

三模压缩粒子数态的量子特性

卢道明

(武夷学院电子工程系, 福建 武夷山 354300)

摘要 将双模压缩算符进行推广, 构建了三模压缩算符, 并将其作用在三模粒子数态上来构建三模压缩粒子数态。利用数值计算的方法研究了该量子态的量子特性。讨论了压缩参数变化和光子数变化对压缩效应和反聚束效应的影响。计算结果表明: 压缩参数在一定值范围内, 态呈现出压缩效应, 并且随着光子数的增大, 压缩效应减弱。另一方面, 态中 a_1 模的反聚束效应随着光子数的增大而减弱, 而 a_2 和 a_3 模始终呈现出反聚束效应。

关键词 量子光学; 三模压缩粒子数态; 压缩效应; 反聚束效应

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP50.032701

Quantum Properties of Three-Mode Squeezed Number State

Lu Daoming

(Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, china)

Abstract In this paper based on generalizing of two-mode squeezed operator, we construct a new three-mode squeezed operator. Further, the three-mode squeezed partical-number state is proposed by the technique of integration with an ordered product of operators. Its squeezing and antibunching effects are analyzed. The results indicate that its squeezing is weakened with the increase of photon number, and the antibunching effect of a_1 -mode field is also weakened with the increase of photon number; on the other hand, its a_2 -mode field and a_3 -mode field both exhibit antibunching effects.

Key words quantum optics; three-mode squeezed partical-number state; squeezing; antibunching effect

OCIS codes 270.6570; 000.6800

1 引言

压缩算符和压缩态一直是量子光学研究的热门课题之一。自从 1970 年 Stoler^[1] 提出光场的压缩概念以来, 人们已对不同光场态的压缩效应等量子特性做了大量的研究。另一方面, 构造具有量子效应的量子态一直是量子光学中令人关注的课题。构造量子态的方法有多种, 利用算符作用在光场态上来产生具有不同特性的量子态就是其中之一。至今, 已利用产生算符和湮没算符作用在相干态上来产生光子加相干态和光子减相干态^[2~4], 利用压缩算符作用在真空态上来产生压缩真空态^[5~9]。例如, Agarwal 等^[5] 讨论了单光子减压真空态的亚泊松分布和 Wigner 函数; Zhou 等^[6] 构造了光子减双模压缩热态, 并且计算了它的光子数分布; 袁洪春等^[7] 研究了单双模连续真空态的量子统计性质。最近, 宋军等^[10] 讨论了双模压缩数态光场的 Wigner 函数及其特性, 文献^[11~13] 对压缩热态的量子特性进行了系统的研究。Xu^[14] 将双模压缩算符进行推广, 提出了三模压缩算符, 构建了三模压缩真空态, 并利用范洪义发明的有序(包括正规乘积、反正规乘积和 Weyl 编序)算符内的积分(IWOP)技术研究了该量子态的压缩效应和 Wigner 函数^[10]。本文将三模压缩算符作用在粒子数态上, 构建了三模压缩粒子数态, 并利用 IWOP 技术, 采用数值计算方法研究了该量子态的压缩效应和反聚束效应。

2 三模压缩粒子数态

首先回顾双模压缩算符 $S_2 = \exp[\lambda(a_1 a_2 - a_1^\dagger a_2^\dagger)]$, 式中 a_i^\dagger 和 a_i ($i = 1, 2$) 分别为光场的产生算符和湮

收稿日期: 2012-12-25; **收到修改稿日期**: 2013-01-02; **网络出版日期**: 2013-02-28

基金项目: 福建省自然科学基金(2011J01018)资助课题。

作者简介: 卢道明(1963—), 男, 硕士, 教授, 主要从事量子光学方面的研究。E-mail: daominglu79@hotmail.com

没算符, λ 为压缩参数。定义光场的两个正交分量

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a_1 + a_1^\dagger + a_2 + a_2^\dagger) \\ y = \frac{1}{2\sqrt{2}i}(a_1 - a_1^\dagger + a_2 - a_2^\dagger) \end{cases} \quad (1)$$

在双模压缩真空态中, x 和 y 的均方偏差为

$$\begin{cases} \Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{4} \exp(-2\lambda) \\ \Delta y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \frac{1}{4} \exp(2\lambda) \end{cases} \quad (2)$$

上式表明双模压缩真空态具有压缩特性。

现在将 S_2 进行推广, 构建三模压缩算符

$$S_3 = \exp[u_1(a_1 a_2 - a_1^\dagger a_2^\dagger) + u_2(a_1 a_3 - a_1^\dagger a_3^\dagger)], \quad (3)$$

利用 $|000\rangle\langle 000| = : \exp(-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3) :$ 和 IWOP 技术, 在(3)式中插入相干态的完备关系, 可得出 S_3 的正规乘积表示为

$$\begin{aligned} S_3 = & \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3}{\pi^3} S_3 |z_1 z_2 z_3\rangle\langle z_1 z_2 z_3| = \frac{1}{\cosh r} \exp[-a_1^\dagger (a_2^\dagger \cos \theta + a_3^\dagger \sin \theta) \tanh r] \times \\ & : \exp\left[\frac{1 - \cosh r}{\cosh r} (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \cos^2 \theta + a_3^\dagger a_3 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger) \sin 2\theta)\right] : \times \\ & \exp[a_1 (a_2 \cos \theta + a_3 \sin \theta) \tanh r], \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, $\cos \theta = \frac{u_1}{r}$, $\sin \theta = \frac{u_2}{r}$ 。 S_3 具有么正变换

$$\begin{cases} S_3^\dagger a_1 S_3 = a_1 A_1 + a_2^\dagger B_1 + a_3^\dagger C_1 \\ S_3^\dagger a_2 S_3 = a_1^\dagger A_2 + a_2 B_2 + a_3 C_2 \\ S_3^\dagger a_3 S_3 = a_1^\dagger A_3 + a_2 B_3 + a_3 C_3 \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} A_1 &= \cosh r, \\ B_1 &= A_2 = -\cos \theta \sinh r, \\ C_1 &= A_3 = -\sin \theta \sinh r, \\ B_2 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cosh r, \\ C_2 &= B_3 = \frac{1}{2} (\cosh r - 1) \sin 2\theta, \\ C_3 &= \sin^2 \theta \cosh r + \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

采用 S_3 作用在三模粒子数态 $|lmn\rangle$ 上的方法, 构建三模压缩粒子数态为

$$|\varphi\rangle = S_3 |lmn\rangle, \quad (7)$$

式中 $|lmn\rangle$ 表示模 1、2、3 分别处于 $|l\rangle$ 、 $|m\rangle$ 和 $|n\rangle$ 态。

3 光场的压缩效应

对于三模光场, 为了研究它的压缩效应, 定义光场的两个正交分量

$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a_1 + a_2 + a_3 + a_1^\dagger + a_2^\dagger + a_3^\dagger) \\ F_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}i}(a_1 + a_2 + a_3 - a_1^\dagger - a_2^\dagger - a_3^\dagger) \end{cases} \quad (8)$$

它们满足对易关系

$$[F_1, F_2] = \frac{i}{2}. \quad (9)$$

为了描述 F_j ($j = 1, 2$) 分量被压缩的程度, 定义量

$$X_j = \Delta F_j^2 - \frac{1}{4} = \langle F_j^2 \rangle - \langle F_j \rangle^2 - \frac{1}{4}. \quad (10)$$

那么, F_j 分量被压缩的条件为 $X_j < 0$, X_j 负值越大表示 F_j 分量被压缩越深. 应用(8)式可得出

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1^2 = \frac{1}{12} \left[\sum_{j=1}^3 (a_j^2 + a_j^{+2} + 2a_j^+ a_j) + 3 + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + H.C) + \right. \\ \quad \left. (a_1^+ a_2 + a_1^+ a_3 + a_2^+ a_3 + a_2 a_1^+ + a_1 a_3^+ + a_2 a_3^+ + H.C) \right] \\ F_2^2 = \frac{1}{12} \left[\sum_{j=1}^3 (-a_j^2 - a_j^{+2} + 2a_j^+ a_j) + 3 - 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + H.C) + \right. \\ \quad \left. (a_1^+ a_2 + a_1^+ a_3 + a_2^+ a_3 + a_2 a_1^+ + a_1 a_3^+ + a_2 a_3^+ + H.C) \right]. \end{array} \right. \quad (11)$$

式中 $H.C$ 表示厄密共轭项. 应用(5)式和(7)式, 可得出

$$\begin{aligned} \langle a_1 \rangle &= \langle a_2 \rangle = \langle a_3 \rangle = \langle a_1^+ \rangle = \langle a_2^+ \rangle = \langle a_3^+ \rangle = 0, \\ \langle a_1^2 \rangle &= \langle a_2^2 \rangle = \langle a_3^2 \rangle = \langle a_1^{+2} \rangle = \langle a_2^{+2} \rangle = \langle a_3^{+2} \rangle = 0, \\ \langle a_1^+ a_1 \rangle &= lA_1^2 + (m+1)B_1^2 + (n+1)C_1^2, \\ \langle a_2^+ a_2 \rangle &= (l+1)A_2^2 + mB_2^2 + nC_2^2, \\ \langle a_3^+ a_3 \rangle &= (l+1)A_3^2 + mB_3^2 + nC_3^2, \\ 2\langle a_1 a_2 \rangle &= (2l+1)A_1 A_2 + (2m+1)B_1 B_2 + (2n+1)C_1 C_2, \\ 2\langle a_1 a_3 \rangle &= (2l+1)A_1 A_3 + (2m+1)B_1 B_3 + (2n+1)C_1 C_3, \\ \langle a_2 a_3 \rangle &= 0, \\ \langle a_1^+ a_2 \rangle &= \langle a_1^+ a_3 \rangle = \langle a_2 a_1^+ \rangle = \langle a_1 a_3^+ \rangle = 0, \\ \langle a_2^+ a_3 \rangle + \langle a_2 a_3^+ \rangle &= (2l+1)A_2 A_3 + (2m+1)B_2 B_3 + (2n+1)C_2 C_3. \end{aligned} \quad (12)$$

利用(12)式和(11)式, 可得出

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{6} \left[\sum_{j=1}^3 \langle a_j^+ a_j \rangle + 2\langle a_1 a_2 \rangle + 2\langle a_1 a_3 \rangle + 2\langle a_2^+ a_3 \rangle \right] = \\ &= \frac{1}{6} [lA_1^2 + (m+1)B_1^2 + (n+1)C_1^2 + (l+1)A_2^2 + mB_2^2 + nC_2^2 + (l+1)A_3^2 + mB_3^2 + nC_3^2 + \\ &+ (2l+1)(A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3) + (2m+1)(B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3) + \\ &+ (2n+1)(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)], \\ X_2 &= \frac{1}{6} \left[\sum_{j=1}^3 \langle a_j^+ a_j \rangle - \langle a_1 a_2 + a_2 a_1 \rangle - \langle a_1 a_3 + a_3 a_1 \rangle + \langle a_2^+ a_3 + a_2 a_3^+ \rangle \right] = \\ &= \frac{1}{6} [lA_1^2 + (m+1)B_1^2 + (n+1)C_1^2 + (l+1)A_2^2 + mB_2^2 + nC_2^2 + (l+1)A_3^2 + mB_3^2 + nC_3^2 - \\ &+ (2l+1)(A_1 A_2 + A_1 A_3 - A_2 A_3) - (2m+1)(B_1 B_2 + B_1 B_3 - B_2 B_3) - \\ &+ (2n+1)(C_1 C_2 + C_1 C_3 - C_2 C_3)]. \end{aligned} \quad (13)$$

为简单起见, 以下所有的计算中取 $u_1 = u_2 = u$. (l, m, n) 分别取(1, 1, 1)和(2, 2, 2)时, X_1 随压缩参数 u 的演化如图1所示. 从图1可见: (l, m, n) 取(1, 1, 1)时, X_1 出现压缩, 压缩范围[0.44, 0.75]; (l, m, n) 取(2, 2, 2)时, X_1 不出现压缩. 经过进一步计算, 当(l, m, n) 分别取(1, 0, 0), (2, 0, 0)和(4, 0, 0)时, 得到 X_1 的演化曲线如图2所示. 从图2可见: (l, m, n) 取(1, 0, 0)时, 压缩范围[0.18, 1.06]; (l, m, n) 取(2, 0, 0)时, 压缩范围[0.26, 0.99]; (l, m, n) 取(4, 0, 0)时, 压缩范围[0.34, 0.91]. 这表明随着光子数的增大, 压缩范围减小. 当 $m = n = 0$ 时, 由(13)式可得出

$$X_1 = \frac{1}{24} \exp(-2r) \left\{ \left[\sqrt{(3-2\sqrt{2})(l+1)} \exp(2r) - \frac{l+3}{\sqrt{(3-2\sqrt{2})(l+1)}} \right]^2 - \frac{4(l+2)}{(3-2\sqrt{2})(l+1)} \right\}. \quad (14)$$

其压缩条件为

$$\frac{l+3-2\sqrt{l+2}}{(3-2\sqrt{2})(l+1)} < \exp(2r) < \frac{l+3+2\sqrt{l+2}}{(3-2\sqrt{2})(l+1)}. \quad (15)$$

可见其压缩范围随光子数 l 的增大而减小,这与计算结果一致。综合图 1 和图 2 的结果,可见随光子数的增加压缩效应减弱。另一方面,数值计算结果表明 X_2 分量始终不压缩。

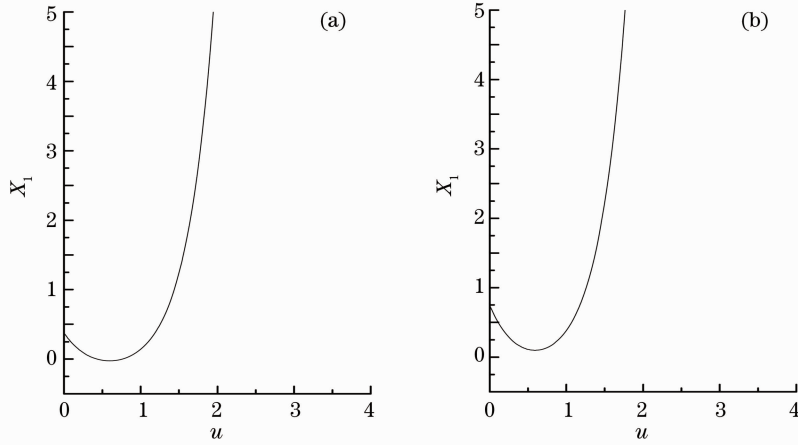


图 1 X_1 随参数 u 的演化。(a) $(l, m, n) = (1, 1, 1)$; (b) $(l, m, n) = (2, 2, 2)$

Fig. 1 Evolution of X_1 with the parameter u . (a) $(l, m, n) = (1, 1, 1)$; (b) $(l, m, n) = (2, 2, 2)$

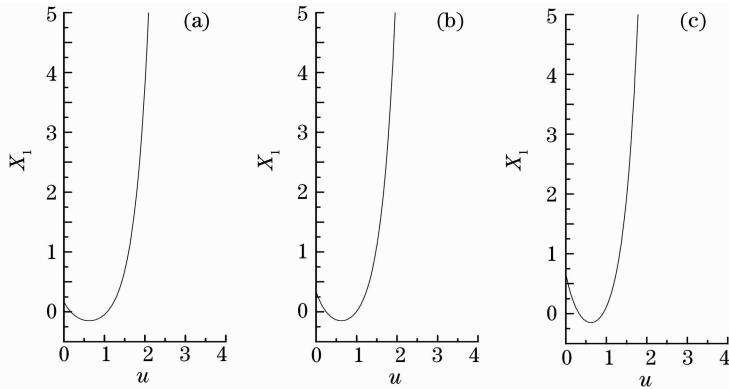


图 2 X_1 随参数 u 的演化。(a) $(l, m, n) = (1, 0, 0)$; (b) $(l, m, n) = (2, 0, 0)$; (c) $(l, m, n) = (4, 0, 0)$

Fig. 2 Evolution of X_1 with the parameter u . (a) $(l, m, n) = (1, 0, 0)$; (b) $(l, m, n) = (2, 0, 0)$; (c) $(l, m, n) = (4, 0, 0)$

4 光场的反聚束效应

在量子理论中,对于三模光场第 j 模的二阶关联函数定义为

$$g_j^2 = \frac{\langle a_j^{+2} a_j^2 \rangle}{\langle a_j^+ a_j \rangle^2}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (16)$$

定义 $G_j = g_j^2 - 1$ ($j = 1, 2, 3$),若 $G_j < 0$,则称第 j 模光场呈现出反聚束效应。利用(5)式和(7)式可得出

$$\begin{aligned} \langle a_1^{+2} a_1^2 \rangle &= l(l-1)A_1^4 + (m+1)(m+2)B_1^4 + (n+1)(n+2)C_1^4 + \\ &\quad 4l(m+1)A_1^2 B_1^2 + 4l(n+1)A_1^2 C_1^2 + 4(m+1)(n+1)B_1^2 C_1^2, \\ \langle a_2^{+2} a_2^2 \rangle &= (l+1)(l+2)A_2^4 + m(m-1)B_2^4 + n(n-1)C_2^4 + \\ &\quad 4(l+1)mA_2^2 B_2^2 + 4(l+1)nA_2^2 C_2^2 + 4mnB_2^2 C_2^2, \\ \langle a_3^{+2} a_3^2 \rangle &= (l+1)(l+2)A_3^4 + m(m-1)B_3^4 + n(n-1)C_3^4 + \\ &\quad 4(l+1)mA_3^2 B_3^2 + 4(l+1)nA_3^2 C_3^2 + 4mnB_3^2 C_3^2, \\ G_1 &= \frac{\langle a_1^{+2} a_1^2 \rangle}{\langle a_1^+ a_1 \rangle^2} - 1. \end{aligned} \quad (17)$$

对于 a_1 模, (l, m, n) 分别取 $(1, 1, 1)$ 和 $(2, 2, 2)$ 时, G_1 随压缩参数 u 的演化如图 3 所示。从图 3 可见:随着光子数的增加, 曲线上移, 反聚束效应减弱。 (l, m, n) 分别取 $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$ 和 $(4, 0, 0)$ 时, G_1 随压缩参数 u 的演化如图 4 所示。图 4 的演化曲线同样表明随着光子数的增加, 曲线上移, 反聚束效应减弱。当 $m = n = 0$ 时, 由(12)式和(17)式可得出

$$G_1 = \frac{l(l-1)A_1^4 + 8A_2^4 + 8lA_1^2A_2^2}{(lA_1^2 + 2A_2^2)^2} - 1,$$

$$\frac{dG_1}{dl} = \frac{1}{(lA_1^2 + 2A_2^2)^3} \{ [(2l-1)A_1^4 + 8A_1^2A_2^2] \times (lA_1^2 + 2A_2^2) + 2A_1^2[l(l-1)A_1^4 + 8A_2^2 + 8lA_1^2A_2^2] \}. \quad (18)$$

由上式可见, 当 $l \geq 1$ 时, $\frac{dG_1}{dl} > 0$ 。这表明随着光子数的增加, 曲线上移, 反聚束效应减弱。这一结果与数值计算结果一致。

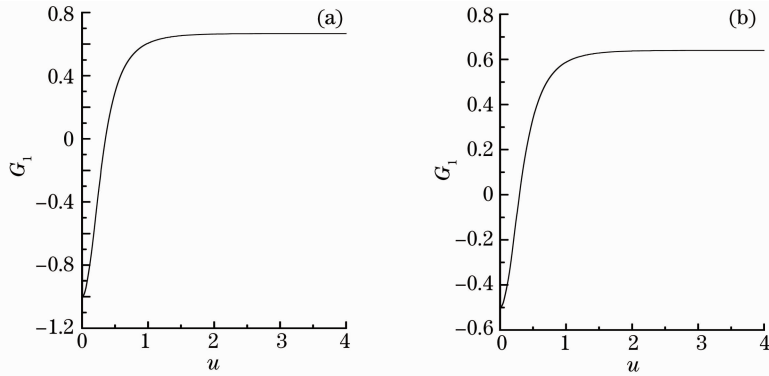


图 3 G_1 随参数 u 的演化。(a) $(l, m, n) = (1, 1, 1)$; (b) $(l, m, n) = (2, 2, 2)$

Fig. 3 Evolution of G_1 with the parameter u . (a) $(l, m, n) = (1, 1, 1)$; (b) $(l, m, n) = (2, 2, 2)$

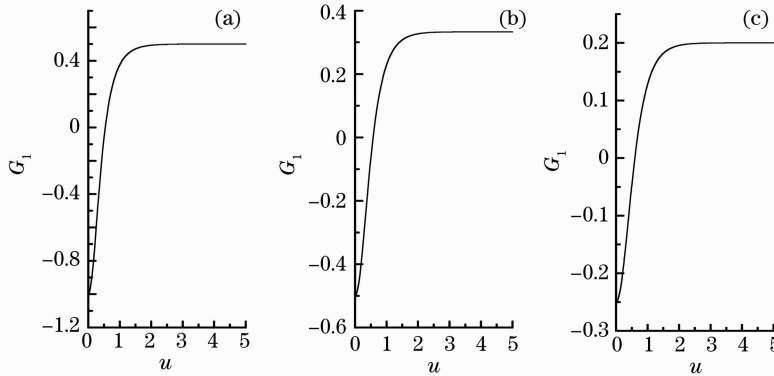


图 4 G_1 随参数 u 的演化。(a) $(l, m, n) = (1, 0, 0)$; (b) $(l, m, n) = (2, 0, 0)$; (c) $(l, m, n) = (4, 0, 0)$

Fig. 4 Evolution of G_1 with the parameter u . (a) $(l, m, n) = (1, 0, 0)$; (b) $(l, m, n) = (2, 0, 0)$; (c) $(l, m, n) = (4, 0, 0)$

另一方面, 对于 a_2 和 a_3 模, 数值计算表明它们的二阶关联函数有相似的演化规律。 a_2 模的二阶关联函数演化如图 5 和 6 所示, 演化曲线表明 a_2 模始终呈现出反聚束效应。

5 结 论

本文利用范洪义建立的 IWOP 技术, 将双模压缩算符进行推广, 建立了三模压缩算符。将该算符作用在三模粒子数态上来构建三模压缩粒子数态。研究了该量子态的压缩效应和反聚束效应, 对不同光子数情况下的压缩效应和反聚束效应进行了数值计算。计算结果表明: 在压缩参数较小的一定值范围内, 光场呈现 F_1 分量压缩。其压缩效应随着光子数的增大而减弱, 光子数大于一定值后压缩效应消失。光场 a_1 模的反聚束效应也随光子数增大而减弱, 但光场 a_2 模和 a_3 模却始终呈现出反聚束效应。

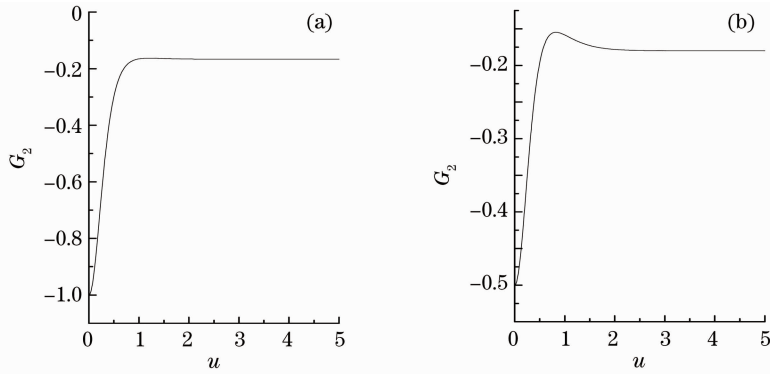


图 5 G_2 随参数 u 的演化。(a) $(l,m,n)=(1,1,1)$; (b) $(l,m,n)=(2,2,2)$

Fig. 5 Evolution of G_2 with the parameter u . (a) $(l,m,n)=(1,1,1)$; (b) $(l,m,n)=(2,2,2)$

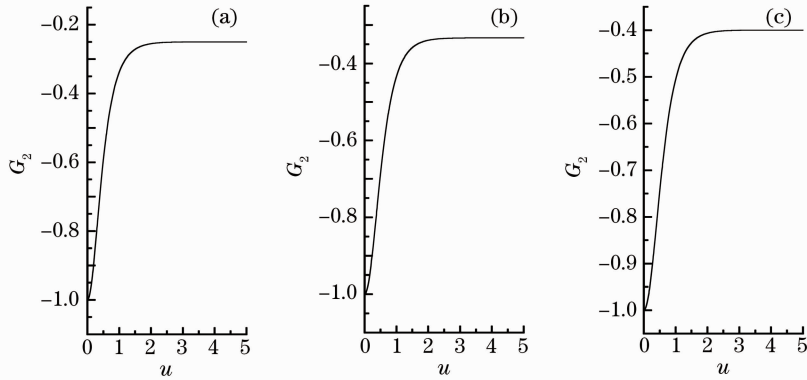


图 6 G_2 随参数 u 的演化。(a) $(l,m,n)=(1,0,0)$; (b) $(l,m,n)=(2,0,0)$; (c) $(l,m,n)=(4,0,0)$

Fig. 6 Evolution of G_2 with the parameter u . (a) $(l,m,n)=(1,0,0)$; (b) $(l,m,n)=(2,0,0)$; (c) $(l,m,n)=(4,0,0)$

参 考 文 献

- 1 D. Stoler. Equivalence classes of minimum uncertainty packets[J]. *Phys. Rev. D*, 1970, **1**(12): 3217~3219
- 2 Lu Hong, Guo Guangcan. Non-classical properties of states generated by the superposition of excited coherent states[J]. *Acta Physica Sinica*, 1999, **48**(9): 1644~1649
路 洪, 郭光灿. 叠加激发相干态的非经典性质[J]. *物理学报*, 1999, **48**(9): 1644~1649
- 3 Lan Haijiang, Pang Huafeng, Wei Lianfu. Wigner functions of multiple-photon excited coherent states[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(12): 8281~8288
兰海江, 庞华锋, 韦联福. 多光子激发相干态的 Wigner 函数[J]. *物理学报*, 2009, **58**(12): 8281~8288
- 4 Lu Daoming. The entropic squeezing of superposition of two arbitrary coherent states[J]. *Chin. Phys. B*, 2008, **17**(2): 618~623
- 5 G. S. Agarwal, A. Biswas. Nonclassicality and decoherence of photon-subtracted squeezed state[J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **75**(3): 032104
- 6 J. Zhou, H. Y. Fan, J. Song. Photon-subtracted two-mode squeezed thermal state and its photon-number distribution[J]. *Int. J. Theor. Phys.*, 2012, **51**(5): 1591~1599
- 7 Yuan Hongchun, Xu Xuexiang. One- and two-mode successively squeezed state and its statiical properties[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(6): 064205
袁洪春, 徐学翔. 单双模连续真空态及其量子统计性质[J]. *物理学报*, 2012, **61**(6): 064205
- 8 Ma Shanjun, Luo Wenwei. Comparison of nonclassicality between photon-added and photon-subtracted squeezed vacuum states[J]. *Chin. Phys. B*, 2012, **21**(2): 024203
- 9 H. Y. Fan, G. C. Yu. Three-mode squeezed vacuum state in Fock space as an entangled state[J]. *Phys. Rev. A*, **65**(3): 033829
- 10 Song Jun, Fan Hongyi, Zhou Jun. Wigner function of two-mode squeezed number state and its properties[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(11): 110302
宋 军, 范洪义, 周 军. 双模压缩数态光场的 Wigner 函数及其特性[J]. *物理学报*, 2011, **60**(11): 110302

- 11 J. Zhou, J. Song, H. Yuan *et al.*. Photon-number distribution and Wigner function of generalized thermal state[J]. *Int J. Theor. Phys.*, 2012, **51**(9): 2681~2689
- 12 H. L. Zhang, F. Jia, X. X. Xu *et al.*. Nonclassicality and decoherence of photon-subtraction squeezing-enhanced thermal state [J]. *Int J. Theor. Phys.*, 2012, **51**(10): 3330~3343
- 13 X. X. Xu, L. Y. Hu, H. Y. Fan. Photon-added squeezed thermal states: statistical properties and its decoherence in a photon-loss channel[J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(9): 1801~1809
- 14 X. X. Xu. The squeezing effect of three-mode operator as an extension from two-mode squeezing operator[J]. *Int J. Theor. Phys.*, 2012, **51**(7): 2056~2065