

# 非定域非线性介质中空间光孤子传输特性的研究

刘建南 徐四六\*

(湖北科技学院电子与信息工程学院, 湖北 咸宁 437100)

**摘要** 基于二维非定域非线性介质中的库默模型,研究了库默孤子的传输特性。分析发现,存在一群二维库默-高斯孤子簇,如环形孤子、项链孤子和半月形孤子。数值模拟表明高斯孤子和环形孤子是稳定的,其他孤子是不稳定的;并且非线性调制系数、调制深度等参数对孤子传播特性有着重要的影响,随着它们的增加,孤子的稳定性增加。

**关键词** 光纤光学; 强非定域性; 空间孤子; 库默函数

**中图分类号** TN929.11 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP50.040602

## Research of Spatial-Soliton Transmission Characteristics in Nonlocal Nonlinear Medium

Liu Jiannan Xu Siliu

(School of Electronic and Information Engineering, Hubei University of Science and Technology, Xianning, Hubei 437100, China)

**Abstract** Based on Kummer model in nonlocal nonlinear medium, we study transmission characteristics of Kummer soliton. The results show that there is a group of two-dimensional Kummer-Gaussian soliton clusters, such as ring solitons, necklace solitons and lune solitons. Numerical simulation shows that Gaussian solitons and ring solitons are stable, while other solitons are not stable. Nonlinear modulation coefficient and modulation depth parameters have an important influence on the stability of the soliton, with their increase, the stability of the soliton improves.

**Key words** fiber optics; strong nonlocality; spatial soliton; Kummer function

**OCIS codes** 060.4370, 060.5530, 060.4510

## 1 引言

非定域光孤子的研究始于对自陷效应和不同种类非定域非线性介质中的空间孤立波实验观察和理论研究<sup>[1]</sup>。非定域性是自然界中很普遍的物理现象,其在非线性介质中的差异性已经被证实,如原子蒸气<sup>[2]</sup>、向列液晶<sup>[3]</sup>、光致折变介质<sup>[4]</sup>以及玻色爱因斯坦凝聚体<sup>[5]</sup>等。非定域性已经在非线性光学中扮演很重要的角色<sup>[6~8]</sup>。关于空间非定域非线性的研究显示出了许多有趣的现象<sup>[8~10]</sup>,其中最为突出的是非定域性趋向于抑制和调制不稳定的平面波在自聚焦介质中的传播。众所周知,聚焦非线性介质中的多维定域波在超过某一有限的传输距离时可能展现出毁灭性的塌陷。而非定域性可以保护光波崩塌和维持多维孤子的稳定<sup>[11,12]</sup>。特别是近年来在对强非定域介质中空间孤子传输的研究中,一系列由特殊函数组成的孤子群相继被找到,将这一领域的研究推向新的高度<sup>[13,14]</sup>。

本文首先建立一个非定域非线性介质中的二维库默孤子模型,采用分步傅里叶算法研究发现,非线性调制系数、调制深度等参数对孤子传播特性有着重要的影响,且随着传播距离的增加,这种影响会加剧。

## 2 模型

非定域非线性介质中的近轴光束的传输特性,可以通过非定域非线性薛定谔方程(NNSE)来描述[其标

收稿日期: 2012-12-20; 收到修改稿日期: 2013-01-28; 网络出版日期: 2013-04-01

基金项目: 湖北省自然科学基金(2011CDC005)、湖北省教育厅项目(D20122804)和湖北科技学院项目(12010507084)资助课题。

作者简介: 刘建南(1991-),男,本科生,主要从事光通信方面的研究。E-mail: 395273929@qq.com

\* 通信联系人。E-mail: xusiliu@yahoo.com.cn

量电场域为  $u(\mathbf{r}, z)$ ]:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 u + N(I)(\mathbf{r}, z)u = 0, \quad (1)$$

$$N(I)(\mathbf{r}, z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} R(\mathbf{r}-\mathbf{r}') |u(\mathbf{r}, z)|^2 d\mathbf{r}', \quad (2)$$

非线性项  $N(I)(\mathbf{r}, z)$  代表一般非定域形式。(1), (2) 式中  $z$  和  $\mathbf{r} = (x, y)$  是传播距离和横向矢量;  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2}$  为极坐标系中的横向拉普拉斯算符,  $\varphi$  为方位角,  $r^2 = x^2 + y^2$ ;  $R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  为介质的响应函数, 一般为对称的实函数, 它满足归一化条件  $\int R(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = 1$ ;  $I = |u(\mathbf{r}', z)|^2$  为光强。当响应函数为  $\delta$  函数时,  $N(I)(\mathbf{r}, z) = |u(\mathbf{r}, z)|^2$ , (1) 式是简单的非线性薛定谔方程。对于强非定域介质, 介质的响应函数的宽度远大于光束的宽度, 对  $\mathbf{r}'$  在  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  点泰勒展开  $R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  函数, NNSE 变成了量子谐振子的薛定谔方程。最近我们得到强非定域薛定谔方程具有精确的自相似库默尔孤子解<sup>[13]</sup>:

$$u(r, \varphi, z) = \frac{\mu P}{\omega} (\cos m\varphi + iq \sin m\varphi) \left( \frac{r}{\omega} \right)^m \exp \left[ -\frac{\lambda r^2}{2\omega^2} - i(ar^2 + c) \right] F'(-n, m+1, \lambda\theta^2), \quad (3)$$

式中  $\mu$  为归一化常数,  $P$  为光束的初始功率,  $\lambda$  为非零的参数,  $F'(-n, m+1, \lambda\theta^2) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{(m+1)_k} (\lambda\theta^2)^k$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) 是连带库默尔多项式,  $\omega(z)$ ,  $\theta(z, r)$ ,  $a(z)$ ,  $c(z)$  分别是光束的束宽、自相似变量、相移和波前曲率:

$$\omega^2 = \omega_0^2 (\cos^2 2z + \lambda_1 \sin^2 2z),$$

$$\theta(z, r) = \frac{r}{\omega(z)},$$

$$a(z) = a_0 + (2n + m + 1) \arctan \left( \frac{\lambda}{\sqrt{2}\omega_0} \tan \sqrt{2}z \right),$$

$$c(z) = \sqrt{\frac{s}{8}} \frac{(-1 + \lambda_1) \sin 2\sqrt{2}z}{\cos^2 \sqrt{2}z + \lambda_1 \sin^2 \sqrt{2}z},$$

参数  $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\omega_0^2}$ ,  $m$  为实常数, 被称为涡旋或者拓扑电荷,  $n$  是一个非负整数,  $\omega_0$  是初始束宽, 参数  $q$  ( $0 \leq q \leq 1$ )

描述光强调制深度。

线性薛定谔方程的库默尔孤子解  $u_{mn}(z, r, \varphi)$  是稳定解。为了得到一般非定域非线性薛定谔方程(1)式的库默尔孤子解, 采用  $u(z, r, \varphi) = r^m \Phi(\varphi) V(z, r)$  的形式, 其中  $\Phi = \cos m\varphi + iq \sin m\varphi$ 。因此, (1)式具有以下形式:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + V |\Phi|^2 \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} R(\mathbf{r}-\mathbf{r}') |V(\mathbf{r}, z)|^2 r'^{2m} d\mathbf{r}' = 0. \quad (4)$$

### 3 非定域非线性库默尔孤子

为了获得(4)式的孤子解, 必然要选择相应的响应函数。在非线性非定域介质中, 对于不同的响应函数, 存在着不同的物理意义。我们选择高斯响应  $R(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = (1/\pi\sigma^2) \exp[-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2/\sigma^2]$ 。响应函数的宽度  $\sigma$  控制非定域性。当  $\sigma \rightarrow 0$  时, (1) 式为定域克尔模型。假设  $\sigma = 2$ ,  $P = 3$ 。这并不意味着讨论的是强非定域范围, 因为判别标准依赖于假定势  $V$  的宽度和高度的选择。研究发现随着  $\sigma$  和  $P$  的增加, 非线性介质的非定域性加强, 这是得到稳定孤子解的一个明智之选。

根据文献[14]的数值方法来求(4)式的稳定孤子解。通过选择与线性库默尔孤子解一致的初始条件

$$u(0, r, \varphi) = \frac{\mu P}{\omega_0} (\cos m\varphi + iq \sin m\varphi) \left( \frac{r}{\omega_0} \right)^m \exp \left[ -\frac{\lambda r^2}{2\omega_0^2} - i(a_0 r^2 + c_0) \right] F'(-n, m+1, \lambda\theta^2),$$

并取参数  $\omega_0 = 1$ ,  $a_0 = c_0 = 0$ , 得到(4)式的库默尔孤子解。理论预测<sup>[15,16]</sup> 和实验研究<sup>[17]</sup> 表明, 只要参数  $q$  的选择恰当, 在这样的初始条件下, 光束的拓扑电荷  $m$  可以取分数值。图 1~4 展示了二维光强  $|u|^2$  的轮廓分布特征, 同时通过比较  $\sigma = 2, P = 3$  和  $\sigma = 100, P = 100$  对孤子传输特性的影响来确认孤子稳定性的提高。

图 1 为参数  $n$  取不同值时非定域非线性库默尔介质中孤子在  $x$ - $y$  平面上的强度分布特征。图中传播距离  $z$

以光的衍射长度为单位。相关的参数为： $a_0 = 1, \omega_0 = 0.7, \lambda_0 = 0.1, \lambda = 0.5, \mu = 1, q = 1, \sigma = 2, P = 3$ 。有趣的是当 $q = 1$ 时，随着传播距离 $z$ 的增大，孤子由环形涡旋逐渐分裂，当 $z = 100$ 时为左右对称的两半，变成半月形，并且分裂的距离在增大，形成弯月型孤子。而参数 $n$ 对孤子的传输不产生影响。由图可见，在较大的传输距离下孤子的传输是稳定的（尽管传输距离的最大值为 $z = 100$ ）。

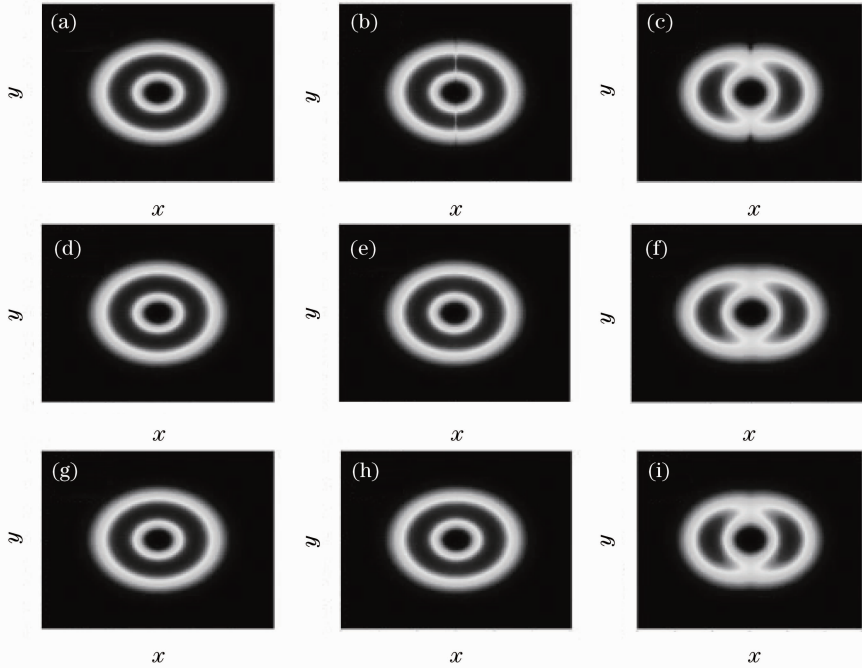


图 1 参数  $n$  取不同值时库默介质孤子在  $x$ - $y$  平面上的强度分布。(a)~(c)  $n=1, m=0$ ; (d)~(f)  $n=3, m=2$ ; (g)~(i)  $n=5, m=2$ 。从左到右传输距离分别为  $z=0, 50, 100$

Fig. 1 Intensity contour plots of Kummer solitons with different distances  $z=0, 50, 100$  from left to right in  $x$ - $y$  plane. (a)~(c)  $n=1, m=0$ ; (d)~(f)  $n=3, m=2$ ; (g)~(i)  $n=5, m=2$

图 2 为参数  $m$  取不同值时库默孤子在  $x$ - $y$  平面上的强度分布。当参数  $q=0$ ， $m$  值为整数时，对于不同的  $m$ ，库默空间孤子形成一族孤子群，它们有一些共同的性质（图 3）：1）光强分布呈现单层的明暗相间破缺的环形光斑，中心的光强最小；2）孤子群的光斑的个数为  $2m$ ；3）当  $m$  足够大时，斑点形成项链。当  $m$  不为整数时，尽管孤子强度相对于  $x$  轴和  $y$  轴保持对称性（这与  $m$  值为整数时相同），但是孤子间出现相互重

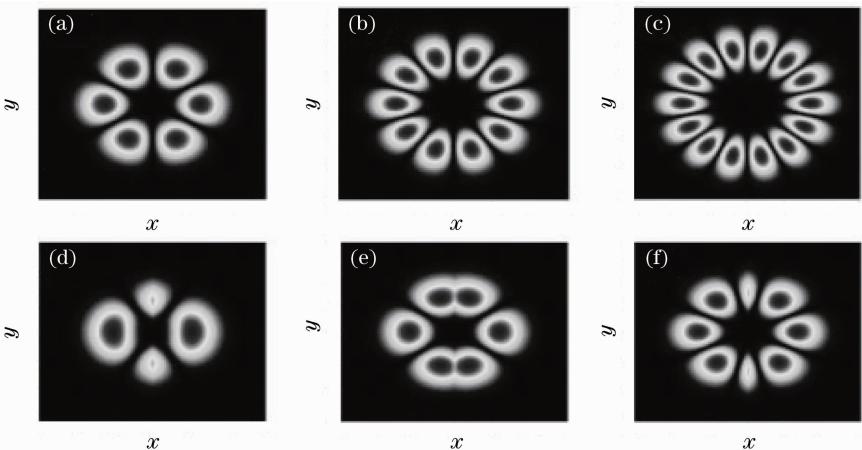


图 2 参数  $m$  取不同值时库默孤子在  $x$ - $y$  平面上的强度分布。(a)  $m=3$ ; (b)  $m=5$ ; (c)  $m=7$ ; (d)  $m=1.5$ ; (e)  $m=2.5$ ; (f)  $m=3.5$

Fig. 2 Intensity contour plots of Kummer solitons with  $q=0$  in  $x$ - $y$  plane. (a)  $m=3$ ; (b)  $m=5$ ; (c)  $m=7$ ; (d)  $m=1.5$ ; (e)  $m=2.5$ ; (f)  $m=3.5$

叠, 孤子群的光斑的大小不再等大, 孤子群的光斑的个数不等于  $2m$ 。

图 3 为参数  $\sigma$  和  $P$  取不同值时库默孤子在  $x$ - $y$  平面上的强度分布。参数  $q = 0, m = 3, 5, 7$ 。可以看出, 随着  $m$  的增加, 孤子变得越来越不稳定, 尽管如此, 当参数  $\sigma$  和  $P$  的增大时, 孤子的稳定性增加。

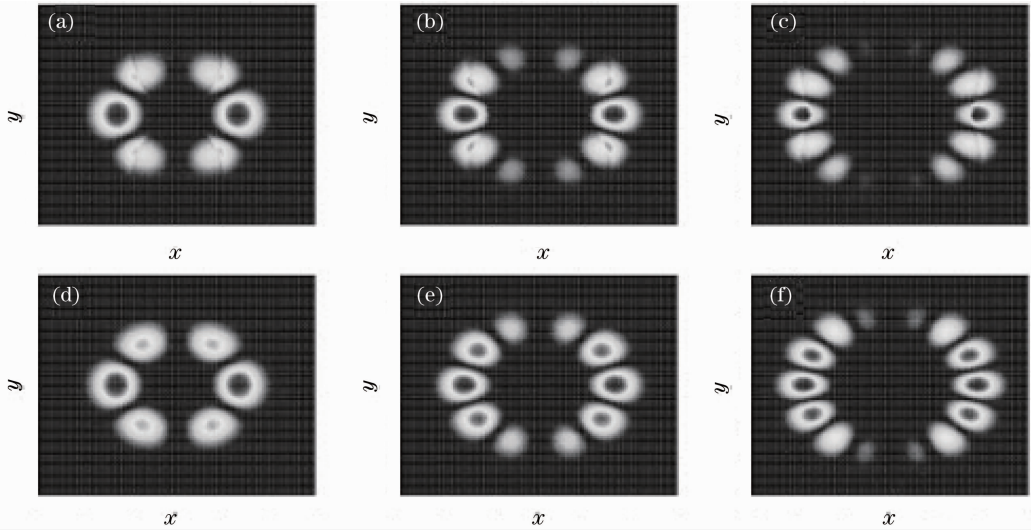


图 3 参数  $\sigma$  和  $P$  取不同值时库默孤子在  $x$ - $y$  平面上的强度分布。参数  $q = 0, m = 3, 5, 7$ (从左到右)。

(a)~(c)  $\sigma=2, P=3$ ; (d)~(f)  $\sigma=P=100$

Fig. 3 Intensity contour plots of Kummer solitons with different  $\sigma$  and  $P$  in  $x$ - $y$  plane when  $q=0$  and  $m=3, 5, 7$  from left to right. (a)~(c)  $\sigma=2, P=3$ ; (d)~(f)  $\sigma=P=100$

图 4 为参数  $m$  和  $q$  取不同值时库默孤子在  $x$ - $y$  平面上的强度分布。可以看出随着  $q$  的增加, 孤子间存在着相互作用, 间距不断减小, 当  $q = 1$  时, 无论是  $m$  为整数还是分数, 均形成环状孤子。当  $m$  变大时, 孤子环的半径也在增大。

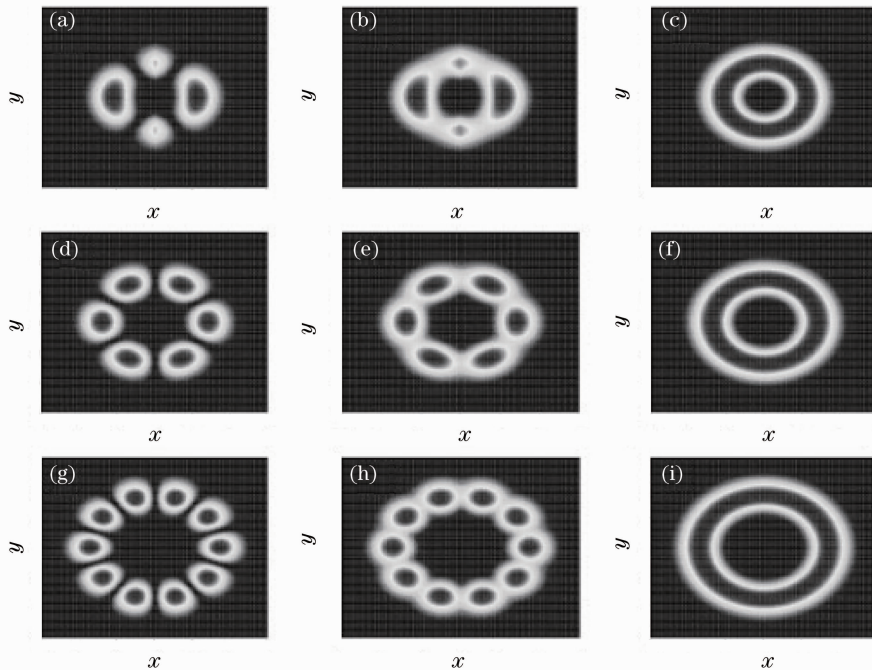


图 4 参数  $m$  和  $q$  取不同值时库默孤子在  $x$ - $y$  平面上的强度分布。 $m=1.5, 3, 5$ (从上到下), 调制深度参数  $q=0, 0.5, 1$ (从左到右)

Fig. 4 Intensity contour plots of Kummer solitons with different  $m$  and  $q$  in  $x$ - $y$  plane.  $m=1.5, 3, 5$  from top to bottom, and  $q=0, 0.5, 1$  from left to right, respectively

## 4 结 论

研究了在一般非定域非线性介质中库默孤子的存在和稳定性。发现当响应函数为高斯函数时,可以得到不同类型的二维孤子。分析发现,存在一群二维库默-高斯孤子簇,如环形孤子、项链孤子和半月形孤子。数值模拟表明高斯孤子和环形孤子是稳定的,其他孤子是不稳定的;随着参数 $\sigma$ 、 $P$ 的增加,孤子的稳定性增加。

## 参 考 文 献

- 1 Yu, S. Kivshar, G. P. Agrawal. Optical Solitons: from Fibers to Photonic Crystals[M]. San Diego: Academic, 2003
- 2 D. Suter, T. Blahser. Stabilization of transverse solitary waves by a nonlocal response of the nonlinear medium[J]. *Phys. Rev. A*, 1993, **48**(6): 4583~4586
- 3 C. Conti, M. Peccianti, G. Assanto. Route to nonlocality and observation of accessible solitons[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, **91**(7): 073901
- 4 Carmel Rotschild, Oren Cohen, Ofer Manela *et al.*. Solitons in nonlinear media with an infinite range of nonlocality: first observation of coherent elliptic solitons and of vortex-ring solitons[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **95**(21): 213904
- 5 P. Pedri, L. Santos. Two-dimensional bright solitons in dipolar Bose-Einstein condensates[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **95**(20): 200404
- 6 Wang Zhenbao, Feng Guobin, Yang Pengling *et al.*. Numerical simulation and applications of a method for attenuating laser power density[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2013, **50**(2): 022201  
王振宝, 冯国斌, 杨鹏翎等. 一种激光功率密度衰减方法的数值模拟及应用[J]. 激光与光电子学进展, 2013, **50**(2): 022201
- 7 Li Li, Fan Zhongwei, Yu Jin *et al.*. Research progress of Yb: KGW femtosecond laser[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2012, **49**(11): 110004  
李 丽, 樊仲维, 余 锦等. Yb: KGW 飞秒激光器研究进展[J]. 激光与光电子学进展, 2012, **49**(11): 110004
- 8 W. Krolikowski, O. Bang, N. I. Nikolov *et al.*. Modulational instability, solitons and beam propagation in spatially nonlocal nonlinear media[J]. *J. Opt. B*, 2004, **6**(5): S288
- 9 Zhou Jin, Gu Lingling, Yu Weikun *et al.*. Study of the coupled-resonator slow light structures and their applications[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2011, **48**(12): 120607  
周 瑾, 谷玲玲, 于伟坤等. 基于耦合谐振系统的慢光结构及其应用[J]. 激光与光电子学进展, 2011, **48**(12): 120607
- 10 A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko. Dynamics of two-dimensional coherent structures in nonlocal nonlinear media[J]. *Phys. Rev. E*, 2006, **73**(6): 066605
- 11 Servando Lopez-Aguayo, Anton S. Desyatnikov *et al.*. Stable rotating dipole solitons in nonlocal optical media[J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(8): 1100~1102
- 12 Cao Longgui, Lu Daquan, Hu Wei *et al.*. Interaction between spacial optical solitons in sub-strongly non-local nonlinear media [J]. *Acta. Phys. Sin.*, 2008, **57**(10): 6365~6372  
曹龙贵, 陆大全, 胡 巍等. 亚强非局域空间光孤子的相互作用[J]. 物理学报, 2008, **57**(10): 6365~6372
- 13 Xu Siliu, Liu Huiping, Yi Li. Two-dimensional Kummer-Gaussian soliton clusters in strongly nonlocal nonlinear media[J]. *Acta. Phys. Sin.*, 2010, **59**(2): 1069~1075  
徐四六, 刘会平, 易 林. 强非局域非线性介质中的二维库墨-高斯孤子簇[J]. 物理学报, 2010, **59**(2): 1069~1075
- 14 W. P. Zhong, L. Yi. Two-dimensional Laguerre-Gaussian soliton family in strongly nonlocal nonlinear media[J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **75**: 061801
- 15 M. V. Berry. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps[J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2004, **6**(4): 259~268
- 16 S. H. Tao, X. C. Yuan, J. Lin. Fractional optical vortex beam induced rotation of particles[J]. *Opt. Express*, 2005, **13**(20): 7726~7731
- 17 Z. H. Musslimani, J. Yang. Self-trapping of light in a two-dimensional photonic lattice[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2004, **21**(5): 973~981