

基于 TIE 和加速角谱迭代算法的二维相位恢复

梁丽^{1,2} 杨玲^{1,2} 王中科³ 甄小琼^{1,2}

¹ 成都信息工程学院电子工程学院, 四川 成都 610225
² 中国气象局大气探测重点开放实验室, 四川 成都 610225
³ 成都信息工程学院网络工程学院, 四川 成都 610225

摘要 在 Gerchberg-Saxton (GS)算法的基础上,引入光强传播方程(TIE)和加速角谱迭代算法,提出了基于 TIE 的加速角谱迭代算法,实现了更加精准快速的相位恢复。该算法通过 3 个面的光强(一个输入面,两个输出面)进行相位恢复,首先通过光强传播方程得到初始的相位,进而使用加速角谱迭代算法进行进一步的迭代恢复相位。通过数值仿真得出,该算法在二维图像相位恢复过程中更加精准快速,抗噪性更强。在可恢复相位的控制范围内,迭代 40 次即可趋于稳定,均方根(RMS)误差可控制在 10^{-6} 数量级。

关键词 图像处理;光计算;相位恢复;光强传播方程;加速角谱传递函数

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/LOP50.021002

Two-Dimensional Phase Retrieval Based on TIE and Accelerate Angular Spectrum Iteration Algorithm

Liang Li^{1,2} Yang Ling^{1,2} Wang Zhongke³ Zhen Xiaoqiong^{1,2}

¹ Department of Electronic Engineering, Chengdu University of Information Engineering, Chengdu, Sichuan 610225, China
² Meteorological Observation Key Laboratory, China Meteorological Administration, Chengdu, Sichuan 610225, China
³ Department of Network Engineering, Chengdu University of Information Engineering, Chengdu, Sichuan 610225, China

Abstract Based on conventional Gerchberg-Saxton (GS) algorithm, transport of intensity equation (TIE) method and accelerated angular spectrum iterative algorithm are introduced to put forward a kind of more accurate and rapid phase recovery algorithm: accelerated angular spectrum iterative algorithm for two-dimensional (2D) phase retrieval from TIE. The intensity distribution of three planes, e. g., an incident plane and two emergent planes, is employed to retrieve the initial phase by TIE and then retrieve the phase of incident optical field by accelerated angular spectrum iterative algorithm. The simulation result shows that this algorithm can retrieve the phase distribution of an arbitrary 2D incident optical field in high accuracy. Through numerical simulation, this algorithm is proved in 2D image phase recovery process to be more accurate and faster and its noise immunity is stronger. In the recovery phase control range, the iteration tends to be stable after 40 steps, and the mean square (RMS) error can be controlled in the order of magnitude of 10^{-6} .

Key words image processing; optical computing; phase retrieval; transport of intensity equation; accelerated angular spectrum transfer function

OCIS codes 100.5070; 200.4740; 160.4760; 050.1970; 050.19401

收稿日期: 2012-10-22; **收到修改稿日期:** 2012-11-01; **网络出版日期:** 2013-01-04

基金项目: 公益性行业(气象)科研专项(GYHY201106047)资助课题。

作者简介: 梁丽(1988—),女,硕士研究生,主要从事信号与信息处理技术在气象探测领域中的应用方面的研究。

E-mail: 865632711@qq.com

导师简介: 杨玲(1974—),女,博士,副教授,主要从事信号处理、图像处理与模式识别等方面的研究。

E-mail: cimyang@cuit.edu.cn

1 引言

相位信息包括了物体高达 80% 的信息^[1]。在现有光学设备采集过程中,相位信息难以获取甚至丢失,因而相位恢复对天文、X 射线成像及衍射光学等领域有着重要意义。非干涉检测相位恢复主要有光强传播方程法(TIE)、迭代法、相空间法^[2,3]3 种。Gerchberg-Saxton(GS)算法^[4]是最早的一种相位恢复迭代算法,在此基础上有了很多改进算法,包括减少误差法、最陡下降法、共轭梯度法、混合输入输出法^[5]、梯度搜索算法^[6]、加速角谱迭代算法^[7]以及采用随机二元振幅调制^[8]恢复相位。也有利用时频分析理论,基于分数傅里叶变换进行相位恢复的,如分数傅里叶变换^[9]和基于模糊函数的相空间断层法^[10,11]。相空间法无法摆脱光学结构的复杂性和数据处理的冗余性,使用不多。

上述文献中讨论的情况,输入面光场通常比较简单,相位信息不丰富,收敛性和收敛速度有待改进。文献[8]中的算法虽然很好地解算出波前,但是对于复杂的相位信息恢复效果并不理想。文献[2]结合了 GS 算法和 TIE 算法(GS-TIE)进行相位恢复,对丰富的相位信息恢复效果比较理想,收敛性和收敛速度都有了提高,但 GS 算法的收敛性和恢复精度还有提高的空间。本文尝试采用 3 个垂轴面上的光强强度信息,利用加速角谱迭代算法和 TIE 算法结合进行相位恢复,提高相位恢复的精度和收敛速度。加速角谱迭代算法基于角谱传播理论构建输入面与输出面光场之间的正逆向衍射过程,引入梯度方法的思想,将当次迭代的相位值和前次迭代的相位值之差作为梯度方向,加大算法的梯度方向,达到比 GS 更优的收敛速度。仿真表明,该算法和 GS-TIE 算法相比,可以有效地提高收敛速度、收敛性和抗噪能力。

2 原理

2.1 加速角谱迭代算法

图 1 为模拟的光路示意图,输入面及选取的各输出面均垂直于光路系统光轴。假设光轴沿 X 方向, Z_0 为输入面, Z_1 和 Z_2 为衍射场中的输出面。输入面 Z_0 和输出面 Z_1 间隔为 d_1 ,输出面 Z_1 和输出面 Z_2 间隔为 d_2 。

假定 Z_0 初始相位为随机相位,利用下式正反衍射迭代出相位信息:

$$E_j(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H_{ij} \mathcal{F} E_i(x, y)], \quad i, j = 0, 1, 2 \quad (1)$$

其中角谱传递函数为^[12,13]

$$H_{ij} = \exp[-i\pi\lambda d_{ij}(f_x^2 + f_y^2)], \quad (2)$$

式中 $f_x = m_x/L_x, f_y = m_y/L_y; m_x, m_y = -N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1; L_x, L_y$ 为两个方向的区间长度, N 为采样点数, d_{ij} 为 Z_i 和 Z_j 的距离。

2.2 傅里叶变换 TIE 算法

光强传播方程为

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} I = -\nabla \cdot I \nabla P, \quad (3)$$

式中 I 为光强, z 为光轴方向, ∇ 为光强 I 对垂直于 z 方向的 (x, y) 方向的矢量微分算子。

利用二维傅里叶变换微分性质得

$$P_i(x, y) = \mathcal{F}^{-1} k_{\perp}^2 (k_x \mathcal{F} I^{-1} \mathcal{F}^{-1} k_x k_{\perp}^2 \mathcal{F} T + k_y \mathcal{F} I^{-1} \mathcal{F}^{-1} k_y k_{\perp}^2 \mathcal{F} T), \quad (4)$$

式中

$$k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad k_x = (2\pi/L_x)m_x, \quad k_y = (2\pi/L_y)m_y, \quad T = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(I_i - I_j)}{d_{ij}}. \quad (5)$$

由(4)式即可得到初始相位值 p_i 。

2.3 TIE-加速角谱迭代算法

算法中首先利用输出面 Z_1 和 Z_2 的强度信息 I_1, I_2 以及输入面 Z_0 的强度信息 I_0 由(4)式计算得到 Z_1 面

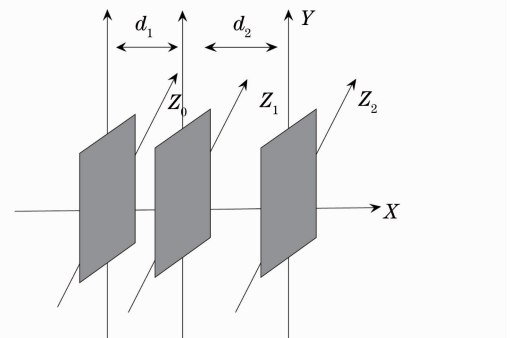


图 1 光路示意图

Fig. 1 Schematic of optical path

的初始相位 p_0 。把所得的初始相位带入加速角谱迭代算法中进行迭代运算,具体的流程如图 2 所示。按照流程图反复进行迭代运算,直到其误差控制到了预设的最大范围内为止,其中第 k 次的均方根(RMS)误差描述为

$$E_{\text{RMS}} = \frac{\sum (p_0^{(k)} - p_0)^2}{\sum p_0^2}, \quad (6)$$

$$a_0 = \sqrt{I_0}, \quad a_1 = \sqrt{I_1}, \quad a_2 = \sqrt{I_2}, \quad (7)$$

$$h_k = p_0^k - p_0^{k-1}, \quad g_k = q_0^k - p_0^k, \quad a^k = \frac{\sum g_k g_{k-1}}{\sum g_{k-1} g_{k-1}}, \quad (8)$$

式中 q_0 为输出面 2 由(1)式反衍射到输入面 0 的相位。

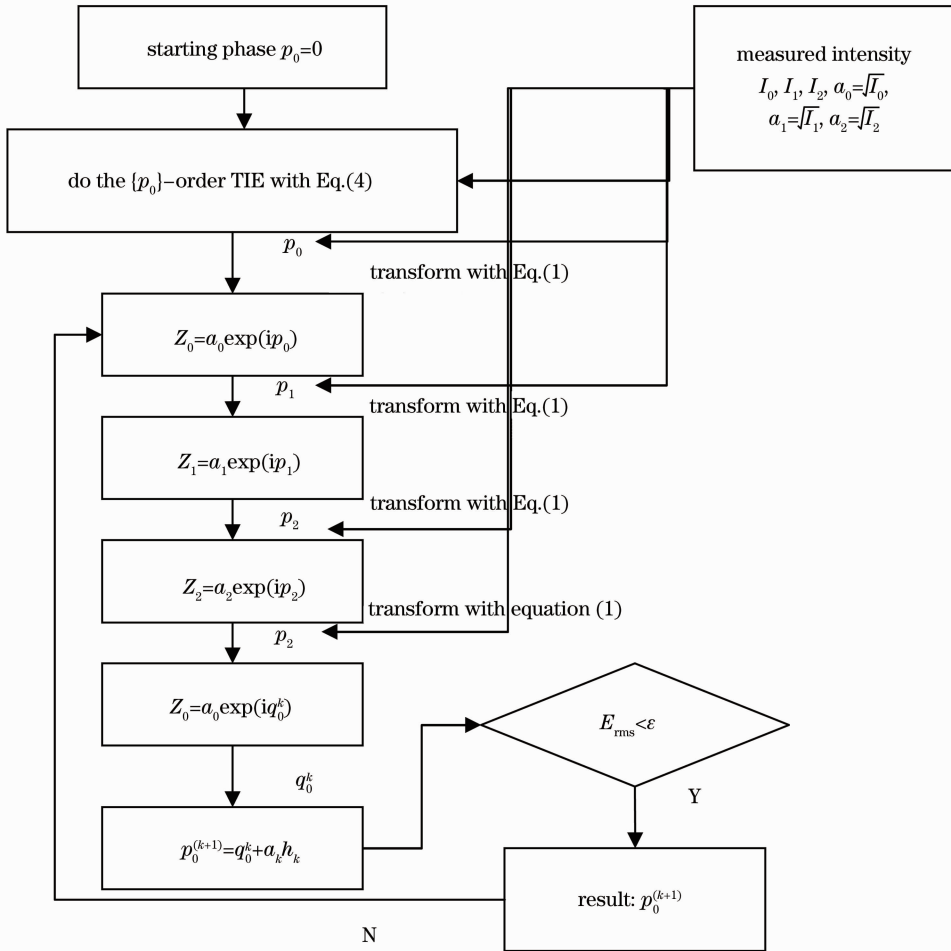


图 2 算法流程图

Fig. 2 Flow chart of the proposed algorithm

3 模拟实验及结果分析

将相位分布在 $[0, 2\pi]$ 的图 3 作为待恢复相位的图像,采样点数为 128×128 ,采样区域的宽度为 $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$,波长为 $0.6328 \mu\text{m}$,图 4 作为输入光强,两幅图都为 $128 \text{ pixel} \times 128 \text{ pixel}$ 。

3.1 收敛性的比较

测试算法的收敛性时,为避免更多参数的影响,取 d_2 为固定值 1000 mm 。迭代算法源于 GS 算法,故文中的结果对比为 TIE 方法、加速角谱迭代算法(用 AAS 表示)、GS 和 TIE 方法的结合以及加速角谱迭代算法和 TIE 算法的结合。

当 $d_1 = 300 \text{ mm}$ 时,恢复的效果如图 5 所示。由于 TIE 方法和加速角谱迭代算法的误差较大,都在

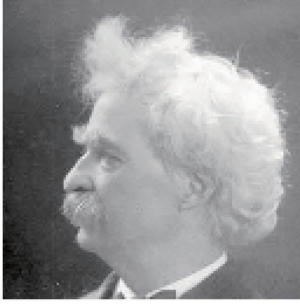


图3 相位图像

Fig. 3 Phase image



图4 光强图像

Fig. 4 Intensity image

10^{-3} 数量级以上,故误差值不在误差曲线图图6中显示。

由结果可以看出,在恢复效果上角谱加速迭代算法恢复的效果最差,说明由于初始相位的随机性使得加速角谱迭代算法恢复相位效果不佳。由图6可以看出角谱迭代算法和TIE结合显然比其他3种算法的收敛速度快,RMS误差控制在 10^{-6} 数量级。

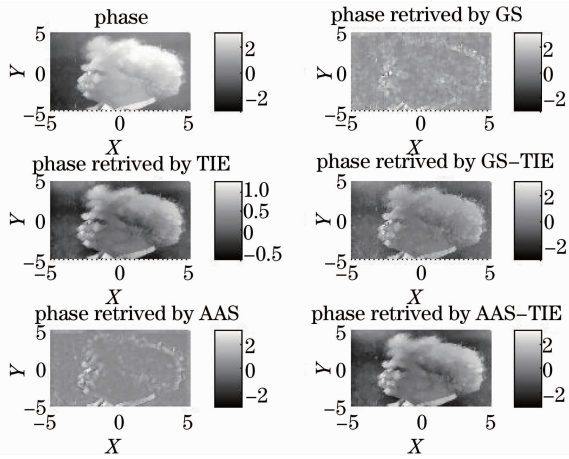


图5 不同算法恢复相位图

Fig. 5 Phase retrieved by different algorithms

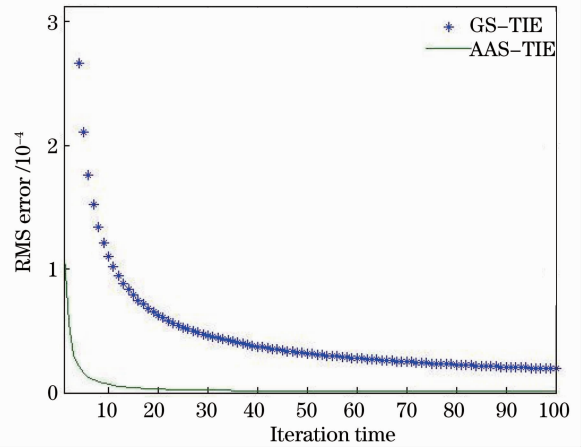


图6 RMS误差与迭代次数的关系

Fig. 6 RMS error versus iteration times

3.2 噪声、输入面和输出面间距对收敛性的影响

为测试该算法的抗噪性,将光强信息加上均匀白噪声,输入光强值为 $I = n + (255 - n)/255b$,其中 b 为图4携带的强度信息, n 为控制噪声的参数, n 越大,噪声扰动越小。

抗噪性取决于 n 的大小。固定 $d_1 = 300$ mm、 $d_2 = 1000$ mm,误差比较如表1所示。受到采集设备的限制, d_1 、 d_2 发生改变,近远场的衍射也变得更加复杂,对相位恢复精度和收敛速度有影响。固定 $n = 100$, $d_2 = 10$ m,改变 d_1 取值,结果如表2所示;固定 $n = 100$, $d_1 = 300$ mm,改变 d_2 取值,结果如表3所示。

从表1可以看出,随着 n 的减小,相位恢复的精度在提高,收敛性更好,RMS误差控制在 10^{-7} 数量级。从表2和表3可以看出,随着 d_1 的增大,近场衍射的细节信息在损失,收敛性降低;随着 d_2 的增大,远场的衍射信息更加饱满,收敛性增加。由表1~3可知,基于TIE和加速角谱迭代算法的方法收敛性最好,稳定度也最好。

表1 抗噪性比较

Table 1 Comparison of noise immunity

n	0.1	1	50	200
TIE	0.4317	0.3563	0.3296	0.3213
AAS	5.0×10^{-3}	5.9×10^{-6}	4.1×10^{-6}	3.6×10^{-6}
GS-TIE	1.2×10^{-4}	1.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	1.2×10^{-5}
AAS-TIE	5.9×10^{-7}	5.7×10^{-7}	2.7×10^{-7}	1.4×10^{-7}

表2 相位恢复受 d_1 的影响Table 2 Influence of d_1 on phase retrieval

d_1 /mm	100	500	1000	2000
TIE	505.6436	16.3530	3.1778	0.5891
AAS	6.4×10^{-6}	1.0×10^{-4}	1.9×10^{-4}	9.9×10^{-5}
GS-TIE	1.2×10^{-6}	1.2×10^{-5}	1.3×10^{-5}	1.7×10^{-5}
AAS-TIE	1.0×10^{-6}	1.1×10^{-6}	1.6×10^{-6}	2.9×10^{-6}

表 3 相位恢复受 d_2 的影响Table 3 Influence of d_2 on phase retrieval

d_2/m	0.5	1	2	10
TIE	0.3438	0.3213	1.1700	50.5078
AAS	3.6×10^{-7}	3.6×10^{-6}	1.6×10^{-5}	4.8×10^{-5}
GS-TIE	6.0×10^{-6}	1.2×10^{-5}	5.9×10^{-6}	1.1×10^{-5}
AAS-TIE	7.2×10^{-8}	1.4×10^{-7}	1.4×10^{-7}	1.0×10^{-6}

4 结 论

在加速角谱迭代算法的基础上,引入了傅里叶变换光强传播方程,通过傅里叶变换光强传播方程在 3 个面上做了迭代运算的初始值计算,代替了随机初始相位,避免了由于初始相位的随机性增加的计算量,加快了收敛的速度,也在一定程度上提高了精度。利用 3 个面的加速角谱迭代算法,补充了近场衍射的相位信息,细节信息更饱满,弥补了利用傅里叶变换求解 TIE 方程得到的相位误差较大的不足。数据表明,两种算法结合后抗噪性能也得到了提高,收敛速度和收敛性都比较理想。

参 考 文 献

- 1 Wu Haiyan. Phase Retrieval Algorithm Base on Non-Interferometry Optical Field[D]. Hefei: Anhui University, 2012. 1~3
吴海燕. 非干涉光场的相位恢复算法研究[D]. 合肥: 安徽大学, 2012. 1~3
- 2 Guo Junhu. Study of Phase Retrieval Method from Intensities of Coherent Light[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2011. 34~40
郭俊虎. 相干光光强恢复相位的方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2011. 34~40
- 3 Wang Xiao, Miao Heng, Zhao Dazun. Phase retrieval based on intensity transport equation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(12): 2117~2122
王 潇, 毛 珩, 赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复[J]. *光学学报*, 2007, **27**(12): 2117~2121
- 4 R. W. Gerchberg, W. O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase form image and diffraction phase pictures[J]. *Optik*, 1972, **35**(2): 237~246
- 5 Cui Yuanfeng, Liao Tianhe, Gao Qiong. Hybrid input-output algorithm for phase retrieval of 2-D complex image in fractional Fourier domain[J]. *J. Applied Optics*, 2008, **29**(4): 653~656
崔远峰, 廖天河, 高 穹. 分数傅里叶域中二维复图像相位恢复的混合输入输出算法[J]. *应用光学*, 2008, **29**(4): 653~656
- 6 Ma Xinxue, Wang Jianli, Wang Bin. Study on phase retrieval algorithm[J]. *Laser & Infrared*, 2012, **42**(2): 217~221
马鑫雪, 王建立, 王 斌. 相位恢复技术算法的探究[J]. *激光与红外*, 2012, **42**(2): 217~221
- 7 Huang LiXin, Yao Xin, Cai Dongmei et al.. A high accuracy and fast iterative algorithm for phase retrieval [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(5): 1218~1221
黄利新, 姚 新, 蔡冬梅等. 一种快速高精度的相位恢复迭代法[J]. *中国激光*, 2010, **37**(5): 1218~1221
- 8 Xu Ninghan, Tan Qiaofeng, Jin Guofan. Reconstruction of complex wave-front by random binary phase modulation[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(7): 1800~1086
徐宁汉, 谭峭峰, 金国藩. 利用随机二院纯相位调制重构复杂光场波前[J]. *中国激光*, 2010, **37**(7): 1800~1086
- 9 Zeng Fa, Tan Qiaofeng, Wei Xiaofeng et al.. Complex optical field retrieved form intensity distributions on several fractional transform planes [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(12): 1621~1625
曾 发, 谭峭峰, 魏晓峰等. 基于多个分数阶次的复杂光场相位恢复算法[J]. *中国激光*, 2006, **33**(12): 1621~1625
- 10 T. Alieva, M. J. Bastiaans. Wigner distribution and fractionl Fourier transform [C]. International Symposium on Signal Processing and Its, 2001. 168~169
- 11 Diao Binbin, Wang Hui, Deng Lijun. A multi-intensity measurement phase recovery method base on spatial light modulator [J]. *J. Optoelectronics • Laser*, 2011, **22**(11): 1695~1695
刁彬彬, 王 辉, 邓丽军. 基于空间光调制器的多强度测量相位恢复方法[J]. *光电子•激光*, 2011, **22**(11): 1695~1695
- 12 Li Junchang. Diffraction of Laser and Calculation on Thermal Action[M]. Beijing: Science Press, 2008. 113~134
李俊昌. 激光的衍射及热作用计算[M]. 北京: 科学出版社, 2008. 113~134
- 13 Hu Xiaojun, Zhao Jinjin. Study on high dynamic surface on-site test of large mirrors base on phase retrival[J]. *Metrology & Measurement Technique*, 2011, (1): 22~24
胡晓军, 赵锦瑾. 大型镜面大误差范围相位恢复在位测量研究[J]. *计量与测试技术*, 2011, (1): 22~24