

# 切比雪夫多项式在单台经纬仪记忆跟踪中的应用

李强 崔岩

(中国人民解放军 63811 部队, 四川 西昌 615000)

**摘要** 针对单台经纬仪对目标进行跟踪时,易出现目标短暂丢失的情况,使用拟合精度最好的切比雪夫多项式,对经纬仪观测的数据对目标的轨迹进行拟合与外推,并与传统的插值法进行了比较,精度高于传统的插值算法。通过残差比较得出六次多项式时拟合精度和计算速度最佳,误差约为  $8.226 \mu\text{m}$ 。在经纬仪脱靶量无效或者目标速度突变时,经纬仪能够按照预测的轨迹运动。通过实验验证,该方法可在较短时间范围内(3~4 s)经纬仪跟丢目标的情况下对目标进行稳定跟踪。目前,该问题在国内外均处于理论研究阶段,尚未应用于工程实践。

**关键词** 光学器件;目标跟踪;经纬仪;切比雪夫多项式

**中图分类号** TP391 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP50.042301

## Application of Chebyshev Polynomial in Memory Tracking with Single Theodolite

Li Qiang Cui Yan

(Troop 63811, the People's Liberation Army, Xichang, Sichuan 615000, China)

**Abstract** Aiming at the case of target missing in a short time occurring frequently in target tracking with a single theodolite, Chebyshev polynomial is used to fit and extrapolate the trajectory of the target with the data observed by theodolite. Chebyshev polynomial has a better accuracy than the traditional method of interpolation by comparison. The results of residuals and standard deviation calculated through the least square method show that six-order polynomial has the best fitting accuracy with the error of about  $8.226 \mu\text{m}$ . When the missing distance of theodolite is invalid or the target speed features suddenly changes, the theodolite is able to follow the trajectory of the predicted movement. Experimental results show that this method can be used to fulfill stable target tracking when the theodolite loses the targets within a short scope of time (3~4 s). Recently, this problem is still under theoretical study and cannot be put into engineering practice in the near future.

**Key words** optical devices; target tracking; theodolite; Chebyshev polynomial

**OCIS codes** 230.2090; 150.1135; 100.4999; 100.5010; 070.5010

## 1 引言

光电经纬仪主要用于获取并记录运载火箭发射、导弹、炮弹等飞行过程中起飞段、级间分离等重要段落、重要事件的实况景象,通过对视频图像的分析,可实现对场景中目标的定位和识别,帮助指挥员及时了解现场实况<sup>[1]</sup>,为指挥员提供形象直观的决策信息,并为性能评定和故障分析提供依据。随着经纬仪地位的提高,观测任务的成功与否愈加重要。然而光电经纬仪易受天气和发动机二次点火等影响导致对比度降低,在目标再次进入视场前易造成短暂丢失。因此,经纬仪在目标丢失时能否正常、精确的进行记忆跟踪,是观测任务成功与否的必要条件。

以下几种情况会影响经纬仪对目标的精密跟踪:

- 1) 目标短时间内被遮挡。背景物体遮挡目标等复杂情形会引发跟踪丢失或跟踪错误等问题,因此,遮挡处理是目标跟踪算法的重点,也是难点之一<sup>[2]</sup>。跟踪控制中如何采用合适的方法使此过程平稳过渡尤其重要。
- 2) 目标的推进器关闭<sup>[1]</sup>。此时目标的红外辐射特性消失,红外经纬仪无法捕获特征点。
- 3) 大气抖动和仪器指向与太阳的夹角太小<sup>[3]</sup>。两种情况均影响经纬仪对目标提取的准确性。目前自适

收稿日期: 2012-12-11; 收到修改稿日期: 2013-01-09; 网络出版日期: 2013-03-08

作者简介: 李强(1985—),男,本科,工程师,主要从事光学系统设计方面的研究。E-mail: 905628042@qq.com

应光学系统的控制算法是线性时不变的,是基于已知或假定的大气湍流统计特性的,没有自适应性<sup>[4]</sup>。

4)电磁干扰等。

当以上情况发生后,如何用已知的目标运动轨迹推算出之后几秒的目标轨迹,是单台经纬仪必不可少的功能。本文针对这一问题提出采用切比雪夫多项式拟合目标轨迹,取得了较好的效果。

## 2 现有算法简介

### 2.1 拉格朗日插值算法

设经纬仪观测的目标坐标为 $(x_i, y_i)$ , $x$ 代表方位、 $y$ 代表俯仰,以 $x$ 为例,函数 $x = f(a)$ 的 $n+1$ 个节点为 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , $a$ 代表时间,对插值区间内的任何一点函数值,可用拉格朗日多项式计算<sup>[5]</sup>:

$$L_n = \sum_0^n l_i(a)x_i = \sum_{i=0}^n \left( \prod_n \frac{a - a_j}{a_i - a_j} \right) x_i, \quad (1)$$

式中 $l_i(a)$ 为插值基函数, $n$ 为阶数<sup>[6]</sup>。

传统的记忆跟踪算法采用拉格朗日插值法。拉格朗日插值方法在插值区间中部插值精度很高,但在靠近插值区间两端则会出现龙格现象,影响整个插值的精度,从而限制了其在数据处理和拟合中的应用<sup>[7]</sup>。

### 2.2 牛顿插值多项式

设经纬仪观测的目标坐标为 $(x_i, y_i)$ , $x$ 代表方位、 $y$ 代表俯仰,以 $x$ 为例,函数 $x = f(a)$ 的 $n+1$ 个节点为 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , $a$ 代表时间,建立一个次数不超过 $n$ 的多项式 $N_n(a)$ ,使 $N_n(a_i) = x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 。为此,只要在 $n+1$ 个已知节点 $a_i$ 以外再给一个节点 $a_x$ ,此时将点 $a$ 也看作一个节点,推出逼近原函数 $f(a)$ 的牛顿插值多项式 $N_n(a)$ 为<sup>[8]</sup>

$$N_n(a) = f(a_0) + f[a_0, a_1](a - a_0) + f[a_0, a_1, a_2](a - a_0)(a - a_1) + \dots + f[a_0, a_1, \dots, a_n] \cdot (a - a_0)(a - a_1) \dots (a - a_{n-1}). \quad (2)$$

## 3 切比雪夫多项式简介

在各种多项式中,切比雪夫多项式的逼近效果最佳,即使在时间段的两端近似性也很好<sup>[9]</sup>。

设经纬仪观测的目标坐标为 $(x_i, y_i)$ , $x$ 代表方位、 $y$ 代表俯仰,每个点都用切比雪夫多项式进行拟合,以

$x_i$ 为例,设 $x_i = x(a_i)$ , $i = 0, 1, \dots, n$ , $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ ,则设 $f(a) = \sum_{d=0}^m k_d a^d$ , $m = 0, 1, \dots, n$ , $f(a)$ 可看

作函数的 $m$ 次多项式, $a$ 代表时间,当 $m = n$ 时,应用拉格朗日插值公式可得唯一解<sup>[10]</sup>,则

$$f(a) = (-1)^m \sum_{d=0}^n \frac{b_m(a)b_{m+1}(a_i) - b_m(a_i)b_{m+1}(a)}{a_i - a} x_i, \quad (3)$$

式中系数 $x_i$ 是 $m$ 次多项式。由于表达式过于繁杂,切比雪夫又利用连分数和幂级数化简,求得多项式为<sup>[4]</sup>

$$f_m(a) = \sum_{d=0}^m v_d b_d(a), v_d = \frac{\sum_{i=0}^n b_d(a_i) x_i}{\sum_{i=0}^n b_d^2(a_i)}, \quad (4)$$

$b_d(a)$ 被定义为切比雪夫正交多项式,并且所求解为最优解<sup>[11]</sup>。

## 4 实验分析

采用20 cm口径光电经纬仪长焦电视对固定运动轨迹的目标进行120 m的远距离自跟踪,长焦电视系统如图1所示。物体共运动85 s,计算机采用CPCI总线结构



图1 长焦电视系统示意图

Fig. 1 Long-focus television system

工业控制计算机,并配以 CPCI 总线构架的 4 块多特征图像处理模块,CPU 主频 3 GHz,双 CPU,内存 2 GB,硬盘 160 GB,Windows XP 中文版操作系统,软件采用 Visual C++ 6.0 编程。

多特征图像处理模块原理如图 2 所示。经纬仪图像显示系统采集的目标数据如表 1 所示。120 s 的目标运动轨迹如图 3 所示。

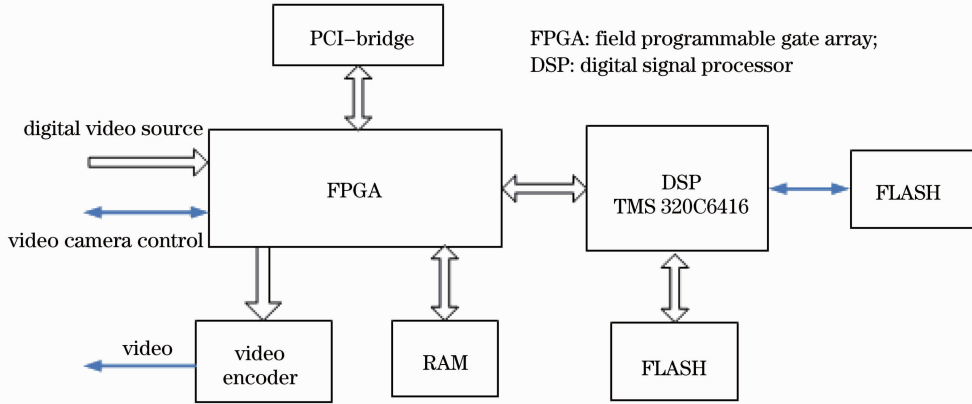


图 2 多特征图像处理模块原理图

Fig. 2 Multi-feature module for image processing

表 1 经纬仪测量数据

Table 1 Measurement data of the theodolite

$t / s$	$x / m$	$y / m$
10	20	45
20	23.4	45.8
30	26.5	45.7
40	29.1	41.2
50	37.6	41.0
60	50.4	40.2
70	64.3	38.1
80	78.7	34.5
90	89.4	38.4
100	100.6	41.8

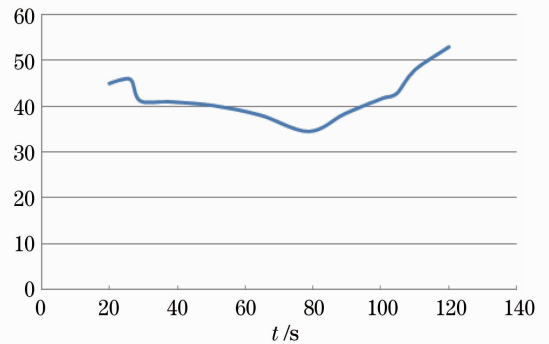


图 3 目标运动轨迹

Fig. 3 Motion trajectory of target

以  $x$  为例,当目标运动到  $x$  轴 100.6 m 之后,将目标遮挡,对目标运动曲线进行切比雪夫多项式拟合,为方便计算四舍五入取小数点后 1 位,并求取残差。由表 2 可看出,拟合精度与多项式的次数大体成正比关系。表 2~4 分别列出了切比雪夫多项式拟合拉格朗日插值和牛顿插值拟合的结果,以供比较。

由表 2~4 对比可知,拉格朗日插值在多项式次数较小的情况下,误差是很大的,在靠近区间端点处不收敛于  $f(a)$  的现象称为龙格现象。这种现象对等距节点的高次插值多项式是典型的。这样,对于局部变化

表 2 切比雪夫多项式拟合结果

Table 2 results of Chebyshev polynomial fitting

Order of polynomial	Residual /mm
3	96.8
4	12.3
5	$1.179 \times 10^{-2}$
6	$8.226 \times 10^{-3}$
7	$7.278 \times 10^{-3}$
8	$4.024 \times 10^{-3}$
9	$7.159 \times 10^{-3}$
10	$8.587 \times 10^{-3}$
11	$6.848 \times 10^{-3}$

表 3 拉格朗日插值结果

Table 3 Results of Lagrange interpolation

Order of polynomial	Residual /mm
3	326.8
4	75.7
5	9.35
6	$9.964 \times 10^{-2}$
7	$1.574 \times 10^{-3}$
8	$7.567 \times 10^{-3}$
9	$8.605 \times 10^{-3}$
10	$8.782 \times 10^{-3}$
11	$9.158 \times 10^{-3}$

比较剧烈的数据或者曲线,拉格朗日插值方法就不实用了<sup>[5]</sup>。在同一条件下切比雪夫多项式拟合结果精度优于拉格朗日和牛顿插值法。

由表 2 可知,选择 6 次多项式拟合能保证外推曲线的精度最好。目标运动到  $x$  轴 100.6 m 之后采用切比雪夫多项式的记忆跟踪轨迹如图 4 所示,拉格朗日插值与牛顿插值的记忆跟踪轨迹如图 5 和图 6 所示。通过图 3、图 4 的对比可知,在目标被遮挡后 3~4 s 内切比雪夫多项式的目标曲线斜率变化不大,之后随着时间的增加记忆跟踪的目标曲线将偏离实际目标的运动曲线。

表 4 牛顿插值拟合结果

Table 4 Fitting results of Newton interpolation

Order of polynomial	Residual /mm
3	269.1
4	107.5
5	1.21
6	$4.854 \times 10^{-2}$
7	$6.078 \times 10^{-3}$
8	$5.173 \times 10^{-3}$
9	$9.704 \times 10^{-3}$
10	$7.006 \times 10^{-3}$
11	$7.961 \times 10^{-3}$

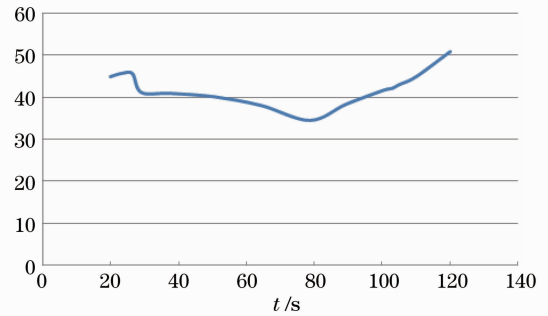


图 4 切比雪夫多项式的记忆跟踪轨迹

Fig. 4 Trajectory of memory tracking with Chebyshev polynomials

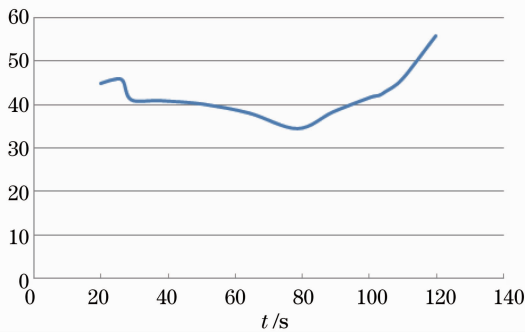


图 5 拉格朗日插值的记忆跟踪轨迹

Fig. 5 Trajectory of memory tracking with Lagrange interpolation

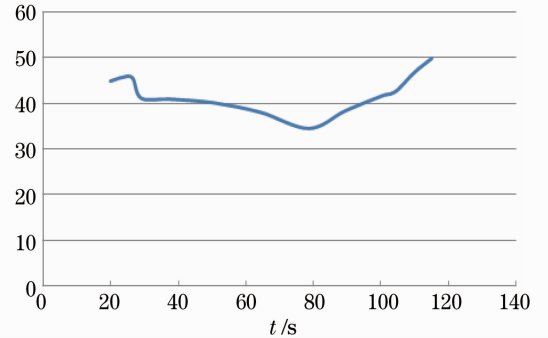


图 6 牛顿插值的记忆跟踪轨迹

Fig. 6 Trajectory of memory tracking with Newton interpolation

## 5 结 论

采用切比雪夫多项式进行经纬目标曲线的外推是可行的,它具有跟踪轨迹稳定真实、精度高等优点。该方法可替代传统的拉格朗日插值法和牛顿插值法,对经纬仪的记忆跟踪具有很高的应用价值。

## 参 考 文 献

- Zhang Su, Wang Wensheng. Optical correlation recognition of the moving target in cluttered background [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(1): 0107001  
张 肃, 王文生. 复杂背景下运动目标的光学相关识别 [J]. *光学学报*, 2012, **32**(1): 0107001
- Jin Biao, Hu Wenlong, Wang Hongqi. Occlusion handling method for multiple moving objects tracking based on multilevel tracker queues [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(8): 0815001  
金 标, 胡文龙, 王宏琦. 基于多级跟踪队列的运动目标跟踪遮挡处理 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(8): 0815001
- Wang Zongyou, Xu Zhiyong. Study on stable tracking target with single photoelectric theodolite [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2003  
王宗友, 徐智勇. 单台光电经纬仪对目标稳定跟踪的研究 [J]. *光电工程*, 2003
- Yan Zhaojun, Li xinyang, Rao Changhui. Numerical simulation of a prediction control algorithm for close-loop adaptive

- optical system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(1): 0101003
- 颜召军, 李新阳, 饶长辉. 一种自适应光学闭环系统预测控制算法的仿真研究 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(1): 0101003
- 5 Li Zhenghang, Huang Jingsong. GPS Measure and Data Processing [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2005
- 李征航, 黄劲松. GPS 测量与数据处理 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005
- 6 Zhao Hui, Zhang Shubi, Zhang Qiuzhao *et al.*. Standardization of GPS satellite orbits based on barycentric Lagrange interpolation [J]. *Global Positioning System*, 2011
- 赵 辉, 张书毕, 张秋昭 等. 基于质心拉格朗日插值的 GPS 轨道标准化方法 [J]. *全球定位系统*, 2011
- 7 Li Xinfu, Li Xiaofan. Comparison of the accuracy for fractal and Lagrange interpolation [J]. *J. Natural Science Heilongjiang University*, 2008
- 李信富, 李小凡. 分形插值与拉格朗日插值的比较研究 [J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2008
- 8 Wang Chunlin. Application of Newton interpolation [J]. *Wisco Technology*, 1999
- 王春霖. 牛顿插值法的应用 [J]. *武钢技术*, 1999
- 9 Chen Zhengyang, Yi Chonghai. Standardize the satellite orbit using Chebushev polynamial [J]. *Mine Surveying*, 2002
- 陈正阳, 易重海. 用切比雪夫多项式进行 GPS 卫星轨道标准化 [J]. *矿山测量*, 2002
- 10 P. L. Chebyshev. Sur les fractions continués [J]. *In J. Math. Pures Appl.*, 1858, 3: 289~323(in French)
- 11 Xu Chuansheng, Bai Xin. Chebyshev's interpolation theory by the method of least squares [J]. *J. Capital Normal University (Natural Science Edition)*, 2011
- 徐传胜, 白 欣. 切比雪夫的最小二乘法插值理论研究 [J]. *首都师范大学学报(自然科学版)*, 2011