为负; 当三者符号相乘小于零时, 误差为正。下面通过实验来进行验证。

## 4 实验

### 4.1 实验装置

实验采用液晶投影仪(NEC VT 675+)将红绿双色条纹投影在人脸石膏模型上, 在与投影仪成一定夹角的方向上, 用彩色数码相机(JAI CV-M77)获取条纹。在实际测量过程中, 相机的光轴垂直于参考平面, 液晶投影仪斜向投影, 实验框图如图 3 所示。测量系统的结构参量  $l=160$  cm,  $d=50$  cm。

### 4.2 红绿双色条纹图像采集及处理

利用 Matlab 编程制作红绿双色正弦光栅, 并将其投影在石膏模型上, 如图 4(a)所示。并测得参考面周期为  $\lambda=1$  cm, 即  $f_0=1$  cm<sup>-1</sup>。

以下的数据处理工作都是用 Matlab 软件完成的。首先将图 4(a)进行分色处理, 得到红色分量和绿色分量, 分别如图 4(b)、(c)所示。由图 4(b)和(c)可知, 两幅图片的背景和对比度大小不一致, 为了利用  $\pi$  相移技术消除零频, 必须调整两幅图片的背景和对比度使其一致。绿色条纹分量经过背景和对比度校正后如图 4(d)所示。图 4(e)为红绿分量相减的结果, 其中蓝色线内的区域为相位展开的范围。绿色分量校正公式为:  $g'_g(x, y) = [g_g(x, y) - m_g] \times d_r/d_g + m_r$ , 其中  $m_r$  和  $d_r$  为红色分量的均值和均方差,  $m_g$  和  $d_g$  为绿色分量的均值和均方差。

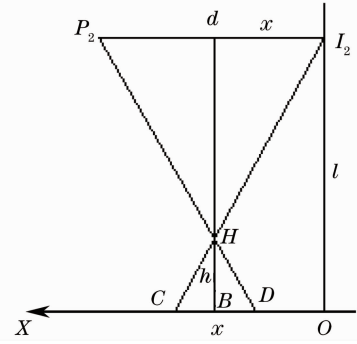


图 2 坐标关系

Fig. 2 Coordinate relation

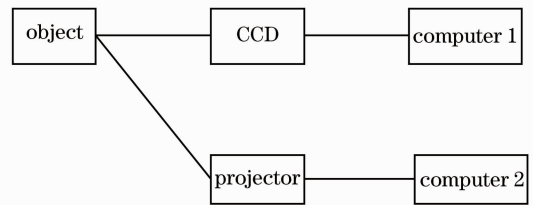


图 3 实验框图

Fig. 3 Block diagram of experiment

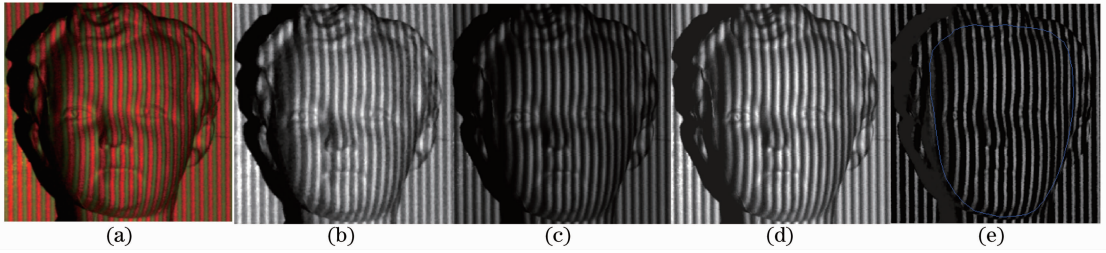


图4 (a) 红绿双色条纹;(b) 红色分量;(c) 绿色分量;(d) 校正后绿色分量;(e) 红绿相减

Fig. 4 (a) Red green bi-color fringe; (b) red component; (c) green component; (d) green component after correction; (e) subtraction of the green and the red components

对相减后的条纹做傅里叶变换,可以得到其频谱图,如图5(a)和(b)所示,可以看出该方法很好地抑制了零频。编程自动选定并截取其中的基频,如图5(c)所示。对其作傅里叶逆变换得到变形光栅像的基频成分  $g(x, y)$ 。选取图像中心附近处的平均空间周期作为参考平面上的空间周期。计算得到参考平面上的光栅像的基频分量  $g_0(x, y)$ 。利用(4)式计算出相位差,并做相位解包裹。分别利用(8)式和(12)式计算出坐标混淆时的高度分布以及考虑一级修正后的高度分布,如图6(a)和(b)所示。

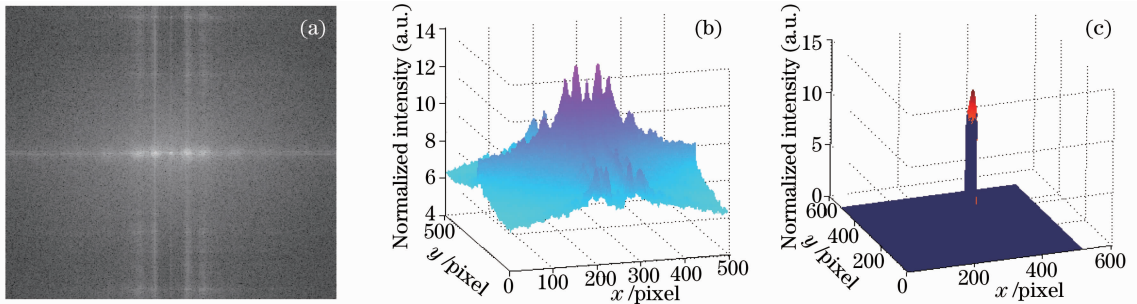


图5 (a) 频谱图;(b) 三维频谱图;(c) 截取的基频

Fig. 5 (a) Frequency spectrum; (b) 3D frequency spectrum; (c) fundamental frequency selected

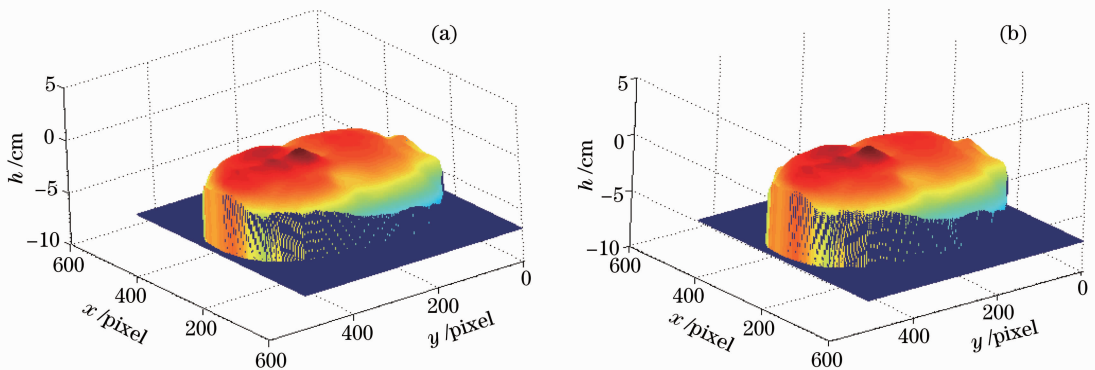


图6 (a) 坐标混淆时的高度分布;(b) 考虑一级修正的高度分布

Fig. 6 (a) Height distribution in coordinate confusion; (b) height distribution with the first-order correction

分别作出它们在第320行处的高度曲线,如图7(a)和(b)所示。计算出两幅图之间的高度之差及其相对误差,如图8(a)和(b)所示。可以看出:误差与之前的理论分析一致,偏离中心坐标的距离越大误差越大;误差与斜率有关,误差的正负与坐标、高度及斜率的正负有关。图8(a)中的最大绝对误差为0.2478 cm。图8(b)显示最大相对误差为8.2166%。由此看出在对高度做精确测量时需要考虑由坐标混淆引入的误差。

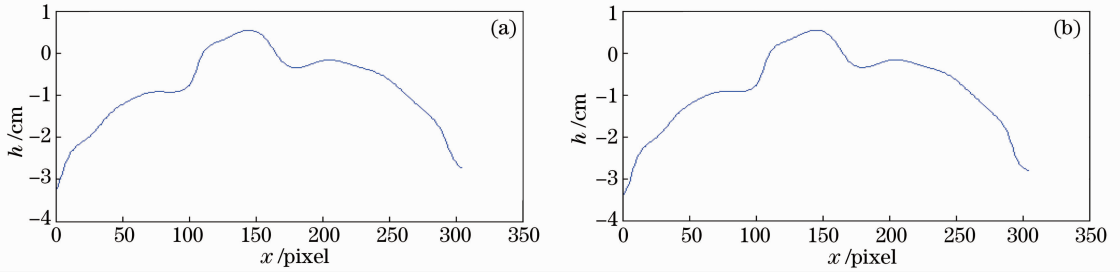


图 7 (a) 坐标混淆时第 320 行高度曲线;(b) 一级修正第 320 行高度曲线

Fig. 7 (a) Height curve of the 320th row (a) in coordinate confusion and (b) with the first-order correction

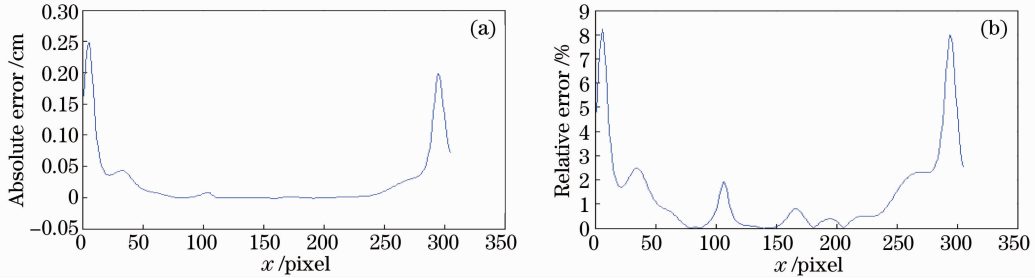


图 8 (a) 高度分布的绝对误差;(b) 高度分布的相对误差

Fig. 8 (a) Absolute error and (b) relative error of the height distribution

## 5 结 论

本文从理论上探讨了由于坐标混淆引起的高度测量误差,得到了高度的一级修正公式,离中心点越远处,以及斜率越大的地方,误差越大。另外在实验上采用双色条纹投影的傅里叶变换轮廓术,结合 Matlab 软件定量地计算了该误差。结果表明,在用 FTP 方法精确测量高度时,需要将此误差考虑在内,采用高度的修正公式来计算。

## 参 考 文 献

- Mitsuo Takeda, Kazuhiro Mutoh Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3D object shapes[J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24): 3977~3982
- Chen Jiabi, Su Xianyu. Optical Information Technique Principles & Applications [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002  
陈家璧, 苏显渝. 光学信息技术原理及应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002
- Zhang Chao, Duan Fajie, Xing Minghao *et al.*. Fiber-optic interferometer projection of real-time Fourier profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(2): 0207001  
张超, 段发阶, 邢明浩等. 光纤干涉投影实时傅里叶轮廓术的研究[J]. 光学学报, 2011, **31**(2): 0207001
- Wang Tao, Chen Wenjing, Zhong Min *et al.*. 2D S-transform profilometry based on the structured light projection[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(12): 1207002  
王焘, 陈文静, 钟敏等. 基于结构光投影的二维 S 变换轮廓术[J]. 光学学报, 2012, **32**(12): 1207002
- Wu Yingchun, Cao Yiping, Li Yang. Composite Fourier transform profilometry based on flat image modulation[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2013, **25**(1): 7~11  
武迎春, 曹益平, 李洋. 基于背景光调制的复合光傅里叶变换轮廓术[J]. 强激光与粒子束, 2013, **25**(1): 7~11
- Xu Jianliang, Wang Ming, Pan Hui *et al.*. Fourier transform profilometry of tilted measurement system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(7): 74210  
徐建亮, 汪敏, 潘慧等. 倾斜式测量系统的傅里叶变换轮廓术研究[J]. 物理学报, 2011, **60**(7): 74210
- Bian Xintian, Cheng Ju, Su Xianyu *et al.*. Data merging of two-camera Fourier transform profilometry system[J]. *Laser Journal*, 2011, **32**(4): 18~19  
边心田, 程菊, 苏显渝等. 双摄像机傅里叶变换轮廓术的数据融合[J]. 激光杂志, 2011, **32**(4): 18~19
- Chen Fanxiu, Wang Jing, Li Hongsheng. Abrasion topography based on Fourier transform profilometry[J]. *J. Mechanical Engineering*, 2011, **47**(17): 72~77  
陈凡秀, 王静, 李宏升. 基于傅里叶变换轮廓术的磨痕形貌测量[J]. 机械工程学报, 2011, **47**(17): 72~77
- Liu Dahai, Lin Bin. Fourier transform profilometry using zero frequency elimination based on gray modulation[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(11): 1697~1701  
刘大海, 林斌. 利用强度调制消除零频的傅里叶变换轮廓测量[J]. 光子学报, 2011, **40**(11): 1697~1701

- 10 Su Xianyu, Li Jian, Guo Lurong. Improved Fourier transform profilometry[C]. *SPIE*, 1988, **954**: 32~35
- 11 Li Jian, Su Xianyu, Guo Lurong. Improved Fourier transform profilometry of the automatic measurement of three-dimensional object shapes[J]. *Opt. Engng.*, 1990, **29**(12): 1439~1444
- 12 Chen Wenjing, Su Xianyu, Cao Yiping *et al.*. Improved FTP based on bi-color fringe projection[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(10): 1153~1157  
陈文静, 苏显渝, 曹益平等. 基于双色条纹投影的快速傅里叶变换轮廓术[J]. *光学学报*, 2003, **23**(10): 1153~1157