

椭圆高斯波束中小粒子的一阶散射特性

李 瑾¹ 李应乐^{2*} 王明军² 董群峰²

(¹陕西学前师范学院物理系, 陕西 西安 710100
²咸阳师范学院电波传播与散射研究所, 陕西 咸阳 712000)

摘要 研究电磁波束的小粒子散射特性在环境监测等领域有着广泛的应用。将电磁波束做级数展开,给出了各项对应电磁波的物理意义及粒子内电场的解析式。以椭圆高斯波束为例,对粒子内电场以及后项与前项电磁波束中粒子内电场的大小的比值随照射距离、频率的变化做了仿真。研究了椭圆高斯波束中小粒子的散射特性,通过仿真分析了波束腰宽和频率对散射特性的影响,验证了算法的有效性。研究表明,波束腰宽可以改善粒子的识别性能,粒子对高阶项的散射场远小于对次阶项的散射场,瑞利粒子内场表达式中坐标的幂次与外场波束表达式中坐标的幂次相同。所提方法简单,为研究电磁波束的粒子散射特性探索了新的途径。

关键词 散射;瑞利散射;电磁波束;高斯波束

中图分类号 O436.2 文献标识码 A doi: 10.3788/LOP50.010102

Properties of First-Order Scattering of Small Particles in Elliptical Gaussian Beam

Li Jin¹ Li Yingle² Wang Mingjun² Dong Qunfeng²

(¹Department of Physics, Shaanxi Xueqian Normal University, Xi'an, Shaanxi 710100, China
²Institute of Radio Wave Propagation and Scattering, Xianyang Normal University, Xianyang, Shaanxi 712000, China)

Abstract The research of scattering property of small particles in electromagnetic beams has comprehensive applications in fields such as environmental monitoring. The electromagnetic beam is expanded in series, and the theoretical solutions of the internal fields for small particles as well as the physical significances of the items in these series are developed. Taking the elliptical beam as an example, the internal electric field and the changes of the ratio of the latter item to the former of the series, versus both the distance and the frequency are simulated. The scattering property of small particles in an elliptical Gaussian beam is investigated. By simulations, the effects of the beam waist and the frequency on scattering property are analyzed. The validity of the algorithm used is demonstrated. Results show that the beam waist may improve notably the particle's identification, the scattering field of higher order item is much smaller than that of lower order item, and the power order of coordinates in the solution of internal field, speaking to a Rayleigh particle, is always equal to that of coordinates in the incident beam. The method used is simple and has explored a new way for scattering from particles in electromagnetic beams.

Key words scattering; Rayleigh scattering; electromagnetic beam; Gaussian beam

OCIS codes 290.5870; 290.0290; 010.1310

1 引言

自然界中许多粒子如气溶胶粒子、大气冰晶粒子、宇宙环境尘埃颗粒、生物医学细菌等粒子的尺寸都远远小于波束的工作波长。由于这类小粒子的波束散射特性在粒度分析、环境监测及宇宙遥感等领域有着广泛的应用,已成为国内外学者的关注热点。Mie 理论给出了一个均匀球形粒子的平面电磁波散射特性^[1],为

收稿日期: 2012-10-12; 收到修改稿日期: 2012-10-15; 网络出版日期: 2012-11-27

基金项目: 国家自然科学基金(60971079,60801047,61102018)资助课题。

作者简介: 李 瑾(1986—),女,硕士,主要从事激光与物质相互作用和光散射方面的研究。E-mail: aximofu@126.com

* 通信联系人。E-mail: liyinglexidian@126.com

一般粒子的平面波散射评价奠定了基础。许多学者开展了球形粒子的高斯波束及其他波束散射特性研究,分析了束腰宽度等参数对粒子散射特性的影响^[2~4]。Barton^[5]利用球面波函数展开得到了高阶高斯波束照射下均匀球的内场和近场表达式。赵继芝等^[6]根据广义 Mie 理论研究了球形粒子在聚焦拉盖尔-高斯光束中的散射特性,推导出了散射系数的解析表达式。将入射波束用球矢量波函数展开并进行坐标统一研究双球粒子的波束散射特性^[7]是一种行之有效的研究方法。近年来,将广义 Mie 理论用于研究靶纳米粒子二聚体的散射^[8]及其表面增强拉曼散射效应,研究了电磁相互作用的影响,表明广义 Mie 理论在纳米量级上仍然十分有效。从研究方法上讲,研究球形粒子的散射特性可分为平面波散射,即 Mie 理论和用球矢量波函数展开的波束散射,数值方法用来研究球形粒子的散射是不经济的;这些研究方法虽然有效,但计算较为繁杂,用解析方法一般无法获得入射场的展开系数,需要数值积分来完成,其计算精度和程序的合理性有关,受波束形状的限制。小粒子的尺度一般小于电磁波的波长而且满足瑞利散射条件,可以认为粒子处于静电场中。本文在现有研究的基础上,利用泰勒级数展开法研究小粒子的场分布其散射特性:首先将任意波束的空间传播因子 e^{-jkx} 去除后,其余部分做级数展开,得到球形粒子的各阶内外场的解析式。以椭圆高斯波束为例研究小球的散射特性并做相应的仿真计算。该方法相对简单,具有通用性,不受波束形状的限制,文中所用时谐因子为 $e^{j\omega t}$ 。

2 波束照射下小球内电场的表达式

设小球的半径为 a , 相对介电常数为 ϵ_r , 位于自由空间, 文献[1]详细地研究了瑞利散射的误差与粒子半径、波长的关系, 发现球形粒子半径的上限一般取作 $a=0.05\lambda$, 在这些半径上, 计算所得的归一化散射截面的误差一般小于 4%, 与入射波的形状无关。设波束的形式为

$$\mathbf{E}_z = \mathbf{z}f(x, y, z)\exp(-jkx). \quad (1)$$

入射波束沿 z 方向极化、沿 x 方向传播。将(1)式中的波束形状因子在点 $(0, 0, 0)$ 做级数展开保留到一次项可得

$$f(x, y, z)\exp(-jkx) = \left[f(0, 0, 0) + \frac{1}{1!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \Big|_{x=0, y=0, z=0} f(0, 0, 0) + \dots \right] \exp(-jkx). \quad (2)$$

(2)式中右边的第一项对应于 z 方向的均匀平面电磁波, 第二项、第三项等分别为振幅随坐标增加的非均匀平面电磁波。为简化分析, 本文仅研究 $ka \ll 1$ 时瑞利粒子的散射。与第一项对应的小球内电场为^[1]匀强电场, 即

$$\mathbf{E}_0 = \frac{3f(0, 0, 0)}{2 + \epsilon_r} \mathbf{z}. \quad (3)$$

第二项可以写为

$$x \frac{\partial f(0, 0, 0)}{\partial x} = x f'_{x0}.$$

第二项 $x f'_{x0}$ 为 z 方向极化的电场。由于研究的问题绕 z 轴不具有对称性, 可设球内的电势为

$$\varphi_1 = \sum_{mm} \left(a_{mm} R^n + \frac{b_{mm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi + \sum_{mm} \left(c_{mm} R^n + \frac{d_{mm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi.$$

球外的电势为

$$\varphi_2 = -k_{1z} R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi + \sum_{mm} \left(A_{mm} R^n + \frac{B_{mm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi + \sum_{mm} \left(C_{mm} R^n + \frac{D_{mm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi.$$

考虑到 $R \rightarrow \infty$, $\varphi_2 \rightarrow -k_{1z} R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi$, 所以

$$C_{mm} = D_{mm} = 0, \quad A_{mm} = 0, \quad B_{mm} = 0, \quad m \neq 1,$$

即

$$\varphi_2 = -f'_{x0} R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi + \sum_n \frac{B_{n1}}{R^{n+1}} P_n^1(\cos \theta) \cos \phi.$$

考虑到 $R \rightarrow 0$, φ_1 应为有限值, 即

$$\varphi_1 = \sum_{mm} a_{mm} R^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi + \sum_{mm} c_{mm} R^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi.$$

利用函数 $P_n^m(x)$ 的性质及边界条件

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \Big|_{R=a} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \Big|_{R=a},$$

容易得到球内外电势为

$$\varphi_2 = -f'_{x0} R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi + \frac{3B_{21}}{R^3} \sin \theta \cos \theta \cos \phi, \quad \varphi_1 = 3a_{21} R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi = 3a_{21} z x,$$

其中

$$a_{21} = -\frac{5\epsilon_0 f'_{x0}}{3(2\epsilon + 3\epsilon_0)}, \quad B_{21} = \frac{2f'_{x0} a^5 (\epsilon - \epsilon_0)}{3(2\epsilon + 3\epsilon_0)}.$$

内部的电场为

$$\mathbf{E}_1 = -6a_{21} R \sin \theta \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} - 3a_{21} R \cos 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + 3a_{21} R \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

直角坐标系的电场表达式为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{5\epsilon_0 f'_{x0} (z \hat{\mathbf{x}} + x \hat{\mathbf{z}})}{2\epsilon + 3\epsilon_0}. \quad (4)$$

由于电磁波沿 z 轴方向极化,对于球形粒子来讲, x 轴方向与 y 轴方向具有完全的对称地位,故(2)式的第三项对应的目标内场为

$$\mathbf{E}_2 = \frac{5\epsilon_0 f'_{y0} (z \hat{\mathbf{y}} + y \hat{\mathbf{z}})}{2\epsilon + 3\epsilon_0}, \quad (5)$$

当(2)式的第四项照射到目标上,用同样的方法可得球形粒子的内部电场为

$$\mathbf{E}_3 = -\frac{5\epsilon_0 f'_{z0} \mathbf{R}}{9\epsilon_0 + 6\epsilon}, \quad (6)$$

式中 $\mathbf{R} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$ 为粒子坐标系中的位置矢量。(3)~(6)式之和为任意波束照射下粒子内部的电场强度。从求解过程可以看出,以上结果是在以粒子中心为坐标原点的坐标系中得出的。

以上结果表明:对于均匀介质球而言,如果入射场为均匀电场,那么球内的电场也是匀强电场,如(3)式那样恰好满足边界条件;如果入射场为坐标的线性函数,那么球内的电场也是坐标 x, y, z 的线性函数,如(4)~(6)式那样以满足边界条件的需要。不难推测,如果入射场为坐标的2次方,那么球内的电场也是坐标的2次方,即 $x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz$ 线性组合;如果入射场为坐标的3次方,那么球内的电场也是坐标的3次方,即 $x^3, y^3, z^3, x^2 y, y^2 z, xz^2, xyz$ 线性组合,依此类推,不再赘述。值得注意的是迪卡儿坐标系中的单位矢量 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 如何与坐标的线性组合进行配置是一个复杂的问题,需要准确地求解来加以确定。

3 椭球高斯波束照射下小球的瑞利散射特性

3.1 椭球高斯波束照射下小球的场分布

椭球高斯波束的电场在 z 方向极化、沿 x 方向传播,表达式为

$$E_z = E_0 \sqrt{-Q_z Q_y} \exp \left[-j \left(\frac{Q_z z'^2}{W_{0z}^2} + \frac{Q_y y'^2}{W_{0y}^2} \right) \right] \times \exp(-jkx'), \quad (7)$$

式中 $Q_y = \left(j + \frac{2x'}{kW_{0y}^2} \right)^{-1}$, $Q_z = \left(j + \frac{2x'}{kW_{0z}^2} \right)^{-1}$, W_{0y}^2, W_{0z}^2

分别为波束在横向上的束腰半径。(7)式是在辐射源如激光器坐标系中的表达式,当研究粒子对其的散射特性时,要凭借有关的数学公式,所有的数学公式只有在同一坐标系中才有效,所以首先要进行坐标的统一。如图1所示,由于粒子位于椭球高斯波束坐标系的 x' 轴上,距离椭球高斯波束坐标系的原点为 d , 由此可得两坐标系的

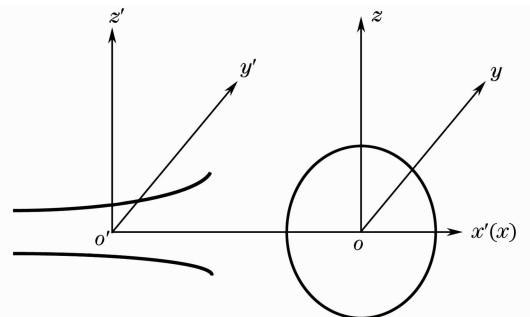


图1 椭球高斯波束照射粒子

Fig. 1 Particle in elliptical Gaussian beam

坐标关系为

$$\begin{cases} x' = x + d \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式可得粒子坐标系中的椭球高斯波束为

$$E_z = E_0 \sqrt{-Q_z Q_y} \exp\left[-j\left(\frac{Q_z z^2}{W_{0z}^2} + \frac{Q_y y^2}{W_{0y}^2} + kd\right)\right] \exp(-jkx), \quad (9)$$

$$\text{式中 } Q_y = \left[j + \frac{2(x+d)}{kW_{0y}^2}\right]^{-1}, Q_z = \left[j + \frac{2(x+d)}{kW_{0z}^2}\right]^{-1}.$$

将(9)式在坐标系的原点展开可得

$$f(0,0,0) = E_0 \sqrt{-Q_{z0} Q_{y0}} \exp(-ikd), \quad (10)$$

$$\text{式中 } Q_{y0} = \left(j + \frac{2d}{kW_{0y}^2}\right)^{-1}, Q_{z0} = \left(j + \frac{2d}{kW_{0z}^2}\right)^{-1}.$$

相应的一阶偏导数为

$$f'_{x0} = E_0 \frac{\frac{1}{kW_{0y}^2} + \frac{1}{kW_{0z}^2} - j\frac{4d}{k^2 W_{0y}^2 W_{0z}^2}}{\left[j\left(\frac{2d}{kW_{0y}^2} + \frac{2d}{kW_{0z}^2}\right) + \frac{4d^2}{k^2 W_{0y}^2 W_{0z}^2} - 1\right]^{3/2}} \exp(-jkd), \quad f'_{z0} = 0, \quad f'_{y0} = 0. \quad (11)$$

将(10)、(11)式代入(3)~(6)式可得椭球高斯波束照射下粒子的内场。

为了确保椭球高斯波束具有良好的方向性,在图2的仿真中, z 方向与 y 方向的束腰宽度分别为 1000λ 和 900λ ,相对介电常数为2。可以看出,一阶电场与零阶电场相比,衰减在160 dB以上,随照射距离的增大而略有减小。在工程计算及实际应用中,一阶电场的影响可以忽略不计。为了清楚地展示一阶电场及对应电势的分布,取粒子分布范围的半径为0.8 m,结果如图3所示,其中带有箭头的线段表示电力线,实线表示等势线,大小在 10^{-15} V的量级上,波束腰宽对一阶内电场的影响不大。

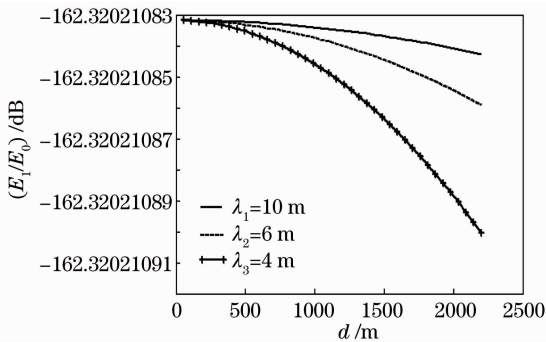


图2 电场比率随照射距离变化

Fig. 2 Ratio of electric field to the exposure distance

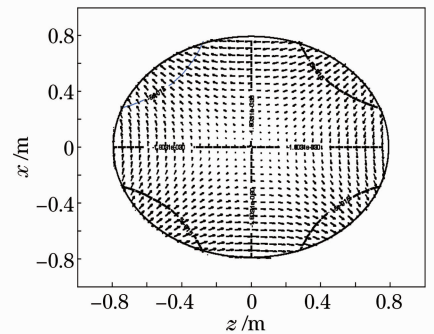


图3 一阶电场的分布

Fig. 3 Distribution of the first order electric field

3.2 粒子椭球高斯波束的瑞利散射特性

粒子的瑞利散射特性主要由粒子的大小、入射波束的极化和观测方位决定,由于入射波束在 z 方向极化,研究的对象为球形小粒子的散射,关于 z 轴具有一定的对称性,散射场应与观测方位角 φ 无关,仅是方位角 θ 等因素的函数。

由(3)、(4)、(10)、(11)式可得迪卡儿坐标系中粒子内部的总电场为

$$\mathbf{E} = \frac{3f(0,0,0)}{2 + \epsilon_r} \mathbf{z} + \frac{5f'_{x0}(z\mathbf{x} + x\mathbf{z})}{2\epsilon_r + 3}. \quad (12)$$

散射振幅的计算公式为^[1]

$$f_m(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{k^2}{4\pi J} \int_{v'} \{-\boldsymbol{\theta} \times [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \} [\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1] \exp(jk\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\theta}) dv', \quad (13)$$

式中 $\boldsymbol{\theta} = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{x} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{y} + \cos\theta\mathbf{z}$ 为散射方向的单位矢量, \mathbf{t} 为入射波方向的单位矢量, k 为自由空

间的波数。将(12)式代入(13)式,利用笛卡儿坐标与球坐标的关系可得散射振幅为

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{k^2 a^3 f(0)(\epsilon_r - 1)}{2 + \epsilon_r} \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \cos \varphi \hat{x} + \frac{\sin 2\theta}{2} \sin \varphi \hat{y} - \sin^2 \theta \hat{z} \right), \quad (14)$$

式中 (θ, φ) 为观测方位。微分散射截面为

$$\sigma_d = |f(\theta, \varphi)|^2 = \frac{k^4 a^6 f(0) f^*(0)(\epsilon_r - 1)^2}{(2 + \epsilon_r)^2} \sin^2 \theta. \quad (15)$$

(15)式表明:散射振幅的大小仅是方位角 θ 的函数,是由电磁波束的极化及粒子的对称性决定的。归一化散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\pi a^2} \int \sigma_d d\Omega = \frac{8k^4 a^4 f(0) f^*(0)(\epsilon_r - 1)^2}{3(2 + \epsilon_r)^2}. \quad (16)$$

(16)式表明:粒子的散射振幅主要由粒子的内电场确定;当电磁束照射到瑞利粒子上,总可以将该电磁束在粒子坐标系中做泰勒级数展开,分别对应坐标的0次项、1次项、2次项等。在用(16)式对粒子进行体积积分时,坐标的奇次项即1次项场、3次项场及5次项场的积分为0,这是由方位角三角函数的正交性决定的,

也就是说,只有坐标的偶次项场的积分不为,即坐标 $\begin{cases} x^m y^n, & z^m y^n, & x^m z^n, & m+n \text{ (being even)} \\ x^l y^m z^n, & & & m+n+l \text{ (being even)} \end{cases}$ 对积分有贡献,而且高次项总是小于低次项,为进一步地研究电磁波束瑞利散射特性提供了方便和理论依据。

由图4可以看出:随着波束腰宽的增加,散射截面迅速增加,继续增大波束腰宽时,散射截面趋于稳定;当波束腰宽约为电磁波束波长的25倍时,散射截面达到稳定状态。也就是说,要提高电磁波束的目标检测、识别性能,除了目标本身的形状等因素外,还可采用增大电磁波束的腰宽、减小波束的发散性、增强目标单位体积上的诱导电流的方法,提高雷达波束的目标检测性能。图5表明:当粒子的介电常数增加时,散射截面也增加;由于粒子的散射截面本质上反映了电磁波束照射下目标上诱导电磁源的辐射能力,同时天线的辐射功率与频率的平方、辐射电流的平方成正比,所以当介电常数增加时,诱导电流增强,从而导致散射截面的增加。

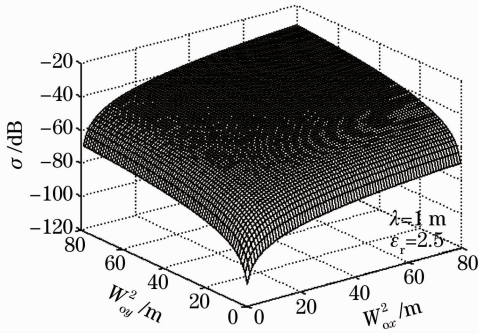


图4 归一化散射截面与波束腰宽的关系

Fig. 4 Relation between normalized scattering cross section and beam waist

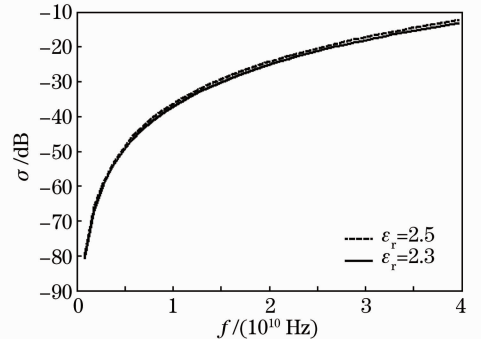


图5 归一化散射截面与频率的关系

Fig. 5 Relation between normalized scattering cross section and frequency

当单位平面电磁波照射时,文献[1]给出了介电常数为 ϵ_r ,半径为 a 的均匀介质球的微分散射截面与散射截面,具体表达式为

$$\sigma_d = \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \frac{3(\epsilon_r - 1)}{2 + \epsilon_r} \right|^2 V^2 \sin^2 \chi, \quad \sigma = \frac{8(ka)^4}{3} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} \right|^2,$$

式中 χ 为极化方向与观测方向之间的夹角, V 为小球的体积。显然当展开项 $f(0) = 1$ 时,(15)、(16)式与文献中的公式完全一致,这种理论的一致性表明了本文算法的有效性。

4 结 论

本文基于电磁波束的泰勒级数展开研究了椭圆高斯波束的小粒子瑞利散射特性;给出了与一般电磁波束级数展开式各项对应的电磁波的物理意义,得到了各一阶项波束照射瑞利粒子时粒子内电场的解析式及

其坐标的幂次规律。以椭圆高斯波束为例,对粒子内场及电势的分布,后项与前项电磁波束中粒子内电场的大小之比随照射距离和频率的变化做了仿真。得到了椭圆高斯波束中小粒子的散射振幅、微分散射截面等,通过仿真分析了波束腰宽、频率对散射特性的影响,提出了利用波束腰宽提高目标识别能力的方法,验证了本文算法的有效性。为研究电磁波束的粒子散射特性探索了新的途径,为利用椭圆高斯波束进行粒子探测、环境监测等提供了新方法。研究基于级数展开的多层球散射特性以及更高阶项的目标散射特性具有创新性和挑战性,是下一步将要开展的研究工作。

参 考 文 献

- 1 Akira Ishimaru. Wave Propagation and Scattering in Random Media[M]. New York: Oxford University Press, 1997, 27~29
- 2 J. A. Lock, J. M. Jamison, C. Y. Lin. Rainbow scattering by a coated sphere[J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(21): 4677~4690
- 3 G. Gouesbet. Validity of the localized approximation for arbitrary shaped beams in the generalized Lorenz-Mie theory for spheres[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(7): 1641~1650
- 4 J. A. Lock, J. T. Hodges. Far-field scattering of a non-Gaussian off-axis axisymmetric laser beam by a spherical particle [J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(33): 6605~6616
- 5 John P. Barton. Electromagnetic-field calculations for a sphere illuminated by a higher-order Gaussian beam. I. Internal and near-field effects[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(6): 1303~1310
- 6 Zhao Jizhi, Jiang Yuesong. Scattering of the focused Laguerre-Gaussian beams by a spherical particle[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(6): 064202
赵继芝, 江月松. 球形粒子在聚焦拉盖尔-高斯光束中的散射特性研究[J]. *物理学报*, 2012, **61**(6): 064202
- 7 Han Guoxia, Han Yiping. Scattering of bi-sphere arbitrarily illuminated by a single beam and a dual beam[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(4): 2434~2437
韩国霞, 韩一平. 双球粒子对任意入射单波束及双波束的散射[J]. *物理学报*, 2010, **59**(4): 2434~2437
- 8 Ruan Fangxiong, Zhang Shunping, Li Zhipeng *et al.*. Near-field coupling and SERS effects of palladium nanoparticle dimers [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2010, **55**(21): 2078~2085
阮芳雄, 张顺平, 李志鹏 等. 钯纳米粒子体系中的近场耦合与 SERS 效应[J]. *科学通报*, 2010, **55**(21): 2078~2085