

非局域光学格子中光束传输的变分研究

白东峰 王毅 华显立

(河南工业职业技术学院光电工程系, 河南 南阳 473009)

摘要 从理论上分析了在强非局域非线性光学格子中的光束传输特性。在强非局域克尔介质中通过实对称响应函数的泰勒展开, 得到非线性薛定谔方程的简化了的拉格朗日密度, 运用变分法, 得出光束的束宽、振幅、相位等各个参量的演化方程。把光束看作等效粒子, 通过对势函数的分析, 得出形成格子孤子的临界功率。改变格子结构的周期、调制深度等参数, 可以实现对孤子传输的控制, 这在研究可控全光开关等方面具有潜在的应用价值。

关键词 非线性光学; 非局域非线性克尔介质; 光学格子; 变分法; 势函数

中图分类号 O437 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP50.111901

Variational Investigation of Beam Propagation in Nonlocal Optical Lattice

Bai Dongfeng Wang Yi Hua Xianli

(Department of Optoelectronic Engineering, Henan Polytechnic Institute, Nanyang, Henan 473009, China)

Abstract The beam propagation characteristics are investigated in nonlocal nonlinear optical lattice analytically. The reduced Lagrange density of nonlinear Schrödinger equation is obtained by expanding the real symmetric response function in Taylor's series in strongly nonlinear Kerr media. The problem of beam propagation can be analyzed by a variational approach, and the equations of the beam width, amplitude, phase and other parameters of the trial solution are obtained for the evolution during propagation. The beam can be looked as a particle, and its critical power is found through analyzing the potential function. The soliton propagation can be controlled by changing modulation period, modulation depth and other parameters of optical lattice. This effect has potential applications in the fields such as controlled optical switches.

Key words nonlinear optics; nonlocal nonlinear Kerr medium; optical lattice; variational approach; potential function

OCIS codes 190.3270; 190.6135

1 引言

在非线性介质中, 光束传输时受到使其展宽的衍射效应以及使其压缩的非线性效应作用, 当两者达到平衡时, 光束的束宽保持不变, 形成空间光孤子。由于空间光孤子在全光开关、全光逻辑光路以及全光互连器件等光子信息处理器件上有着广泛的应用前景, 因此近年来受到相当大的关注, 成为非线性光学领域的研究热点。

1997年 Snyder等^[1]提出的非局域线性模型极大地降低了孤子问题的复杂程度, 进而掀起了研究空间光孤子的热潮^[2]。Conti等^[3-4]从理论和实验上证明, 向列相液晶是第一个被发现的具有强非局域性的非线性介质; 后来发现铅玻璃也是具有强非局域性的非线性介质^[5]。Guo等^[6-15]发现强非局域介质中空间光孤子具有很大的相位改变^[6], 对非局域孤子的相互作用进行了研究^[7], 讨论了偏离束腰入射的光束对非局域光束传输的影响^[8], 得出了亚强非局域介质中光束的近似解析解^[9], 求得了高阶孤子^[10-11]及椭圆空间光孤子^[12]的解析解, 在理论上探讨了有损耗介质中光束的传输^[13], 利用微扰方法得到了非局域孤子的解析解^[14], 在实验上通过改变偏置电压来控制向列相液晶中孤子的相互作用^[15]。他们还利用变分法对局域介质

收稿日期: 2013-05-30; **收到修改稿日期**: 2013-08-11; **网络出版日期**: 2013-10-28

基金项目: 南阳市科技攻关计划、河南省科学技术基金(122300410416)

作者简介: 白东峰(1980—), 男, 硕士, 讲师, 主要从事非线性光学方面的研究。E-mail: 342807543@qq.com

中孤子的传输进行了研究^[16],对非局域克尔介质中厄米高斯光束的传输进行了变分研究^[17-18]。目前,对孤子的传输特性及相互作用的研究都取得了很大的进展,正是基于这些研究成果,非局域空间光孤子显示出在实现全光开关、全光信息处理上的巨大潜力。

本文主要从理论上分析了在强非局域非线性介质内一维光学格子中孤子的传输特性,通过对非局域介质中实响应函数的泰勒展开,推导并简化了光束所满足的传输方程,求出简化了的拉格朗日密度,利用瑞利-里兹方法得到光束的各个参量所满足的欧拉方程。把光束看作等效粒子,通过对势函数的分析,得出形成格子孤子的临界功率。改变格子的结构参数,可实现对孤子传输的控制。

2 非局域非线性薛定谔方程与变分法

在横向(x 方向)上折射率具有线性调制的平面非局域克尔介质中,光束的传输满足非局域非线性薛定谔方程:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \rho \psi \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |\psi(x'-z)|^2 dx' + h \psi \cos \frac{2\pi x}{t} = 0, \quad (1)$$

式中 $\psi(x, z)$ 代表傍轴光束; $\mu = 1/2k$, $\rho = ks$ 是介质常数 ($s > 0$, $s < 0$ 分别表示聚焦和散焦介质), $k = \omega n_0/c$, n_0 是介质中的线性折射率; z 为纵向坐标(光束的传输轴), x 是一维横向空间坐标。 R 是介质的对称实响应函数, 满足归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x') dx' = 1$ 。(1)式左边最后一项中 $\cos(2\pi x/t)$ 为线性调制项, 是光学诱导产生的格子势, 实验上可通过一对偏振的激光相互干涉产生, h 是线性调制幅度, t 是调制周期。假定 $h \cos(2\pi x/t)$ 的值比未受扰动的折射率 n 小而与由于克尔效应引起的非线性作用大小可以比较。做无量纲归一化处理: 设 $\xi = z/L_d$, $\eta = x/a_0$, $q = ka_0 s^{1/2} \psi$, $R_N(\eta) = a_0 R(x)$, $T = t/a_0$, $p = hL_d$, 其中 $L_d = ka_0^2$ 为瑞利距离, a_0 为初始束宽。(1)式可以简化为

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + q \int_{-\infty}^{+\infty} R_N(\eta - \eta') |q(\eta', \xi)|^2 d\eta' + pq \cos \frac{2\pi \eta}{T} = 0. \quad (2)$$

下面利用变分法来讨论(2)式所描述的光束的传输特性。(2)式可由最小作用量原理从下面的拉格朗日密度推出:

$$L = \frac{i}{2} \left(q^* \frac{\partial q}{\partial \xi} - q \frac{\partial q^*}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial q}{\partial \eta} \right|^2 + \frac{1}{2} |q|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_N(\eta - \eta') |q(\eta', \xi)|^2 d\eta' + |q|^2 p \cos \frac{2\pi \eta}{T}, \quad (3)$$

式中 $*$ 表示复共轭。(3)式所对应的变分方程可写为

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(q, q^*, q_\xi, q_\xi^*, q_\eta, q_\eta^*) d\eta d\xi = 0. \quad (4)$$

假设(2)式具有高斯型的试探解

$$q(\eta, \xi) = A(\xi) \exp[i\theta(\xi)] \exp \left[-\frac{\eta^2}{2a(\xi)^2} + ic(\xi)\eta^2 \right], \quad (5)$$

式中 A 和 θ 分别是试探解复振幅的幅值和相位, a 是光束的束宽, c 是波前曲率。把试探解代入(3)式并对 η 积分, 此变分问题可以简化为

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} L_\xi d\xi = 0, \quad (6)$$

其中

$$L_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} L d\eta. \quad (7)$$

考虑光束在强非局域介质中的传输, 即 $a/a_m \ll 1$, a 和 a_m 分别是光束的宽度和介质的响应函数的特征响应长度。为计算(3)式, 将 $R_N(\eta - \eta')$ 分两步作泰勒展开。具体做法如下: 先对 $R_N(\eta - \eta')$ 在 $\eta' = 0$ 处作展开, 再对展开的各项在 $\eta = 0$ 处进一步作泰勒展开, 近似取到二阶,

$$R_N(\eta - \eta') \approx R_N^{(0)}(0) - (\eta - \eta')R_N^1(0) + \frac{1}{2}(\eta - \eta')^2 R_N^2(0). \quad (8a)$$

上式中 $R_N^1(0) = 0$, 令 $R_0 = R_N^{(0)}(0)$, $\gamma = -R_N^2(0) > 0$, 则(8a)式可改写为

$$R_N(\eta - \eta') \approx R_0 - \frac{1}{2}\gamma(\eta - \eta')^2. \quad (8b)$$

将展开式(8b)式及试探解(5)式代入(3)式并对 η 积分得

$$L_\xi = -\sqrt{\pi}A^2 a \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}A^2 a^3 \frac{dc}{d\xi} - \frac{A^2 \sqrt{\pi}}{4a} - \sqrt{\pi}A^2 a^3 c^2 + \frac{\pi}{2}A^4 a^2 R_0 - \frac{\pi}{2}A^4 a^4 \gamma + \sqrt{\pi}pA^2 a \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2}{T^2}\right). \quad (9)$$

运用变分法的一般步骤,由(9)式和(6)式可得到试探解中各个参量所满足的欧拉方程:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_\xi}{\delta A} = 0 \Rightarrow & -2\sqrt{\pi}Aa \frac{d\theta}{d\xi} - \sqrt{\pi}Aa^3 \frac{dc}{d\xi} - \frac{\sqrt{\pi}A}{2a} - 2\sqrt{\pi}Aa^3 c^2 + 2\pi A^3 a^2 R_0 - \pi A^3 a^4 \gamma + \\ & 2\sqrt{\pi}pAa \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2}{T^2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_\xi}{\delta a} = 0 \Rightarrow & -\sqrt{\pi}A^2 \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{3}{2}\sqrt{\pi}A^2 a^2 \frac{dc}{d\xi} + \frac{\sqrt{\pi}A^2}{4a^2} - 3\sqrt{\pi}A^2 a^2 c^2 + \pi A^4 a R_0 - \pi A^4 a^3 \gamma + \\ & \sqrt{\pi}pA^2 \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2}{T^2}\right) - \frac{2\pi^2 \sqrt{\pi}pA^2 a^2}{T^2} \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2}{T^2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\delta L_\xi}{\delta c} = 0 \Rightarrow -2\sqrt{\pi}A^2 a^3 c + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}A^2 a^3\right) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\delta L_\xi}{\delta \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\xi}(\sqrt{\pi}A^2 a) = 0. \quad (13)$$

由(10)~(13)式得到

$$\frac{dc}{d\xi} = \frac{1}{2a^4} - 2c^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\gamma A^2 a - \frac{2p\pi^2}{T^2} \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2}{T^2}\right), \quad (14)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{1}{2a^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\gamma A^2 a^3 + \sqrt{\pi}R_0 A^2 a + p\left(1 + \frac{a^2 \pi^2}{T^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2}{T^2}\right), \quad (15)$$

$$A^2 a = A_0^2 a_0 = \frac{U}{\sqrt{\pi}}, \quad (16)$$

$$\frac{da^2}{d\xi^2} = \frac{1}{a^3} - \gamma U a - \frac{4pa\pi^2}{T^2} \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2}{T^2}\right), \quad (17)$$

式中 U 是输入功率, $U = \int_{-\infty}^{+\infty} |q(\eta, \xi)|^2 d\eta$, A_0 和 a_0 为初始振幅和束宽。(16)式说明光束在传输过程中能量守恒。

3 光束束宽的演化分析

考虑光束在自聚焦介质($s > 0$)中传输的情况,当 $T \rightarrow \infty$ 时,(17)式右边第三项趋于零,结合初始条件,可得到光束束宽演化的解析表达式^[6]

$$a^2 = a_0^2 [\cos^2(\sqrt{\gamma U} \xi) + \frac{U}{U_c} \sin^2(\sqrt{\gamma U} \xi)], \quad (18)$$

式中 $U_c = 1/\gamma a_0^4$ 是形成孤子时的临界功率。当 $U = U_c$ 时,非线性压缩刚好平衡衍射展宽,高斯光束在传输过程中保持束宽不变,形成孤子传输状态。

(17)式等效于牛顿第二定律,右边第一项是衍射项,使光束发散;第二项属于非线性作用项,使光束会聚;第三项属于周期性格子调制作用项,使光束会聚。显然,周期性格子结构抵消了一部分衍射效应。关于光束束宽 a ,令 $y(\xi) = a(\xi)/a_0$, 并对(17)式进行一次积分得到

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 + V(y) = 0. \quad (19)$$

(19)式类似于势阱中粒子的运动形式。把光束看作粒子,设其初始状态为静止,得其初始条件为 $y|_{\xi=0} = 1$, $\frac{dy}{d\xi}|_{\xi=0} = 0$ (对应光束由束腰处入射),进而得到势函数

$$V(y) = \frac{\sigma}{y^2} + \nu y^2 - 2p \sqrt{2\sigma} f y^2 + m, \quad (20)$$

式中 $\sigma = 1/2a_0^4$, $\nu = \gamma U/2$, $f = \exp(-a_0^2 \pi^2 / T^2)$, $m = -1/2a_0^4 - \gamma U/2 + 2p \sqrt{2\sigma} \exp(-a_0^2 \pi^2 / T^2)$ 。

下面对(20)式进行分析: 1) 当 $y \rightarrow 0$ 时, $V \rightarrow \infty$, 光束受到压缩; 2) 当 $y \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, 光束展宽; 3) 当 y 取定介于 0 到 ∞ 之间任一确定值时, V 为有限值。由以上分析可以看出, (20) 式所表示的势函数形成一势阱。对(20)式在 $y = 1$ 点求导得到

$$V'(1) = -2\sigma + 2\nu + \frac{4p \sqrt{2\sigma} a_0^2 \pi^2}{T^2} f. \quad (21)$$

分三种情况对(21)式进行讨论。

1) $V'(1) = 0$, 可以得到

$$\frac{V}{\sigma} = 1 - \frac{4pa_0^2 \pi^2}{T^2} f \sqrt{\frac{2}{\sigma}}, \quad (22)$$

由上式可以推出

$$U_c = \frac{1}{\gamma a_0^4} - \frac{4p\pi^2}{\gamma T^2} \exp\left(-\frac{a_0^2 \pi^2}{T^2}\right). \quad (23)$$

在这种情况下, 势函数的值取零, 粒子位于势阱的阱底而保持静止。这时光束的归一化束宽为 1, 即束宽保持不变。因为非线性与周期格子调制的共同作用与衍射效应达到了平衡, 形成了格子孤子传输。与在局域情况下形成孤子所需的光束束宽与格子周期的比值必须小于一定值的条件相比较^[16], 在强非局域介质中形成孤子没有此条件的限制。(23)式是形成孤子时的临界功率。当输入功率达到临界功率 U_c 时, 光束的束宽保持不变, 通过调节 p 和 T 的值, 可以以适当的输入功率达到孤子传输。

2) $V'(1) < 0$, 可以得到

$$\frac{V}{\sigma} < 1 - \frac{4pa_0^2 \pi^2}{T^2} f \sqrt{\frac{2}{\sigma}}, \quad (24)$$

由(24)式可以得到 $U < U_c$ 。粒子在 $y = 1$ 由静止释放, 在保守力下运动, 由于能量守恒, 其动能和势能相互转化, 粒子在势阱的底部作周期性的振荡。初始时衍射作用强于非线性和周期格子调制的共同作用, 光束的束宽先展宽后压缩到初始宽度。

3) $V'(1) > 0$, 可以得到

$$\frac{V}{\sigma} > 1 - \frac{4pa_0^2 \pi^2}{T^2} f \sqrt{\frac{2}{\sigma}}, \quad (25)$$

与情况 2) 类似, 只是 $U > U_c$, 初始时非线性和周期格子调制的共同作用强于衍射作用, 光束的束宽先压缩后展宽到初始宽度。

图 1 分别给出了改变光束的输入功率及格子参数 T, p 变化时光束束宽的演化图。图 1(a) 中, 介质中格子的调制深度 p 、周期 T 保持不变, 改变输入功率, 束宽在改变, 其中, 所取的 P_c 为格子调制深度 $p = 1$, 周期 $T = 1$ 时形成孤子的临界功率。从图中可以看出, 当输入功率接近临界功率时, 束宽变化曲线趋于平坦。当输入功率等于临界功率时, 束宽保持不变为一定值, 即形成了孤子。图 1(b) 中输入功率不变, 格子周期 $T = 2$, 改变格子的调制深度 p , 当 p 从 0.1~0.4 之间变化时, 束宽的变化不大, 光束即可视为孤子, 在 0.1~0.4 之间可以找到一个合适的值使得光束的束宽保持不变, 即为孤子。图 1(c) 中输入功率不变, 格子调制深度 $p = 1$, 改变格子的周期 T , 图中显示 $T = 2, 3, 5, 7$ 时光束的束宽在传播过程中的变化, 其中, 在 $T = 5$ 左右时, 束宽基本上保持不变, 即形成了孤子。

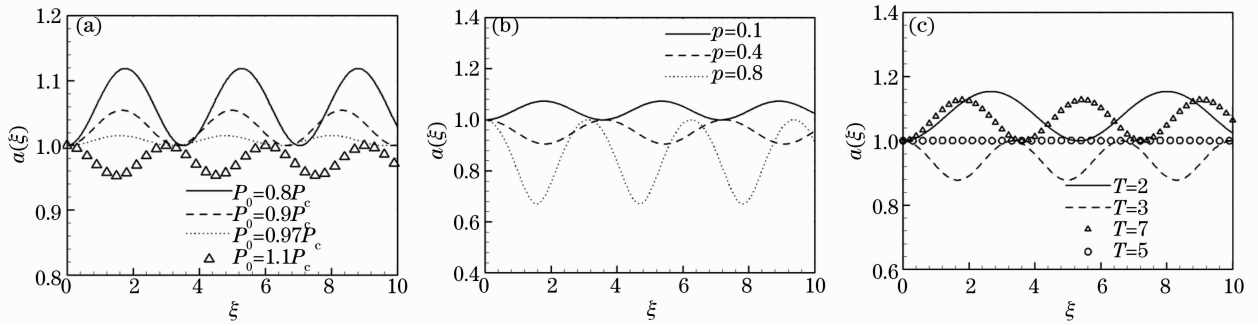


图1 光束束宽在传输过程中的变化。(a)介质中格子的调制深度 p 、周期 T 不变,输入功率改变, P_c 为格子调制深度 $p=1$,周期 $T=1$ 时形成孤子的临界功率; (b)输入功率不变,格子周期 $T=2$,改变格子的调制深度 p ; (c)输入功率不变,格子调制深度 $p=1$,改变格子的周期 T

Fig.1 Light beam width changes in the transmission process. (a) Medium lattice modulation depth of the p , period T are constants. P_c denotes the critical power when the solitons are formed modulation depth and period $T=1$; (b) input power is constant, lattice period $T=2$, the lattice modulation depth p is changed; (c) input power is constant, grating modulation depth $p=1$, the period T is changed

4 结 论

本文主要从理论上分析了在强非局域非线性介质中一维光学格子中孤子的传输特性。通过对非局域介质中实响应函数的泰勒展开,推导并简化了光束所满足的传输方程,求出了简化了的拉格朗日密度,利用瑞利-里兹方法得到光束的各个参量所满足的欧拉方程。把光束看作等效粒子,通过对势函数的分析,得出形成格子孤子的临界功率,改变光学格子的结构参数(格子的周期 T 及调制深度 p),进而改变光束的演化趋势,可实现对光束传输的控制。

参 考 文 献

- 1 Snyder A W, Mitcher D J. Accessible solitons [J]. Science, 1997, 276(5318): 1538—1540.
- 2 Shen Y R. Solitons made simple [J]. Science, 1997, 276(5318): 1520.
- 3 Conti C, Peccianti M, Assanto G. Route to nonlocality and observation of accessible solitons [J]. Phys Rev Lett, 2003, 91(7): 073901.
- 4 Conti C, Peccianti M, Assanto G. Observation of optical spatial solitons in a highly nonlocal medium [J]. Phys Rev Lett, 2004, 92(11): 113902.
- 5 Rotschild C, Cohen O, Manela O, *et al.*. Solitons in nonlinear media with an infinite range of nonlocality: first observation of coherent elliptic solitons and of vortex-ring solitons [J]. Phys Rev Lett, 2005, 94(21): 213904.
- 6 Guo Q, Luo B, Yi F H, *et al.*. Large phase shift of nonlocal optical spatial solitons [J]. Phys Rev E, 2004, 69(1): 016602.
- 7 Xie Yiqun, Guo Qi. Interaction between optical spatial solitons in nonlocal Kerr media [J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(9): 3020—3024.
谢逸群, 郭 旗. 非局域克尔介质中空间光孤子的相互作用[J]. 物理学报, 2004, 53(9): 3020—3024.
- 8 Guo Qi, Xu Chaobin. Influence of off-waist incidence on evolution of the Gaussian beam in the nonlocal nonlinear media [J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(9): 3025—3032.
郭 旗, 许超彬. 偏离束腰入射对非局域非线性介质中高斯光束演化的影响[J]. 物理学报, 2004, 53(9): 3025—3032.
- 9 Guo Q, Luo B, Chi S. Optical beams in sub-strongly non-local nonlinear media: a variational solution [J]. Opt Commun, 2006, 259(1): 336—341.
- 10 Zhang Xiaping, Guo Qi. Analytical solution in the Hermite-Gaussian form of the beam propagating in the strong nonlocal media [J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(7): 3178—3282.
张霞萍, 郭 旗. 强非局域非线性介质中光束传输的厄米高斯解[J]. 物理学报, 2005, 54(7): 3178—3282.
- 11 Zhang Xiaping, Guo Qi. Analytical solution to the spatial optical solitons propagating in the strong nonlocal media [J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(11): 5189—5193.

- 张霞萍, 郭旗. 强非局域非线性介质中光束传输的空间光孤子解[J]. 物理学报, 2005, 54(11): 5189—5193.
- 12 Qin Xiaojuan, Guo Qi, Hu Wei, *et al.*. Strongly nonlocal elliptical spatial optical solitons [J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(3): 1237—1243.
- 秦晓娟, 郭旗, 胡巍, 等. 椭圆强非局域空间光孤子[J]. 物理学报, 2006, 55(3): 1237—1243.
- 13 Huang Y, Guo Q, Cao J N. Optical beams in lossy non-local Kerr media [J]. Opt Commun, 2006, 261(1): 175—180.
- 14 Ouyang S G, Guo Q, Hu W. Perturbative analysis of generally nonlocal spatial optical solitons [J]. Phys Rev E, 2006, 74(3): 036622.
- 15 Hu W, Zhang T, Guo Q. Nonlocality-controlled interaction of spatial solitons in nematic liquid crystals [J]. Appl Phys Lett, 2006, 89(7): 071111.
- 16 Zhuo Hui, Fu Xiquan, Wu Jinhua, *et al.*. Investigation of the beam evolution in nonlinear optical lattice [J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(1): 252—257.
- 卓辉, 傅喜泉, 吴锦花, 等. 非线性光学格子中的光束演化研究[J]. 物理学报, 2007, 56(1): 252—257.
- 17 Bai Dongfeng, Guo Qi, Hu Wei. Variational investigation of Hermite-Gaussian beam propagation in nonlocal Kerr media [J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(9): 5684—5689.
- 白东峰, 郭旗, 胡巍. 非局域克尔介质中厄米高斯光束传输的变分研究[J]. 物理学报, 2008, 57(9): 5684—5689.
- 18 Bai Dongfeng, Huang Changchun, He Junfeng, *et al.*. Variational solutions for Hermite-Gaussian solitons in nonlocal nonlinear media [J]. Chin Phys B, 2009, 18(7): 2853—2857.