

基于随机并行梯度下降算法的自适应光学系统带宽

陈波¹ 李新阳²

(¹ 河北联合大学电气工程学院, 河北 唐山 063009
² 中国科学院光电技术研究所自适应光学研究室, 四川 成都 610209)

摘要 对基于随机并行梯度下降(SPGD)算法的自适应光学(AO)系统带宽进行了理论研究和实验分析。首先通过分析算法的随机扰动特性,研究了算法收敛速度与波前校正器单元数之间的关系。在此基础上,通过与基于哈特曼-夏克(H-S)波前传感器的传统自适应光学系统相对比,对基于SPGD算法的自适应光学系统带宽进行了理论分析,并通过动态波前畸变校正实验进行了实验验证,实验结果与带宽理论分析基本一致。研究结果为设计和合理应用基于SPGD算法的自适应光学系统提供了依据。

关键词 自适应光学;随机并行梯度下降算法;带宽;收敛速度;闭环

中图分类号 TP273.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP50.030101

Bandwidth of Adaptive Optics System Based on Stochastic Parallel Gradient Descent Algorithm

Chen Bo¹ Li Xinyang²

(¹ School of Electrical Engineering, Hebei United University, Tangshan, Hebei 063009, China
² Laboratory on Adaptive Optics, Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China)

Abstract Bandwidth of adaptive optics (AO) system based on stochastic parallel gradient descent (SPGD) algorithm is analyzed theoretically and experimentally. The relation between convergence speed and control channel number of AO system based on SPGD algorithm is researched. Then the bandwidth of AO system based on SPGD is analyzed theoretically by comparison with the traditional AO system with the Hartmann-Shack (H-S) wavefront sensor. A dynamical wavefront distortion correction experiment is performed, and the experimental results verify the theoretical analysis results well. This research can provide a basis for the design and use of AO system based on SPGD algorithm.

Key words adaptive optics; stochastic parallel gradient descent (SPGD) algorithm; bandwidth; convergence speed; closed loop

OCIS codes 010.1080; 010.1330; 010.3310; 120.4820

1 引言

近年来,基于随机并行梯度下降(SPGD)算法的无波前探测的自适应光学(AO)技术在光通信、激光相干合成等方面得到广泛关注和应用^[1~4]。该技术以系统的性能指标为优化对象,利用算法多次迭代,最终使得系统指标达到最优。研究表明,与模拟退火、遗传算法等优化算法相比,SPGD算法参数较少,收敛速度较快,而且易于实现^[5~7]。根据国外的相关研究结果,随着校正器单元数目 N 的增加,SPGD算法收敛速度显著减小,其收敛所需迭代次数与校正器单元数 N 的平方根近似成正比^[8,9],但是在系统的带宽估计方面,至今没有一个明确的结果,给合理使用基于SPGD算法的自适应光学技术带来了一定的困难。

为此,本文从算法的随机扰动入手,首先分析了算法收敛速度与校正器单元数目的关系。在此基础上,通过与基于哈特曼-夏克(H-S)波前传感器的自适应光学相比较,分析了基于SPGD算法的自适应光学系统

收稿日期: 2012-12-01; **收到修改稿日期**: 2012-12-25; **网络出版日期**: 2013-01-31

基金项目: 河北省唐山市科技计划项目(12110236b)资助课题。

作者简介: 陈波(1984—),男,博士,讲师,主要从事优化控制技术方面的研究。E-mail: chenbo182001@163.com

的带宽,给出了一个带宽估计公式,并通过动态波前校正实验进行了验证。

2 算法收敛速度与校正器单元数的关系

基于 SPGD 算法的自适应光学闭环过程可以描述为:第 m 次迭代后 N 单元校正器的校正信号为 $\mathbf{u}^{(m)} = \{u_1, \dots, u_j, \dots, u_N\}$,系统性能指标为 $J[\mathbf{u}^{(m)}]$;第 $m+1$ 次迭代时,首先产生一组随机扰动向量 $\delta\mathbf{u} = \{\delta u_1, \dots, \delta u_j, \dots, \delta u_N\}$,然后向波前校正器并行施加控制信号 $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^{(m)} + \delta\mathbf{u}$,计算系统性能指标 $J(\mathbf{u}^+)$,接着向波前校正器并行施加信号 $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^{(m)} - \delta\mathbf{u}$,计算性能指标 $J(\mathbf{u}^-)$;最后计算性能指标变化量 δJ ,并使用 $\delta J \delta\mathbf{u}$ 作为第 $m+1$ 次迭代的梯度信息,更新校正信号。 δJ 的计算式和更新校正信号的公式分别为

$$\delta J = J(\mathbf{u}^+) - J(\mathbf{u}^-), \quad (1)$$

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^{(m)} + k\delta J \delta\mathbf{u}, \quad (2)$$

式中 $\mathbf{u}^{(m+1)}$ 为第 $m+1$ 次迭代后的校正信号, k 为调整迭代步长的增益系数,当期望性能指标向极大值优化时取正数,反之则为负数。根据文献[7],一般情况下,随机扰动 $\delta\mathbf{u}$ 中各分量 δu_j 相互独立且服从伯努利分布,即幅值满足 $|\delta u_j| = \sigma$, 概率分布满足 $P(\delta u_j = \pm\sigma) = 0.5$ 。

由校正电压更新公式(2)式可知,由随机扰动引起的 $|\delta J|$ 越大,性能指标收敛越快。因此,可以通过分析 $|\delta J|$ 的大小来分析算法的收敛速度。为了便于分析,对校正器做了一定的假设:1)对于 N 单元校正器,由于每个单元上的随机扰动幅度相等 $|\delta u_j| = \sigma$,因此每个驱动器引起的性能指标扰动的幅度相等,记做 $1/N$;2)各校正单元之间没有耦合或者耦合较小,那么性能指标变化量 δJ 可以近似描述为各单元的影响因子的线性组合。

每次迭代时,总存在一个扰动向量 $\Delta\mathbf{u} = \{\Delta u_1, \dots, \Delta u_j, \dots, \Delta u_N\}$ 使得 $|\delta J|$ 最大,即扰动向量 $\delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}$ 时计算得到的 $|\delta J|$ 最大, $\Delta\mathbf{u}$ 记做最优扰动向量。根据上面的假设,性能指标的变化量 $|\delta J|$ 为各单元的影响因子的线性组合,即

$$\begin{aligned} |\delta J| &= |J(\mathbf{u}^+) - J(\mathbf{u}^-)| = \left| \left\{ J[\mathbf{u}^{(m)}] + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta u_j}{\Delta u_j} \frac{1}{N} \right) \right\} - \left\{ J[\mathbf{u}^{(m)}] + \sum_{j=1}^N \left(\frac{-\delta u_j}{\Delta u_j} \frac{1}{N} \right) \right\} \right| = \\ &= \left| \sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta u_j}{\Delta u_j} \frac{1}{N} \right) - \sum_{j=1}^N \left(\frac{-\delta u_j}{\Delta u_j} \frac{1}{N} \right) \right| = \frac{2}{N} \left| \sum_{j=1}^N \frac{\delta u_j}{\Delta u_j} \right|, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\delta\mathbf{u}$ 表示当次迭代时的随机扰动向量。当 δu_j 与 Δu_j 一致时,该校正单元对性能指标的影响因子为正,反之则为负。

当随机扰动向量 $\delta\mathbf{u}$ 和最优扰动向量 $\Delta\mathbf{u}$ 中符号不一致的个数为 M 时, $|\delta J|$ 记做 $|\delta J_M|$,

$$|\delta J_M| = \frac{2}{N} \left| \sum_{j=1}^N \frac{\delta u_j}{\Delta u_j} \right| = \frac{2}{N} |N - 2M|. \quad (4)$$

可以看出,当实际扰动向量 $\delta\mathbf{u}$ 和最佳扰动向量 $\Delta\mathbf{u}$ 完全一致 ($M=0$) 或正好相反 ($M=N$) 时,计算得到的 $|\delta J|$ 最大,性能指标收敛最快。

对于 N 单元波前校正器,由于各个单元的扰动相互独立,因此出现 $|\delta J_M|$ 的概率(即 $\delta\mathbf{u}$ 和 $\Delta\mathbf{u}$ 中符号不一致的个数为 M 的概率)为

$$p(|\delta J_M|) = \frac{1}{2^N} C_N^M. \quad (5)$$

根据(4)、(5)式,对于 N 单元波前校正器来说,随机扰动 $\delta\mathbf{u}$ 引起的 $|\delta J|$ 的数学期望为

$$E_N(|\delta J|) = \sum_{M=0}^N p(|\delta J_M|) |\delta J_M| = \frac{2}{2^N N} \sum_{M=0}^N C_N^M |N - 2M|. \quad (6)$$

由(6)式可知,随着校正器单元数 N 的增加, $E_N(|\delta J|)$ 明显减小,因此收敛速度降低。假设当 $N=1$ 时性能指标经过 m_1 次闭环迭代后收敛;那么根据(6)式,当校正器单元数为 N 时,性能指标收敛需要的迭代次数 m_N 与 m_1 之比 γ_1 为

$$\gamma_1 = \frac{m_N}{m_1} = \frac{E_1(|\delta J|)}{E_N(|\delta J|)} \approx N^{0.54}. \quad (7)$$

根据国外的相关报道^[5],随着校正器单元数目 N 的增加,SPGD算法收敛速度显著变慢, m_N 与 m_1 之比 γ_2 可以近似表示为

$$\gamma_2 = \frac{m_N}{m_1} \approx N^{0.5}. \quad (8)$$

(7)式和(8)式描述的关系分别如图1所示。可以看出,随着校正器单元数目 N 的增加, γ_1 和 γ_2 的趋势基本一致,当 N 较小时二者较为接近, γ_1 的增幅略大。文献[10]的实验结果进一步证实了以上分析结果。

在以上分析中,假设了各个校正单元之间没有耦合,在微小扰动下各单元的影响幅度相等,这与实际使用的波前校正器相比有一定的误差。实际中常用的分立压电变形镜等波前校正器,相邻驱动器之间通常存在耦合,而且有些单元位于通光口径的边缘,因此各单元的影响因子不完全相等,这导致了 γ_1 和 γ_2 有微小的差异。但是在光纤激光相干合成等领域^[11~14],由于各校正单元相互独立,因此 γ_1 所示的结果较为适用。

3 系统带宽分析

3.1 带宽理论分析

基于 SPGD 算法的自适应光学系统由于随机扰动的特点,难以建立准确的系统传递函数等数学模型,因此分析其带宽较为困难。本节在前面对收敛速度的分析的基础上,通过与基于哈特曼-夏克波前传感器的自适应光学系统相比,对基于 SPGD 算法的自适应光学系统的带宽做如下分析。

基于 SPGD 算法的自适应光学系统,如果只有一个校正单元,由第2节的分析结果可知,每次迭代中的实际扰动 δu (非正即负) 和最佳扰动 Δu (非正即负) 完全一致或相反,因此校正电压始终沿着最佳扰动方向迭代。对于基于哈特曼-夏克传感器的自适应光学系统而言,校正电压每次都是根据残差电压迭代,即校正电压始终沿着最佳方向迭代。从这一点上来说,1单元的 SPGD 算法自适应光学系统与具有波前探测的自适应光学系统收敛速度基本相当,所以校正带宽比较接近。

根据文献[15,16],由哈特曼-夏克波前传感器、波前处理机组成的自适应光学,一般存在 2~3 个光电探测器采样周期的时间延迟,从而使得系统的有效带宽 f_s 约为光电探测器帧频 f_c 的 $1/30 \sim 1/20$,即 $f_s = f_c/30 \sim f_c/20$ 。而 SPGD 算法每完成一次迭代,通常需要 3 次采样,延迟是 3 frame。因此 1 单元的 SPGD 算法自适应光学系统的带宽,约为具有 3 frame 延迟的哈特曼-夏克波前探测自适应光学系统的有效带宽,即 $f_s \approx f_c/30$ 。

结合第2节的分析结果,对于 N 单元的 SPGD 算法自适应光学系统,如果完成一次 SPGD 迭代需要 3 次采样,收敛所需迭代次数相对于 1 单元系统大约增加了 N 平方根倍,因此系统的校正带宽 f_s 可以利用下式大致估计:

$$f_s \leq \frac{f_c}{30N^{0.5}}. \quad (9)$$

3.2 闭环实验分析

利用现场可编程门阵列(FPGA)硬件电路设计了一个 SPGD 算法高速控制器^[17],建立了一个高速自适应光学实验系统,通过动态校正实验对上述带宽估计方法进行分析。实验系统如图2所示,主要由入射光束(激光器和准直、扩束装置)、高速倾斜镜(TM)、61单元压电变形镜(DM,其驱动器排布如图3所示)、成像系统(包括高帧频 CCD)和高速处理机等组成。入射激光光束直径为 120 mm;CCD 帧频 $f_c = 2900$ Hz;SPGD 控制器完成一次迭代需要采集 3 frame 图像,闭环迭代频率为 $2900/3 = 967$ Hz。

实验中动态波前像差由图4所示的湍流模拟装置产生^[18],其主体部分是一个两端不封闭的四方形铁筒。铁筒下部内侧水平放置了 6 只 100 Ω 陶瓷电阻,每 3 个串联后再并联,通过外加电压使其发热来加热空

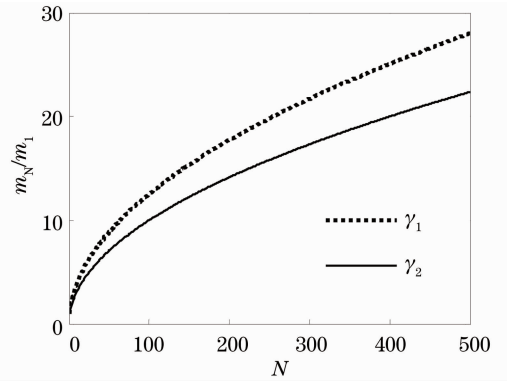


图1 性能指标收敛需要的迭代次数 m_N 与 m_1 的关系

Fig.1 Relation between m_N required by performance index and m_1

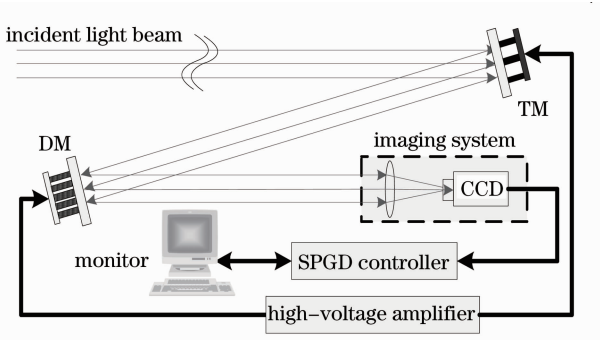


图 2 高速自适应光学实验系统

Fig. 2 Experimental system of high-speed adaptive optics

气。铁筒顶部有一个抽气式风扇，风扇向上抽取热空气产生垂直于光束传输方向的横向风。光束从铁筒一端进入，经过流动热空气后从铁筒另一端射出，就叠加了模拟湍流产生的动态波前畸变。通过调制陶瓷电阻上的电压，可以改变电阻的发热温度，从而调节湍流的强弱。

定义系统的像清晰度函数为

$$J = \iint I^2(x, y) dx dy, \quad (10)$$

并将其作为性能指标进行多次开、闭环重复实验。每次实验闭环迭代 8192 步，用时为 8.47 s。通过对比开、闭环性能指标平均值 $\langle J \rangle$ 来分析系统的带宽。图 5 为多次重复实验得到的开、闭环性能指标的平均值 $\langle J \rangle$ 曲线。可以看出，在前 2000 次闭环校正中性能指标迅速上升，在这个阶段系统以校正静态像差为主；2000 次闭环校正后，由于动态湍流的影响，性能指标有一定的起伏，与开环相比闭环的性能指标提高了大约 30 倍。

从开、闭环性能指标中分别选取 4096 个采样点（闭环性能指标选取校正静态像差后的数据，即 2000 次闭环迭代后的数据），计算性能指标的功率谱。利用上述方法，对多次实验得到的功率谱做平均。由于开、闭环性能指标的幅度不一样，为了便于比较，将计算得到的功率谱通过除以各自的总能量进行了归一化处理，记做 S_j 。 S_j 反映的是开、闭环情况下各频率成分所占的比重。

根据上述方法得到的开、闭环性能指标功率谱如图 6 所示。可以看出，与开环相比，闭环性能指标的低频分量明显较小，即闭环性能指标小于 10 Hz 的频率成分所占的比重明显小于开环情况。对于自适应光学系统而言，由于运算速度的限制，通常能够有效地校正低于某一频率的扰动。因此，与开环情况下相比，闭环

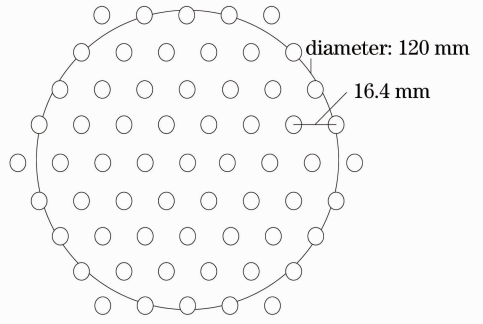


图 3 61 单元变形镜驱动器排布

Fig. 3 Actuator arrangement of 61-element DM

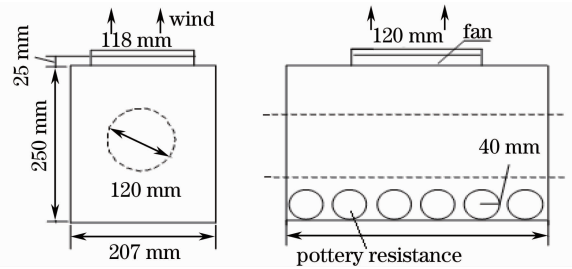


图 4 热风式湍流模拟装置示意图

Fig. 4 Hot-wind experimental atmospheric turbulence generator

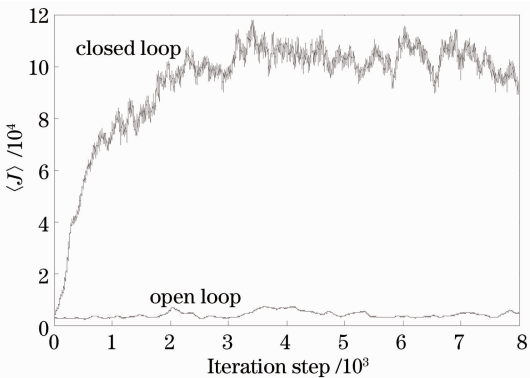


图 5 20 次重复实验得到的开、闭环性能指标的平均值曲线

Fig. 5 Averaged performance index of open and closed loops obtained from 20 trials of test

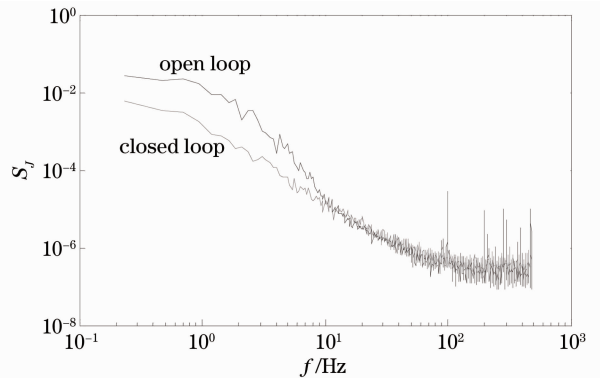


图 6 开、闭环性能指标的频谱

Fig. 6 Spectra of the performance index of open loop and closed loop

情况下低频分量所占的比重应当较低,而高频分量所占的比重应该较高,这个交叉点就可以认为是系统的校正带宽。结合图6的分析结果,该实验系统的闭环控制带宽约为10 Hz。

实验中的CCD帧频为2900 Hz,利用(9)式估算该系统的有效带宽 f_s 约为12.38 Hz。如果利用第2节分析出的 $N^{0.54}$ 替代 $N^{0.5}$,计算出的闭环带宽为10.5 Hz。由此可见,实验结果与前面的分析结果基本一致。

4 结 论

由于基于SPGD算法的自适应光学系统具有随机扰动的特性,难以建立类似于系统传递函数这样的数学模型,因此对于国内外的研究者来说,分析其收敛速度和校正带宽一直是一个难点。本文在一定的假设的基础之上,对算法的收敛速度做了一些探索性的分析,通过与基于哈特曼-夏克传感器的自适应光学系统相比,得出一个估计系统带宽的方法,并进行了实验验证,研究结果已在相关实际系统中得到应用。SPGD算法收敛速度和校正带宽关系到其在实际系统中的合理应用问题,因此非常重要,还需要做进一步的研究。

参 考 文 献

- 1 T. Weyrauch, M. A. Vorontsov, J. W. Gowens II *et al.*. Fiber coupling with adaptive optics for free-space optical communication [C]. *SPIE*, 2002, **4489**: 177~184
- 2 T. Weyrauch, M. A. Vorontsov. Mitigation of atmospheric-turbulence effects over 2.4-km near-horizontal propagation path with 134 control-channel MEMS/VLSI adaptive transceiver system [C]. *SPIE*, 2003, **5162**: 1~13
- 3 M. Vorontsov. Adaptive photonics phase-locked elements (APPLE): system architecture and wavefront control concept [C]. *SPIE*, 2005, **5895**: 589501
- 4 Zhou Pu, Liu Zejin, Ma Yanxing *et al.*. Simulation and experimental investigation on coherent beam combination of two fiber amplifiers based on stochastic parallel gradient descent algorithm [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(2): 431~436
周朴,刘泽金,马阎星等.随机并行梯度下降算法模拟两路光纤放大器相干合成与实验研究[J].光学学报,2009, **29**(2): 431~436
- 5 R. Ei-Agmy, H. Bulte, A. H. Greenaway *et al.*. Adaptive beam profile control using a simulated annealing algorithm [J]. *Opt. Express*, 2005, **13**(16): 6085~6091
- 6 Ping Yang, Mingwu Ao, Yuan Liu *et al.*. Intracavity transverse modes control by a genetic algorithm based on Zernike mode coefficients [J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(25): 17051~17062
- 7 Yang Huizhen, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Comparison of several stochastic parallel optimization control algorithms for adaptive optics system [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2008, **20**(1): 11~16
杨慧珍,李新阳,姜文汉.自适应光学系统几种随机并行优化控制算法比较[J].强激光与粒子束,2008, **20**(1): 11~16
- 8 G. W. Carhart, J. C. Ricklin, V. P. Sivokon *et al.*. Parallel perturbation gradient descent algorithm for adaptive wavefront correction [C]. *SPIE*, 1997, **3126**: 221~227
- 9 M. A. Vorontsov, G. W. Carhart, M. Cohen *et al.*. Adaptive optics based on analog parallel stochastic optimization: analysis and experimental demonstration [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2000, **17**(8): 1440~1453
- 10 Chen Bo, Yang Huizhen, Zhang Jinbao *et al.*. Performance index and convergence speed of parallel gradient descent algorithm in adaptive optics of point source [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(5): 1143~1148
陈波,杨慧珍,张金宝等.点目标成像自适应光学随机并行梯度下降算法性能指标与收敛速度[J].光学学报,2009, **29**(5): 1143~1148
- 11 Wang Xiaolin, Zhou Pu, Ma Yanxing *et al.*. Phase control of coherent fiber laser array using stochastic parallel gradient descent algorithm and its application [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(10): 2874~2878
王小林,周朴,马阎星等.SP GD算法在光纤激光相干阵列光束控制中的应用[J].光学学报,2010, **30**(10): 2874~2878
- 12 Tao Rumao, Ma Yanxing, Dong Xiaolin *et al.*. Study of target-in-the-loop fiber laser array adaptive phase-locking technique [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(7): 0702012
陶汝茂,马阎星,董小林等.目标在回路光纤激光阵列自适应锁相技术研究[J].中国激光,2011, **38**(7): 0702012
- 13 Tao Rumao, Si Lei, Ma Yanxing *et al.*. Numerical simulation of target-in-the-loop adaptive optic systems based on fiber-laser array [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(11): 1114002
陶汝茂,司磊,马阎星等.光纤激光阵列目标在回路自适应光学系统的数值模拟[J].光学学报,2011, **31**(11): 1114002
- 14 Ma Yanxing, Si Lei, Dong Xiaolin *et al.*. Study on cost function in the coherent beam combination of fiber lasers based on dithering technique [J]. *Chinese J. Lasers*, 2012, **39**(2): 0202003
马阎星,司磊,董小林等.抖动法激光阵列相干合成技术中的性能评价函数研究[J].中国激光,2012, **39**(2): 0202003
- 15 Li Xinyang, Jiang Wenhan. Control bandwidth analysis of adaptive optical systems [C]. *SPIE*, 1997, **3126**: 447~454

- 16 Li Xinyang, Jiang Wenhan. Effective bandwidth analysis of adaptive optics control system [J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(12): 1697~1702
李新阳, 姜文汉. 自适应光学控制系统的有效带宽分析[J]. 光学学报, 1997, **17**(12): 1697~1702
- 17 Zhang Jinbao, Chen Bo, Wang Caixia *et al.*. FPGA hardware implementation of SPGD control algorithm for adaptive optics system [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2009, **36**(9): 46~51
张金宝, 陈波, 王彩霞 等. 自适应光学系统 SPGD 控制算法的 FPGA 硬件实现[J]. 光电工程, 2009, **36**(9): 46~51
- 18 Zhang Huimin, Li Xinyang. Measurement of a hot-wind laboratory atmospheric turbulence generator with Hartman wavefront sensor [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2004, **31**(z1): 4~7
张慧敏, 李新阳. 热风式大气湍流模拟装置的哈特曼测量[J]. 光电工程, 2004, **31**(z1): 4~7